G. VIVANTI

THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

CARNEGIE INSTITUTE
OF TECHNOLOGY
LIBRARY

PRESENTED BY
Dr. Lloyd L. Dines

G. VIVANTI
ORD. PROFESSOR AN DER K. UNIVERSITÄT ZU MESSINA

THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

UMARBEITUNG
UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS
DEUTSCH HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort des Herausgebers.

Auf den Antrag der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig habe ich es übernommen, eine deutsche Ausgabe der „Teoria delle funzioni analitiche" von G. Vivanti zu veranstalten. Ich bin diesem Antrage deswegen gern gefolgt, weil ich selbst vor Jahren Vorarbeiten zu einer Monographie der eindeutigen und insbesondere der ganzen Funktionen begonnen hatte, zu der ich aus Seminarvorträgen von Weierstraß und späteren Unterhaltungen mit diesem Anregungen empfangen hatte. Die stetig zunehmende Fülle neuer Arbeiten über das genannte Gebiet sowie eine starke Inanspruchnahme meiner Zeit und Arbeitskraft nach anderen Richtungen waren aber der Ausführung meiner Absicht nicht günstig, und es war mir daher eine Freude, die geringe Muße, die mir verblieb, der deutschen Ausgabe von Vivantis *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen* zu widmen, die in vieler Hinsicht meinen alten Plan verwirklichte.

Für die deutsche Ausgabe erschien es mir zunächst als unerläßlich, den dritten Teil einheitlich zu gestalten und erheblich weiter auszubauen, als dies im Original der Fall war. Der Herr Verfasser, dessen ausgezeichnete Kenntnis der deutschen Sprache dem Werk in jeder Weise zu statten gekommen ist, hat meine wesentlichen Wünsche auf das Entgegenkommendste erfüllt; er hat nicht nur den dritten Teil fast ganz neu gefaßt, sondern er hat auch die beiden ersten Teile mehr oder minder großen Änderungen und Ergänzungen unterworfen. Es sei mir gestattet, Herrn Vivanti für die Berücksichtigung meiner Wünsche und für die unermüdliche Liebenswürdigkeit, mit der er alle Korrekturen und Revisionen durchgesehen hat, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Als Grundlage für die deutsche Ausgabe diente in erster Linie das von dem Verfasser durchgesehene bezw. umgearbeitete Originalmanuskript; dessen Übersetzung übertrug die Verlagsbuchhandlung Herrn Kandidat d. h. Sch. R. Kneschke in Braunschweig, der seine Aufgabe in dankenswerter Weise erledigt und auch bei der Korrektur

geholfen hat. Dieses deutsche Manuskript unterzog ich nun einer sachlichen und sprachlichen Überarbeitung, die dann ihrerseits die Druckvorlage hergab. Die Korrektur war ziemlich zeitraubend und umständlich. Auf meine Bitte beteiligten sich die Herren A. Schoenflies und P. Stäckel in der bereitwilligsten Weise an der Durchsicht, und ich schulde beiden sehr verehrten Kollegen für zahlreiche formale und sachliche Bemerkungen herzlichsten Dank.

Ganz besondere Aufmerksamkeit haben der Herr Verfasser und ich auf genauen Ausdruck und vor allem auf zweckmäßige Terminologie gelegt. Vielleicht trägt das vorliegende Buch dazu bei, dem schwankenden Sprachgebrauche, namentlich im Gebiete der ganzen Funktionen, ein Ende zu machen. Die gewählte Bezeichnungsweise scheint mir allgemeine Annahme zu verdienen.

Die Fertigstellung der vorliegenden Bearbeitung hat sich erheblich verzögert durch Umstände, deren Behebung nicht in meiner Macht lag. Ich möchte nicht unterlassen, der Firma B. G. Teubner für die Geduld und für das liebenswürdige Eingehen auf alle meine Wünsche hiermit noch meinen besonderen Dank auszusprechen. Möge die Aufnahme des Buches der von allen Seiten aufgewandten liebevollen Sorgfalt entsprechen!

Halle a. S., im Oktober 1905.

A. Gutzmer.

Vorwort des Verfassers.

Der vorliegende Band ist keineswegs eine einfache Übersetzung meiner im Jahre 1901 im Verlage von U. Hoepli erschienenen *Teoria delle funzioni analitiche*; denn der Herausgeber hatte den dringenden Wunsch geäußert, einige Teile, die aus Mangel an Raum nur gestreift worden waren, namentlich der letzte Abschnitt, möchten eine ausführliche Behandlung und Darstellung erhalten.

Ich bin diesem Wunsche um so lieber nachgekommen, als einige inzwischen erschienene Arbeiten, besonders diejenigen von Pringsheim, dazu geeignet waren, meine Aufgabe zu erleichtern, ohne mich zu nötigen, die elementare, d. h. von der Infinitesimalrechnung unabhängige Methode zu verlassen, die im ganzen Buch streng innegehalten wird. So ist z. B. die neuere Theorie der ganzen Funktionen, die in dem italienischen Original auf sechs Seiten behandelt wird, zu einer wahren Monographie dieses Gebietes geworden, in der die Ergebnisse der neuesten Untersuchungen systematisch und einheitlich entwickelt werden. Ich habe auch die Gelegenheit benutzt, um zahlreiche Veränderungen vorzunehmen und Zusätze zu machen, so daß das Werk, ohne daß es seine Eigenart verändert hätte, doch als ein völlig neues zu betrachten ist. Die Literatur ist bis zur Mitte des laufenden Jahres fortgeführt und die Bibliographie der Mengenlehre unserem Verzeichnis einverleibt worden.

Herr A. Gutzmer hat der deutschen Ausgabe die größte Sorgfalt und Mühe gewidmet; es sei mir erlaubt, ihm hierfür wie für zahlreiche wertvolle Bemerkungen öffentlich meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Ebenso bin ich den Herren A. Schoenflies und P. Stäckel für eine Reihe von wichtigen Bemerkungen und Ratschlägen zu besonderem Dank verpflichtet. Auch der Liebenswürdigkeit der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig, die eine ungemein umständliche und vielfältige Revision ermöglicht hat, muß ich dankbar gedenken. Ihnen allen werde ich es zuzuschreiben haben, wenn — wie ich hoffe — dieses Buch eine freundliche Aufnahme bei der deutschen mathematischen Jugend finden und zum Fortschritt der neueren Analysis in Deutschland beihelfen wird.

Messina, im Juli 1905.

G. Vivanti.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Elemente der Mengenlehre.

Zweiter Teil.

Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen.

Dritter Teil.

Ergänzungen zur Theorie der analytischen Funktionen.

Erster Teil.

Elemente der Mengenlehre[1]).

Definitionen und grundlegende Sätze.

1. Unter der Umgebung eines Punktes auf einer Geraden versteht man eine Strecke von beliebiger Länge, die diesen Punkt enthält; denkt man sich die Gerade horizontal, so unterscheidet man den rechts von dem betrachteten Punkte gelegenen Teil der Strecke von dem links gelegenen durch die Bezeichnung rechte Umgebung bezw. linke Umgebung. Unter der Umgebung eines Punktes (einer Stelle) in einer Ebene versteht man einen ebenen Bereich von beliebiger Form und Ausdehnung, der den betreffenden Punkt einschließt. Häufig werden wir als Umgebung eines Punktes einen Kreis nehmen, der mit beliebigem Radius um jenen Punkt beschrieben ist.

Für gewisse analytische Untersuchungen empfiehlt es sich, die Ebene — im Gegensatz zur Geometrie — als nur mit einem unendlich fernen Punkte behaftet anzunehmen. Als Umgebung des unendlich fernen Punktes muß man dann den unendlichen Teil der Ebene bezeichnen, der außerhalb jedes beliebigen endlichen Bereiches verbleibt[2]).

2. Als eine Menge bezeichnet man eine wohldefinierte Gesamtheit von Elementen von der Art, daß sich, wenn ein Element gegeben

1) Über die Bibliographie des Gegenstandes siehe Vivanti, 497, 498, 510. (Diese Nummern beziehen sich auf das bibliographische Verzeichnis, das sich am Schluß dieses Werkes befindet.) Eine ausführliche Behandlung der Mengenlehre wurde kürzlich von Schönflies (442) veröffentlicht. Neueste Literatur: Bernstein 25, Bindoni 38, Borel 45, Bortolotti 80, Dunan 140, Evellin et Z. 143, Gundersen 179, Hausdorff 200, Jürgens 219, Keyser 221, Levi 261, 262, Maillet 281, 282, Russell 436, Schönflies 446, Whitehead 519, Zermelo 523.

2) Hinsichtlich des Weges, auf welchem man zu dieser Definition gelangt, vergleiche man: Vivanti, Corso di calcolo infinitesimale, S. 20 und 67, Messina, Trimarchi 1899.

ist, stets entscheiden läßt, ob es der betrachteten Gesamtheit angehört oder nicht. Wir werden im besondern Mengen von Punkten zu betrachten haben, die auf einer Geraden oder in einer Ebene liegen.

Eine Menge heißt endlich, wenn man, indem die Elemente einzeln weggenommen und ihnen der Reihe nach die Glieder der natürlichen Zahlenreihe zugeordnet werden, schließlich bis zu einem Gliede gelangt, über das hinaus das Verfahren nicht mehr fortgesetzt werden kann, weil nunmehr alle Elemente der Menge weggenommen sind. Bezeichnet man also die Elemente mit einem und demselben Buchstaben, der als Index beziehungsweise die entsprechende Zahl erhält, so läßt sich eine endliche Menge stets folgendermaßen darstellen:

$$a_1, \; a_2, \; \cdots, \; a_n.$$

Eine nicht endliche Menge heißt unendlich.

Man sagt von einer Menge M, sie sei in einer andern Menge N enthalten oder bilde einen Bestandteil oder eine Teilmenge von N, wenn alle Elemente von M zugleich N angehören; man nennt M einen echten Bestandteil von N, wenn M einen Bestandteil von N bildet, ohne mit N identisch zu sein.

3. Ein Punkt heißt Grenzstelle (Häufungsstelle) einer gegebenen, in einer Ebene liegenden Punktmenge, wenn in jeder beliebigen Umgebung von ihm Punkte der Menge enthalten sind, die von ihm verschieden sind. Zum Beispiel hat die Menge aller Punkte der Ebene, deren kartesische Koordinaten in bezug auf zwei Achsen rational sind, alle Punkte der Ebene zu Grenzstellen; die Menge aller Schnittpunkte zweier Büschel paralleler Geraden von gleichem endlichen Abstande hat als einzige Grenzstelle den unendlich fernen Punkt.

Eine Grenzstelle einer Menge kann der Menge selbst angehören oder nicht.

4. Eine endliche Menge hat keine Grenzstelle.

In der Tat:

a) der unendlich ferne Punkt kann keine ihr zugehörige Grenzstelle sein, weil sich immer ein endlicher Bereich angeben läßt, welcher alle in endlicher Entfernung gelegenen Punkte der Menge einschließt;

b) irgendwelcher andre Punkt P kann es nicht sein, weil, wenn δ die kleinste der Entfernungen des Punktes P von den einzelnen Punkten der Menge ist (P selbst, wenn er ihr angehört, ausgenommen), ein Kreis mit dem Mittelpunkt P und von kleinerem Radius als δ

keinen von P verschiedenen, der Menge angehörenden Punkt einschließen kann.

5. Eine unendliche Punktmenge besitzt mindestens eine Grenzstelle.

Es können zwei Fälle eintreten: entweder gibt es ein Rechteck von endlichen Dimensionen, das alle Punkte der gegebenen Menge A in sich enthält, oder keines. Im zweiten Falle ist der unendlich ferne Punkt eine Grenzstelle der Punktmenge. Im ersten Falle wird, wenn man sich das Rechteck durch zwei Parallelen zu den Seiten in vier gleiche Rechtecke $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ geteilt denkt, mindestens eines der vier Rechtecke, etwa β_1, unendlich viele Punkte von A enthalten. Wird β_1 in derselben Weise in vier gleiche Rechtecke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ geteilt, so wird mindestens eines von diesen, etwa γ_1, unendlich viele Punkte von A enthalten usw. Die Koordinaten der Eckpunkte der Rechtecke $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \cdots$ in bezug auf zwei zu den Seiten von α parallele Achsen bilden zwei Klassenpaare, und der Punkt P, der deren Trennungselemente[1]) zu Koordinaten hat, liegt innerhalb aller dieser Rechtecke; ist also irgendwelche Umgebung von P gegeben, so läßt sich in der Folge von Rechtecken immer ein erstes finden, das darin enthalten ist[2]), so daß die Umgebung sicherlich unendlich viele Punkte von A einschließt. Folglich ist P eine Grenzstelle der gegebenen Punktmenge.

6. Die Gesamtheit aller Grenzstellen einer Menge A heißt die Ableitung von A und wird mit A' bezeichnet. Besteht die Menge A' aus unendlich vielen Punkten, so besitzt sie eine abgeleitete Menge A'', welche die zweite Ableitung von A genannt wird usf.

Wenn man nach einer endlichen Anzahl n von Ableitungen eine endliche Menge $A^{(n)}$ erhält, so sagt man, A ist von der ersten Gattung und von der Art n; im entgegengesetzten Falle heißt A von der zweiten Gattung.

Aus der Definition der abgeleiteten Menge folgt unmittelbar:

Wenn A in B enthalten ist, so ist auch A' in B' enthalten.

7. Wie auch die Menge A beschaffen sei, stets ist A'' in A' enthalten.

---

1) Über diese Begriffe siehe z. B. Vivanti, a. a. O., S. 17.

2) Nehmen wir z. B. als Umgebung von P einen Kreis mit dem Mittelpunkt P (s. Art. 1), so können wir in der Reihe der Rechtecke $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \cdots$ stets ein erstes Rechteck finden, dessen Diagonale kleiner ist als der Radius des Kreises, und da dieses Rechteck den Mittelpunkt P enthalten muß, so wird es (und ebenso alle folgenden) vollständig in dem Kreise enthalten sein.

Ist P irgend ein Punkt von A'' und wird um P als Mittelpunkt ein beliebig kleiner Kreis δ beschrieben, so liegen innerhalb desselben Punkte von A', die von P verschieden sind. Ist Q einer derselben und wird innerhalb δ um Q als Mittelpunkt ein Kreis ε beschrieben, der P nicht enthält, so liegen Punkte von A in ε. Daraus folgt, daß es innerhalb δ Punkte von A gibt, die von P verschieden sind; mithin ist P eine Grenzstelle von A und gehört demnach A' an.

8. Eine Menge heißt isoliert, wenn sie mit ihrer Ableitung keinen Punkt gemein hat; abgeschlossen, wenn sie ihre eigene Ableitung enthält; in sich dicht, wenn sie in ihr enthalten ist; perfekt, wenn sie mit ihrer eigenen Ableitung identisch ist.

Eine Menge heißt überall dicht in einem linearen oder ebenen Bereiche, wenn alle Punkte des Bereiches ihr zugehörige Grenzstellen sind, wenn es also keinen noch so kleinen linearen bezw. ebenen Teilbereich gibt, der nicht Punkte der Menge enthielte.

Eine Menge heißt zusammenhängend, wenn sich nach Wahl zweier beliebiger Punkte P, Q der Menge und nach Annahme einer beliebig kleinen Größe σ eine endliche Anzahl von Punkten $A_1, A_2, \cdots, A_n$ der Menge finden läßt, so daß die Strecken $PA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n, A_nQ$ sämtlich kleiner sind als σ.

Eine perfekte und zusammenhängende Menge heißt eine stetige Menge oder ein Kontinuum.

9. Jede zusammenhängende Menge ist in sich dicht.

Gäbe es nämlich einen Punkt P der Menge, welcher keine Grenzstelle derselben bildet, so würde sich um P als Mittelpunkt ein Kreis beschreiben lassen, der außer P keinen weiteren Punkt der Menge enthielte; ebendeswegen würde es nicht möglich sein, P mit einem andern Punkte der Menge durch eine gebrochene Linie wie die des vorigen Artikels zu verbinden, die aus Strecken bestünde, die kleiner wären als der Radius dieses Kreises.

10. Wenn eine Menge A in sich dicht ist, so ist ihre Ableitung eine perfekte Menge.

Da A in A' enthalten ist, so ist auch A' in A'' enthalten (Art. 6 am Ende). Nun ist A'' in A' enthalten (Art. 7), also ist $A' = A''$, d. h. A' ist perfekt.

11. Wenn eine perfekte Menge A eine abgeschlossene Menge A_1 als echten Bestandteil enthält, so ist die verbleibende Menge A_2 in sich dicht.

Ist P ein Punkt von A_2, so wird er, weil er A angehört, Grenz-

stelle von A und, da er es nicht von A_1 sein kann (weil alle Grenzstellen von A_1 ja A_1 angehören), auch von A_2 sein. Folglich ist A_2 in sich dicht[1]).

Mächtigkeit der Mengen.

12. Zwei Mengen haben, wie man sagt, gleiche Mächtigkeit oder sind äquivalent, wenn sich zwischen ihren Elementen (über deren Natur keine besondere Voraussetzung gemacht wird) eine eineindeutige und vollständige Beziehung, d. h. eine solche Beziehung herstellen läßt, daß jedem Elemente der einen von beiden Mengen ein und nur ein Element der andern entspricht und umgekehrt.

Damit dürfen wir behaupten, den Begriff der Mächtigkeit[2]) den Prinzipien der allgemeinen Größenlehre gemäß gebührend definiert zu haben.

Die Mächtigkeit einer Menge A bezeichnet man nach G. Cantor gewöhnlich mit $\overline{\overline{A}}$; die beiden darüber gesetzten Striche sollen andeuten, daß man ebenso von der Natur wie von der Ordnung der Elemente absieht.

Der von uns eingeführte Begriff der Gleichheit von Mächtigkeiten besitzt, wie man sich leicht überzeugen kann, die beiden charakteristischen Eigenschaften der Gleichheit überhaupt, nämlich:

a) Wenn ein Ding einem andern gleich ist, so ist das zweite dem ersten gleich.

b) Zwei Dinge, die einem dritten gleich sind, sind untereinander gleich[3]).

Die Äquivalenz zweier Mengen A_1, A_2 wird folgendermaßen bezeichnet:

$$A_1 \sim A_2,$$

während die Bezeichnung $A_1 = A_2$ angibt, daß die beiden Mengen identisch, d. h. aus denselben Elementen gebildet sind.

Die Mächtigkeit einer Menge wird auch ihre Kardinalzahl genannt, so daß alle äquivalenten Mengen dieselbe Kardinalzahl haben.

---

1) Die in diesem Kapitel entwickelten Definitionen und Sätze lassen sich unmittelbar auf Punktmengen im n-dimensionalen euklidischen Raume übertragen.

2) Vgl. Bettazzi, Teoria delle grandezze, S. 3—7, Pisa, Spoerri, 1890. — Die Definition der Mächtigkeit gehört zu denjenigen, welche die Logiker Definitionen durch Abstraktion nennen. S. Burali-Forti, Logica matematica, S. 140, Mailand, Hoepli, 1894.

3) Die Eigenschaft: Jedes Ding ist sich selbst gleich, ist eine Folge von a) und b).

Die Kardinalzahl einer endlichen Menge wird mittelst des Zeichens angegeben, welches die Anzahl ihrer Elemente darstellt; das ist deshalb zulässig, weil zwei endliche Mengen immer und nur dann äquivalent sind, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

13. Sind A, B zwei Mengen ohne gemeinsames Element, so wird die Gesamtheit ihrer Elemente mit (A, B) oder gewöhnlich mit $A+B$ bezeichnet. Die Kardinalzahl der Menge $A+B$ (Vereinigungsmenge von A und B nach Cantor) wird als die Summe der Kardinalzahlen von A und von B definiert, und man schreibt:

$$\overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}.$$

Analog verfährt man bei einer größeren Anzahl von Mengen.

Die Operation, durch welche aus mehreren gegebenen Kardinalzahlen ihre Summe gebildet wird, heißt Addition.

Setzt man $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{b}$, $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{c}$, so gilt offenbar:

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a},$$

d. h.: Die Addition der Kardinalzahlen besitzt die assoziative und die kommutative Eigenschaft.

14. Sind A, B zwei beliebige Mengen, so bezeichnet man mit $A \cdot B$ (Verbindungsmenge von A und B) die Gesamtheit der Paare, die man erhält, wenn man jedwedes Element von A mit jedwedem Elemente von B verbindet. Die Kardinalzahl von $A \cdot B$ wird als das Produkt der Kardinalzahlen von A und von B definiert, und man schreibt:

$$\overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}.$$

Analog verfährt man bei einer größeren Anzahl von Mengen.

Die Operation, durch welche aus mehreren gegebenen Kardinalzahlen ihr Produkt gebildet wird, heißt Multiplikation.

Offenbar gilt, unter Anwendung der früheren Bezeichnungen:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\,\mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c},$$

d. h.: Die Multiplikation der Kardinalzahlen besitzt die assoziative, die kommutative und die distributive Eigenschaft.

15. Es läßt sich leicht bestätigen, daß, wenn A und B endliche Mengen sind, die Addition und die Multiplikation der entsprechenden

Kardinalzahlen auf die gewöhnliche Addition und Multiplikation positiver ganzer Zahlen hinausläuft. Wenn $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{b}$ ist, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ endliche Zahlen sind, so ist tatsächlich die Anzahl der Elemente der Menge $A + B$, die aus allen ihren Elementen, zusammengenommen, gebildet wird, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, und ebenso ist die Anzahl der Paare, die aus einem Elemente von A und einem von B gebildet werden, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Ist A endlich ($\overline{\overline{A}} = n$) und B unendlich, so ist AB die Gesamtheit der Elemente von B, wenn jedes n-mal wiederholt wird, d. h.:

$$nB = \overset{1}{\breve{B}} + \overset{2}{\breve{B}} + \cdots + \overset{n}{\breve{B}}.$$

16. Weniger einfach ist die Ausdehnung des Begriffs der Potenz auf unendliche Mengen.

Sind A, B zwei beliebige Mengen, so kann man die Elemente von B auf mannigfache Arten durch eventuell nicht lauter verschiedene Elemente von A ersetzen; die Gesamtheit dieser verschiedenen Arten wird mit A^B (Belegungsmenge von B mit A) bezeichnet, und man schreibt:

$$\overline{\overline{A^B}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}},$$

wo $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{b}$ gesetzt ist.

Sind A und B endlich, so ist A^B die Gesamtheit der Anordnungen von $\mathfrak{a}$ Elementen in $\mathfrak{b}$ Stellen mit Wiederholung, eine Zahl, welche genau $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ ist.

Ist A unendlich, B endlich, so ist A^B die Gesamtheit der Anordnungen der Elemente von A in $\mathfrak{b}$ Stellen mit Wiederholung, also (Art. 14) das Produkt von $\mathfrak{b}$ Faktoren, die gleich A sind.

Welcher Art nun auch die Mengen A, B, C sind, stets gelten die drei Beziehungen:

a) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}};$$

in der Tat liefern uns alle Arten, die Elemente von B durch Elemente von A zu ersetzen, kombiniert mit allen Arten, die Elemente von C durch Elemente von A zu ersetzen, alle Arten, die Elemente von $B + C$ durch Elemente von A zu ersetzen;

b) $$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}};$$

in der Tat liefern alle Arten, die Elemente von C durch Elemente von A zu ersetzen, kombiniert mit allen Arten, die Elemente von C durch Elemente von B zu ersetzen, alle Arten, die Elemente von C durch Elementenpaare von A und B zu ersetzen;

c) $$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\ \mathfrak{c}};$$

die Menge der Anordnungen der Elemente von A, die man erhält, wenn man die Elemente der Menge $B \cdot C$ durch Elemente von A ersetzt, ist in der Tat dieselbe, zu welcher man gelangen würde, wenn man zuerst Elemente von A an die Stelle der Elemente von B setzte und dann die Elemente von C durch Anordnungen ersetzte, die man unter den so erhaltenen vorgenommen.

17. Die einfachste unendliche Menge, die sich uns zur Untersuchung darbietet, ist die durch alle natürlichen Zahlen gebildete; wir bezeichnen sie mit N.

Wir nennen jede Menge abzählbar, welche die gleiche Mächtigkeit besitzt wie N.

Die Kardinalzahl der abzählbaren Mengen wird gewöhnlich nach G. Cantor mit $\aleph_0$ bezeichnet.

18. Jede unendliche Menge enthält eine abzählbare Menge.

Die charakteristische Eigenschaft, auf Grund welcher wir von einer Menge sagen, sie sei unendlich, ist folgende (Art. 2): Nimmt man von ihr jede beliebige endliche Anzahl von Elementen weg, so verbleiben immer noch andere. Hat man also von der gegebenen Menge A ein Element a_1 weggenommen, so kann man ein zweites a_2 und dann ein drittes a_3 wegnehmen, und dieses Verfahren läßt sich unbegrenzt fortsetzen. Nun ist die Menge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ abzählbar, da zwischen ihr und N eine eineindeutige und vollständige Beziehung entsteht, wenn man für eine beliebige ganze Zahl r dem Elemente a_r der ersten das Element r der zweiten zuordnet.

19. Sind zwei Mengen äquivalent und nimmt man von jeder von ihnen irgend ein Element weg, so sind die verbleibenden Mengen wiederum äquivalent.

Die beiden Mengen seien A, B; man nehme von ihnen beziehentlich die Elemente a, b weg. Die verbleibenden Mengen bezeichne man mit C, D und schreibe:

$$A = a + C, \quad B = b + D.$$

Entsprechen sich a und b zufolge der Beziehung, welche die Äquivalenz von A und B begründet, so begründet ebendiese Beziehung offenbar die Äquivalenz von C und D. Entsprechen sie sich nicht, so möge in A das Element a_1 dem Element b, in B das Element b_1 dem Element a entsprechen, und man schreibe:

$$C = a_1 + E, \quad D = b_1 + F.$$

Die Elemente von E und von F entsprechen einander mit Rücksicht auf die von vornherein festgesetzte Beziehung; betrachtet man nun überdies die Elemente a_1 und b_1 als sich gegenseitig entsprechend, so ist damit die Äquivalenz der Mengen C, D festgestellt.

20. Kein endlicher (echter) Bestandteil einer Menge kann der Menge selbst äquivalent sein.

Sei

$$A_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ein endlicher (echter) Bestandteil einer Menge A, und es werde $A \sim A_1$ vorausgesetzt. Nimmt man von A und A_1 das gemeinsame Element a_1 weg, so erhält man abermals zwei äquivalente Mengen (Art. 19); ebenso, wenn man nach und nach a_2, a_3 usw. wegnimmt. Hat man aber dieses Verfahren n-mal wiederholt, so wird einerseits eine Menge verbleiben, welche sicher noch überhaupt Elemente enthält (alle diejenigen Elemente von A nämlich, die nicht A_1 angehören), andrerseits aber eine Menge, welche keins mehr enthält; es kann zwischen ihnen sonach keine Äquivalenz bestehen. Folglich ist die gemachte Voraussetzung absurd.

21. Jede in einer endlichen Menge enthaltene Menge ist endlich.

Sind

(1) $$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

die Elemente der endlichen Menge A, so können wir alle diese Elemente mittelst n Operationen O_1, $O_2, \cdots, O_n$ nach und nach wegnehmen. Von den Elementen a mögen einige einer bestimmten, in A enthaltenen Menge B angehören; sind diese in der Ordnung, in der sie in der Reihe (1) vorkommen, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots$, so werden sie nach und nach mittelst der Operationen $O_{i_1}, O_{i_2}, \cdots$ weggenommen werden können, deren Anzahl offenbar endlich ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

22. Unter Berücksichtigung des Art. 21 folgt aus Art. 20 als besonderer Fall: Eine endliche Menge kann keinem ihrer Bestandteile äquivalent sein[1]).

---

1) Dem unbewanderten Leser, der versucht sein könnte, einige der hier aufgestellten Ergebnisse für axiomatisch und demnach die betreffenden Beweise für überflüssig zu halten, möchten wir raten, erst ein wenig tiefer in diesen verfänglichen und schwierigen Teil der Analysis einzudringen. Er wird dann sehr bald innewerden, daß einige der Eigenschaften, die man irrtümlicherweise für logische Axiome anzusehen pflegt, ihre Geltung verlieren, sobald man von endlichen Mengen zu unendlichen übergeht. Man lese z. B. gleich den weiteren Fortgang dieses Artikels.

Diesem Satze steht der folgende gegenüber:

Jede unendliche Menge enthält einen echten Bestandteil von gleicher Mächtigkeit[1]).

Ist A eine unendliche Menge und sind $a_1, a_2, \cdots$ die Elemente einer in ihr enthaltenen abzählbaren Menge A_1, so schreiben wir:

$$A = A_1 + B$$

und bezeichnen ferner mit A_2 die Menge, die man erhält, wenn man von A_1 das Element a_1 wegnimmt. Zwischen der Menge A und der in ihr enthaltenen Menge $A_3 = A_2 + B$ läßt sich folgendermaßen eine eineindeutige und vollständige Beziehung herstellen: den Elementen B von A ordnet man in A_3 dieselben Elemente zu; den Elementen $a_1, a_2, \cdots$ von A ordnet man die Elemente $a_2, a_3, \cdots$ von A_3 zu. Damit ist die Äquivalenz von A mit der ihr zugehörigen Teilmenge A_3 festgestellt.

23. Sind zwei unendliche Mengen von der Art, daß jede von ihnen eine der andern äquivalente Teilmenge enthält, so sind sie selbst einander äquivalent. (Äquivalenzsatz[2]).

A, B seien die beiden Mengen, A_1, B_1 Teilmengen derselben, so daß:

$$A \sim B_1, \quad B \sim A_1.$$

A_2 sei der Bestandteil von A_1, der mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen A_1 und B der Teilmenge B_1 von B entspricht; dann ist:

$$A_2 \sim B_1 \sim A.$$

A_3 sei der Bestandteil von A_2, der mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen A_2 und A der Teilmenge A_1 von A entspricht; dann ist:

$$A_3 \sim A_1$$

usf. Jede der Mengen $A, A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$ enthält alle folgenden, und wir können setzen:

$$A = A_1 + C_1, \quad A_1 = A_2 + C_2, \quad \cdots.$$

Weil jede der Mengen $A_1, A_2, \cdots$ der einen oder der andern der unendlichen Mengen A, B äquivalent ist, so bestehen sie alle

---

1) Diese Eigenschaft wird von verschiedenen Autoren als Definition der unendlichen Mengen betrachtet.

2) Dieser wichtige, von G. Cantor ausgesprochene Satz ist von Schröder 450, Bernstein 25 und Zermelo 523 bewiesen worden.

aus unendlich vielen Elementen, und ihre allmähliche Bildung läßt sich unbegrenzt fortsetzen. Bezeichnet man mit D die Gesamtheit der allen diesen Mengen gemeinsamen Elemente (sie kann gegebenenfalls auch Null sein), so hat man:

$$A = D + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \cdots,$$
$$A_1 = D + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + \cdots.$$

Weil nun mit Rücksicht auf die zwischen A und A_2 vorhandene Beziehung deren bezügliche Bestandteile A_1, A_3 einander entsprechen, so wird dasselbe für die verbleibenden Teilmengen C_1, C_3 statthaben; es ist deshalb:

$$C_1 \sim C_3.$$

Analog ist allgemein:

$$C_r \sim C_{r+2}.$$

Schreibt man also den Ausdruck für A in der Form:

$$A = D + C_2 + C_1 + C_4 + C_3 + \cdots$$

und vergleicht ihn mit demjenigen für A_1, so sieht man, daß schließlich jede der beiden Mengen A, A_1 in eine abzählbare Gesamtheit von Teilmengen zerlegt erscheint, und daß die Mengen, die sich in beiden Zerlegungen der Reihe nach entsprechen, entweder identisch oder äquivalent sind. Daraus folgt:

$$A \sim A_1$$

und mithin:

$$A \sim B.$$

24. Umgekehrt: *Wenn zwei unendliche Mengen A, B äquivalent sind, so enthält jede von ihnen eine der andern äquivalente Teilmenge.*

In der Tat kann man zwei Teilmengen derselben A_1, B_1 derart bestimmen, daß (Art. 22):

$$A_1 \sim A, \quad B_1 \sim B;$$

nun ist:

$$A \sim B,$$

folglich:

$$A_1 \sim B, \quad B_1 \sim A.$$

25. Sind A, B zwei Mengen von der Art, daß A einen B äquivalenten Bestandteil enthält, ohne daß das Umgekehrte statthat, so besitzen A und B nicht gleiche Mächtigkeit (Art. 24).

Wir sagen in diesem Falle, die Mächtigkeit von A sei *größer*

als die von B, oder auch, die Mächtigkeit von B sei **kleiner** als die von A[1]). Es läßt sich leicht zeigen, daß die so eingeführten Begriffe „größer" und „kleiner" bezüglich der **Mächtigkeit** folgende drei charakteristische Eigenschaften besitzen (wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ usf. Mächtigkeiten bezeichnen):

a) Wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$.

b) Wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, so folgt: $\mathfrak{a}' > \mathfrak{b}'$.

c) Wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$.

26. Die Mächtigkeit einer Menge ist größer oder gleich der jeder in ihr enthaltenen Menge.

Ist A die gegebene Menge, A_1 ein Bestandteil derselben, so läßt sich in A eine Teilmenge angeben, die mit A_1 äquivalent, ja sogar identisch ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hieraus und aus Art. 18 folgt:

Die unendlichen Mengen, welche die kleinstmögliche Mächtigkeit besitzen, sind die abzählbaren Mengen.

In Zeichen hat man für jede beliebige unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} \geqq \aleph_0 .$$

Ebendeshalb nennt man die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen die **erste Mächtigkeit.**

Es ergibt sich also:

Jede unendliche Menge, die in einer abzählbaren Menge enthalten ist, ist abzählbar.

Beachtet man weiter, daß jede unendliche Menge für jede beliebige positive, ganze Zahl n offenbar Teilmengen von n Elementen enthält, so hat man für jede beliebige unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ und jede endliche Zahl n:

$$\mathfrak{a} > n .$$

---

1) Man könnte auf den ersten Blick glauben, es müsse, wenn zwei Mengen A, B gegeben sind, notwendigerweise einer der in Betracht gezogenen Fälle eintreten: entweder enthält jede von ihnen einen der andern äquivalenten Bestandteil, oder A enthält einen B äquivalenten, oder B einen A äquivalenten Bestandteil. Gleichwohl läßt sich ein vierter Fall denken: keine der beiden Mengen enthält einen der andern äquivalenten Bestandteil. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn A, B aus derselben endlichen Anzahl von Elementen gebildet sind; sie sind dann äquivalent. Die Frage, ob dieser vierte Fall auch für unendliche Mengen eintreten kann, in welchem Falle die beiden Mengen nicht äquivalent sein würden, ist noch nicht vollständig erledigt. Müßte man sie im bejahenden Sinne entscheiden, so würde die Klasse ihrer Mächtigkeiten insofern eine Singularität zeigen, als von zwei Mächtigkeiten die eine weder der andern gleich noch größer oder kleiner als sie sein könnte (s. Borel 46, S. 103). Cantor (Math. Ann., Bd. 46, S. 484) behauptet, ohne es aber zu beweisen, daß dies unmöglich sei. — Über diesen Gegenstand s. Bernstein 25.

27. Wenn die Menge A_1 in der Menge A, die Menge A_2 aber in der Menge A_1 enthalten ist, und wenn A_2 äquivalent A ist, so ist auch A_1 äquivalent A.

In der Tat hat man (Art. 26):

$$\overline{\overline{A}} \geqq \overline{\overline{A}}_1,$$
$$\overline{\overline{A}}_1 \geqq \overline{\overline{A}}_2,$$

überdies der Annahme nach:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}_2,$$

woraus folgt:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}_1.$$

28. Die Summe einer abzählbaren Menge und einer endlichen Menge ist eine abzählbare Menge.

$A\,(a_1, a_2, \cdots)$ sei eine abzählbare, $B\,(b_1, b_2, \cdots)$ eine endliche Menge. Ordnet man den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ die Elemente $b_1, b_2, \cdots, b_n$, den Zahlen $n+1, n+2, \cdots$ die Elemente $a_1, a_2, \cdots$ zu, so ersieht man, daß die Menge $A + B$ abzählbar ist.

In Zeichen:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0.$$

29. Die Summe zweier abzählbaren Mengen ist eine abzählbare Menge.

$A\,(a_1, a_2, \cdots)$, $B\,(b_1, b_2, \cdots)$ seien die beiden Mengen. Ordnet man dem Elemente a_r die Zahl $(2r-1)$, dem Elemente b_r die Zahl $2r$ zu, so gelingt es, zwischen der Menge $A + B$ und der Menge N eine eineindeutige und vollständige Beziehung herzustellen. Damit ist die Behauptung bewiesen. In Zeichen:

$$2\aleph_0 = \aleph_0,$$

und noch allgemeiner:

$$n\aleph_0 = \aleph_0.$$

30. Die aus den Elementen einer abzählbaren Menge abzählbarer Mengen gebildete Menge ist abzählbar.

Ist die abzählbare Menge:

$$A_1, A_2, \cdots$$

abzählbarer Mengen gegeben, deren Elemente beziehentlich:

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \cdots, \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

sind, so kann man diese Elemente folgendermaßen in eine einfache Reihe ordnen:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{13},\ a_{22},\ a_{31},\ \cdots,$$

also in der Weise, daß die Elemente nach dem steigenden Werte der Summe der Indices geordnet auftreten, und daß die Elemente, bei denen diese Summe gleich ist, nach dem steigenden Werte des ersten Index geordnet werden. Ordnet man jedem Elemente die Zahl zu, die den Platz bezeichnet, den es in der Reihe einnimmt, so ergibt sich der Beweis der Behauptung.

In Zeichen:

$$\aleph_0^{\,2} = \aleph_0 .$$

31. Wendet man diesen Satz mehrmals nacheinander an, so läßt sich behaupten:

Die Elemente $a_{r_1 r_2 \cdots r_n}$, in denen an Stelle der n Indices beziehentlich alle Elemente von n abzählbaren Mengen gesetzt werden sollen, bilden eine abzählbare Menge.

In Zeichen:

$$\aleph_0^{\,n} = \aleph_0 .$$

32. Die Mächtigkeit einer nicht abzählbaren Menge ändert sich nicht, wenn man von ihr eine abzählbare Menge wegnimmt.

A sei eine nicht abzählbare Menge, B eine in ihr enthaltene (Art. 18) abzählbare Menge. Setzt man:

$$A = B + C,$$

so ist die Menge C nicht abzählbar, weil ja, wenn sie es wäre, A es auch sein würde (Art. 29). D sei eine in C (Art. 18) enthaltene abzählbare Menge; setzt man:

$$C = D + E,$$

so ist E nicht abzählbar. Zwischen den Mengen:

$$A = B + D + E, \quad C = D + E$$

läßt sich folgendermaßen eine eineindeutige und vollständige Beziehung herstellen: den Elementen von E in A ordnet man dieselben Elemente in C, den Elementen der abzählbaren Menge $B + D$ (Art. 29) in A diejenigen der abzählbaren Menge D in C zu. Folglich ist $A \sim C$.

In Zeichen:

$$\text{Wenn } \mathfrak{a} > \aleph_0, \text{ so ist } \mathfrak{a} + \aleph_0 = \mathfrak{a}.$$

Besondere Mengen.

33. Die Menge R aller rationalen Zahlen ist abzählbar.

Die abzählbare Menge (Art. 30):

$$\begin{array}{l} \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \cdots, \\ \pm \frac{2}{1}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{2}{3}, \cdots, \\ \pm \frac{3}{1}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{3}, \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

enthält alle Elemente von R (und überdies jedes von ihnen sogar unendlich viele Male wiederholt); folglich ist (Art. 26) R abzählbar.

34. Die Menge S aller algebraischen reellen Zahlen ist abzählbar.

Als algebraische reelle Zahl bezeichnet man jede reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Unter allen Gleichungen von dieser Form, denen eine vorgegebene algebraische reelle Zahl genügt, gibt es eine vom niedrigsten Grade, und zwar, wie man aus der Algebra weiß, nur eine einzige, indem man zwei Gleichungen, die sich nur um einen konstanten Faktor von einander unterscheiden, als identisch betrachtet. Der Grad dieser Gleichung heißt der Grad der algebraischen Zahl.

Sei demgemäß:

$$x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_{n-1} x + r_n = 0$$

eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten, wobei der erste Koeffizient $= 1$ angenommen werden kann; sei ferner $A_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ die endliche Menge der reellen Zahlen, die Wurzeln dieser Gleichung, aber keiner andern von niedrigerem Grade sind. Nimmt man für $r_1, r_2, \cdots, r_n$ alle möglichen rationalen Werte, so erhält man dementsprechend unendlich viele Mengen $A_{r_1 r_2 \cdots r_n}$, die in ihrer Gesamtheit alle algebraischen reellen Zahlen vom Grade n, und zwar jede nur einmal, enthalten. Die Gesamtheit dieser endlichen Mengen $A_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ ist abzählbar (Art. 31, 33), folglich ist (Art. 30) die Gesamtheit ihrer Elemente, d. h. die Menge der algebraischen reellen Zahlen vom Grade n, abzählbar. Schließlich ergibt sich der Beweis des Satzes, wenn man n alle ganzen und positiven Werte annehmen läßt und nochmals den Art. 30 in Anwendung bringt.

35. Die Menge T aller in irgend einem Intervall enthaltenen reellen Zahlen ist nicht abzählbar.

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir fest, daß es sicherlich, wenn man irgend eine abzählbare Menge von Elementen von T:

$$(A) \qquad a_1, a_2, \cdots$$

annimmt, Elemente von T gibt, die ihr nicht angehören.

Sind a_{k_1}, a_{k_2} die beiden ersten der in dem Intervalle $a_1 a_2$ enthaltenen Zahlen der Reihe (A) und ist $k_1 < k_2$, so ist das Intervall $a_{k_1} a_{k_2}$ in $a_1 a_2$ enthalten und kann folglich keine Zahl von niedrigerem Index als k_2 in sich fassen. Sind a_{k_3}, a_{k_4} die beiden ersten der im Intervall $a_{k_1} a_{k_2}$ enthaltenen Zahlen der Reihe und setzt man $k_3 < k_4$ voraus, so ist:

$$k_1 \geqq 3, \quad k_2 \geqq 4, \quad k_3 \geqq 5, \cdots.$$

Fährt man in derselben Weise fort, so erhält man eine Reihe von Intervallen:

$$a_1 a_2, \; a_{k_1} a_{k_2}, \; a_{k_3} a_{k_4}, \; a_{k_5} a_{k_6}, \cdots,$$

von denen jedes in dem vorangehenden enthalten und von der Art ist, daß:

$$k_r \geqq r + 2$$

ist und $a_{k_{2r-1}} a_{k_{2r}}$ lediglich Zahlen von höherem Index als $2r + 2$ enthalten kann. Die Reihe:

$$a_1 \; a_{k_1} \; a_{k_3} \; a_{k_5} \cdots$$

ist steigend, die Reihe:

$$a_2 \; a_{k_2} \; a_{k_4} \; a_{k_6} \cdots$$

fallend, und die Elemente der ersten sind kleiner als die entsprechenden der zweiten; folglich besitzt jede der beiden Reihen eine Grenzstelle, und die Grenzstelle p der ersten ist kleiner oder gleich der Grenzstelle q der zweiten. Das Intervall pq (das sich übrigens gegebenenfalls auf eine einzige Zahl beschränken kann) enthält keine Zahl der Reihe (A). Enthielte es daraus nämlich ein a_h, so könnte a_h, wenn man nur r so bestimmt, daß $2r + 2$ nicht kleiner ist als h, nicht in dem Intervall $a_{k_{2r-1}} a_{k_{2r}}$ vorkommen, während es doch dem Intervall pq angehört, das innerhalb dieses liegt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

36. Der vorstehende Satz läßt sich geometrisch auch so ausdrücken:

Die Gesamtheit aller Punkte einer beliebigen geradlinigen Strecke besitzt eine höhere Mächtigkeit als die erste.

Man kann ebenso zeigen:

Die Gesamtheit aller Punkte eines beliebigen krummlinigen Bogens besitzt eine höhere Mächtigkeit als die erste.

Es ergibt sich ferner unmittelbar:

Die Gesamtheit aller Punkte eines 2- (oder n-) dimensionalen Bereichs besitzt eine höhere Mächtigkeit als die erste.

37. Verbindet man den Satz des Art. 35 mit den Sätzen der Art. 32 und 33, so erhält man das Theorem:

Die Gesamtheit I aller irrationalen, in einem beliebigen Intervall enthaltenen Zahlen hat dieselbe Mächtigkeit wie die Gesamtheit der reellen, in demselben Intervall enthaltenen Zahlen.

38. Hat man in einer Ebene zwei beliebige endliche oder nicht endliche Strecken ab, cd und projiziert man sie vom Schnittpunkte der ac, bd aus aufeinander, so entsteht zwischen ihren Punkten eine eineindeutige, vollständige Beziehung. Folglich gilt der Satz:

Die Gesamtheit der reellen, in einem beliebigen Intervall enthaltenen Zahlen (oder der Punkte einer beliebigen Strecke) hat stets dieselbe Mächtigkeit. Man nennt sie die Mächtigkeit des linearen Kontinuums.

Demgemäß läßt sich der Satz des Art. 37 auch so ausdrücken:

Die Gesamtheit der irrationalen, in einem beliebigen Intervall enthaltenen Zahlen besitzt die Mächtigkeit des linearen Kontinuums.

39. Aus den Art. 31, 33 folgt:

Die Gesamtheit der Punkte irgend eines ebenen Bereichs, deren kartesische Koordinaten beide rational sind, ist abzählbar.

40. Die Gesamtheit der Punkte eines ebenen Bereichs, deren kartesische Koordinaten beide irrational sind, hat dieselbe Mächtigkeit wie die Gesamtheit aller Punkte des Bereichs.

Wir betrachten der Einfachheit wegen das Quadrat mit den Eckpunkten (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Werden die Punkte des Quadrats allgemein mit a_{t_1, t_2} (t_1, t_2 sind die Koordinaten des Punktes a_{t_1, t_2}), die darin enthaltenen Punkte mit irrationalen Koordinaten mit a_{i_1, i_2} bezeichnet, so werden die Indices t_1, t_2 alle Werte annehmen, die in der Gesamtheit T der reellen, zwischen 0 und 1 vorhandenen Zahlen enthalten sind, die Indices i_1, i_2 dagegen alle Werte, die in der Gesamtheit I der irrationalen, zwischen 0 und 1 vorhandenen Zahlen enthalten sind. Nun ist (Art. 37) $T \sim I$, folglich läßt sich zwischen

der Gesamtheit der Werte t_1 (oder t_2) und der Gesamtheit der Werte i_1 (oder i_2) eine eineindeutige, vollständige Beziehung herstellen. Eine ähnliche Beziehung läßt sich dann zwischen den Wertepaaren (t_1, t_2), (i_1, i_2) und folglich zwischen den Punkten a_{t_1, t_2}, a_{i_1, i_2} herstellen.

41. Nimmt man in der Ebene irgend zwei endliche Bereiche A, B, so läßt sich stets durch eine Ähnlichkeitstransformation aus A ein Bereich A_1 gewinnen, der B in sich enthält, und analog aus B ein Bereich B_1 ableiten, der A in sich enthält. Bezeichnen wir jetzt mit A, B usw. die Gesamtheit der in den betreffenden Bereichen enthaltenen Punkte, so hat man:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A_1}}, \quad \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B_1}},$$

außerdem (Art. 26):

$$\overline{\overline{A_1}} \geqq \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{B_1}} \geqq \overline{\overline{A}}.$$

Daraus folgt:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

Also haben die Mengen der Punkte irgend zweier endlichen Bereiche gleiche Mächtigkeit.

Ferner läßt sich ein Kreis A vom Radius 1 Punkt für Punkt in die ganze Ebene, die wir mit C bezeichnen wollen, in der Weise transformieren, daß man die Punkte des Kreisumfanges vom Radius $r < 1$ auf diejenigen des Kreisumfanges vom Radius $r' = \frac{r}{1-r}$ bezieht; die Beziehung hört nur für die Punkte des Kreisumfanges vom Radius 1 auf eindeutig zu sein, da diese sämtlich dem Unendlichkeitspunkte entsprechen. Daraus folgt:

$$\overline{\overline{C}} \leqq \overline{\overline{A}},$$

also (Art. 26) mit Rücksicht darauf, daß A in C eingeschlossen ist:

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}.$$

Ist D irgend ein unendlicher, B ein endlicher, darin enthaltener Bereich, so hat man schließlich:

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}, \quad \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}, \quad \overline{\overline{C}} \geqq \overline{\overline{D}} \geqq \overline{\overline{B}},$$

folglich (Art. 26):

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{B}}.$$

Daraus kann man schließen:

Die Gesamtheit aller Punkte irgend eines ebenen endlichen oder unendlichen Bereichs besitzt stets dieselbe Mächtigkeit. Sie kann als die *Mächtigkeit des 2-dimensionalen Kontinuums* bezeichnet werden.

Der Satz des vorhergehenden Artikels läßt sich nun auch so ausdrücken:

Die Menge aller Punkte eines ebenen Bereichs mit irrationalen Koordinaten besitzt die Mächtigkeit des 2-dimensionalen Kontinuums.

42. Wir werden jetzt folgenden Satz beweisen:

Die Gesamtheit der Punkte einer Strecke und die Gesamtheit der Punkte eines ebenen Bereichs besitzen dieselbe Mächtigkeit.

Wir nehmen als Strecke das Intervall $\overline{01}$ der Abscissenachse, als ebenen Bereich das Quadrat des Art. 40 und bezeichnen ersteres mit A, letzteres mit B. C sei die Gesamtheit der Punkte a_t von A mit der irrationalen Abscisse t, D die Gesamtheit der Punkte b_{u_1, u_2} von B mit den irrationalen Koordinaten u_1, u_2. Weil sich nun jede irrationale Zahl nur auf eine Art in einen unendlichen Kettenbruch entwickeln läßt, so hat man nach Dirichlets Bezeichnung:

$$t = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots).$$

Als dem Punkte a_t von C, wo t den vorstehenden Ausdruck hat, entsprechend läßt sich demgemäß der Punkt b_{u_1, u_2} von D ansehen, wo:

$$u_1 = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \cdots), \quad u_2 = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \cdots),$$

und umgekehrt, als dem Punkte b_{u_1, u_2} von D, wo:

$$u_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \cdots), \quad u_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \cdots),$$

entsprechend der Punkt a_t von C, wo:

$$t = (\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{12}, \beta_{22}, \cdots).$$

Damit ist zwischen C und D eine eineindeutige und vollständige Beziehung hergestellt; daraus folgt:

$$C \sim D.$$

Nun ist andrerseits (Art. 37, 40):

$$A \sim C, \quad B \sim D,$$

folglich:

$$A \sim B.$$

43. Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeit auf Punktmengen in einem linearen Raume von beliebiger Dimensionszahl übertragen. Man kann also behaupten:

Die Gesamtheit aller Punkte eines m-dimensionalen Bereichs und die aller Punkte eines n-dimensionalen Bereichs, wo $m \neq n$, besitzen dieselbe Mächtigkeit, die wir einfach die Mächtigkeit des Kontinuums[1]) nennen können.

Eine andre Form, unter welcher dieselben Ergebnisse dargestellt werden können, ist folgende:

Die Elemente $a_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ bilden, wenn einer der Indices alle Elemente einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums durchläuft, die andern aber alle Elemente von Mengen mit gleicher oder geringerer Mächtigkeit als der des Kontinuums durchlaufen, eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums.

44. Die Sätze der Art. 42, 43 lassen sich noch auf einem anderen Wege beweisen, der sogar zu einer Verallgemeinerung derselben führt.

Alle zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Zahlen lassen sich folgendermaßen in Form von Dezimalbrüchen darstellen:

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots,$$

wo $a_1, a_2, a_3, \cdots$ die Werte $0, 1, 2, \cdots, 9$ annehmen können. Jedem Systeme von Zahlen a_i entspricht ein einziger Wert von x; jedem irrationalen Werte von x entspricht ein einziges System von Zahlen a_i; jedem rationalen Werte eins oder höchstens zwei[2]). Nun hat die

---

1) Dieses Ergebnis könnte die Bedeutung des Begriffs der Dimensionszahl erheblich zu vermindern und gewissermaßen den Unterschied zwischen den Funktionen von einer und denjenigen von mehreren Veränderlichen aufzuheben scheinen. Indes verliert dies seine Geltung, sobald man die Stetigkeit berücksichtigt. Tatsächlich ist ja die eineindeutige, vollständige Beziehung, welche sich zwischen den Punkten zweier Bereiche von verschiedener Dimensionszahl herstellen läßt, notwendigerweise diskontinuierlich; unendlich nahen Punkten des einen Bereichs entsprechen ja nicht immer auch unendlich nahe Punkte des andern.

Ich gebe hier einen der vielen Beweise wieder, welche für diesen wichtigen Satz geliefert worden sind, indem ich mich auf die Korrespondenz zwischen der Strecke A und dem Quadrate B des Art. 42 beziehe.

Werden in dem Quadrate B alle Parallelen zur Abscissenachse gezogen, so wird die Gesamtheit aller Punkte einer von ihnen, wenn die Beziehung stetig ist, der Gesamtheit aller Punkte einer Strecke von A entsprechen; jeder Parallele in B wird eine Strecke in A entsprechen, und alle diese Strecken schliessen einander aus. Nun hat die Gesamtheit der Parallelen offenbar die Mächtigkeit des Kontinuums, die Gesamtheit der in A enthaltenen Strecken aber ist zufolge eines Satzes, den wir weiter unten (Art. 47) beweisen werden, abzählbar; das erhaltene Ergebnis ist folglich absurd, und die Beziehung kann nicht stetig sein.

2) Dieser Fall tritt für die durch einen endlichen Dezimalbruch dargestellten Zahlen ein. Man kann nämlich, wenn:

Gesamtheit der durch vorstehende Formel dargestellten Zahlen (Art. 16) die Kardinalzahl $10^{\aleph_0}$; bezeichnet man also mit $\aleph$ die Mächtigkeit des linearen Kontinuums, so ist, wenn man bedenkt, daß die rationalen Zahlen eine abzählbare Menge bilden (Art. 33):

$$\aleph + \aleph_0 = 10^{\aleph_0},$$

mithin (Art. 32, 35):

$$\aleph = 10^{\aleph_0}.$$

Offenbar darf man anstatt 10 irgend eine andere endliche Zahl n nehmen, so daß:

$$\aleph = n^{\aleph_0}.$$

Demnach hat man, wenn m irgend eine endliche Zahl ist (Art. 29):

$$\aleph^m = \left(n^{\aleph_0}\right)^m = n^{m\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph;$$

das ist aber der Satz des Art. 43, welcher auch den des Art. 42 umfaßt.

Ferner ist (Art. 30):

$$\aleph^{\aleph_0} = \left(n^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = n^{\aleph_0{}^2} = n^{\aleph_0} = \aleph;$$

d. h.: Die Gesamtheit der Punkte eines Bereichs, dessen Dimensionen eine abzählbare Menge bilden, besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

45. Die Menge aller stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Da eine stetige Funktion bestimmt ist, wenn die Werte gegeben sind, die sie für die rationalen Werte der unabhängigen Veränderlichen annimmt, und da die Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen $\aleph_0$ ist (Art. 33), so ist in der Tat die Mächtigkeit der betrachteten Menge höchstens $\aleph^{\aleph_0}$ oder (Art. 44) $\aleph$. Da andrerseits jede Konstante als eine stetige Funktion angesehen werden kann, so hat die Menge aller stetigen Funktionen wenigstens die Mächtigkeit $\aleph$. Also ist die Mächtigkeit dieser Menge gleich $\aleph$.

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_m}{10^m},$$

wo natürlich $a_m > 0$ ist, auch:

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{a_m - 1}{10^m} + \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \cdots$$

schreiben.

Dagegen: Die Menge aller Funktionen einer reellen Veränderlichen besitzt eine höhere Mächtigkeit als die des Kontinuums.

Man erhält sogar eine Menge, die eine höhere Mächtigkeit als $\aleph$ besitzt, wenn man auch nur die Funktionen nimmt, die für alle Werte der Veränderlichen nur zwei verschiedene Werte annehmen.

Sind p, q diese Werte, so hat man für irgend ein x entweder $f(x) = p$ oder $f(x) = q$. Vor allem ist die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ der betrachteten Menge nicht geringer als $\aleph$, weil man jedem Werte r von x eine Funktion zuordnen kann, die für $x = r$ den Wert p, für alle andern Werte von x aber den Wert q hat, und alle diese Funktionen von einander verschieden sind. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{f}$ nicht gleich $\aleph$ sein kann. Wäre dies der Fall, so würde man in der Tat jedem Werte r von x eine Funktion $f_r(x)$ der Menge derart zuordnen können, daß jede Funktion der Menge unter die Form $f_r(x)$ fiele. Andrerseits läßt sich eine von allen $f_r(x)$ verschiedene Funktion der Menge bilden; es ist dies die Funktion, die für $x = r$ den Wert q oder den Wert p erhält, je nachdem $f_r(r) = p$ oder $f_r(r) = q$ ist. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Wir bemerken, daß $\mathfrak{f} = 2^{\aleph}$, also:

$$2^{\aleph} > \aleph$$

ist.

Es läßt sich auch zeigen, daß die eben betrachtete Menge und die Menge aller Funktionen einer reellen Veränderlichen dieselbe Mächtigkeit besitzen.

Offenbar besitzt die Menge der Funktionen einer Veränderlichen die Mächtigkeit $\aleph^{\aleph}$. Nun ist (Art. 44):

$$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \aleph};$$

es ist aber[1]) $\aleph_0 \aleph = \aleph$, mithin:

$$\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}.$$

46. Durch eine ähnliche Überlegung wie im vorhergehenden Artikel läßt sich allgemeiner zeigen, daß, wenn $\mathfrak{c}$ irgend eine Mächtigkeit bedeutet, $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ ist.

---

1) Wenn man z. B. unendlich viele Strecken von den Längen $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... aneinanderreiht, so erhält man eine Strecke von der Länge 1, und die Menge der Punkte dieser Strecke, deren Mächtigkeit sich durch $\aleph_0 \aleph$ ausdrücken läßt, hat ebenfalls die Mächtigkeit $\aleph$.

Sei C eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, C' die Menge — von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}^\mathfrak{c}$ — aller möglichen Arten, allen Elementen von C Elemente von C zu substituieren. Die einfachste Art der Substitution ist diejenige, durch welche allen Elementen von C ein und dasselbe Element von C substituiert wird; die Menge dieser Arten besitzt die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, mithin ist $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{c}$. Es genügt also nachzuweisen, daß $\mathfrak{c}^\mathfrak{c}$ nicht gleich $\mathfrak{c}$ ist. Nehmen wir vorläufig an, es sei $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, so entspricht jedem Elemente m von C eine und nur eine Substitution f_m und umgekehrt. Sei m' das Element, das bei der Substitution f_m an die Stelle von m tritt. Wir können auf unendlich viele Arten eine Substitution finden, bei der für alle Elemente m an die Stelle von m nicht das entsprechende m' tritt; diese Substitution ist offenbar von allen f_m verschieden. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Der aufgestellte Satz läßt erkennen, daß die Mächtigkeiten kein Maximum besitzen.

Sätze über Punktmengen.

47. Enthält ein n-dimensionaler Bereich unendlich viele gleichfalls n-dimensionale Bereiche, die einander ausschließen oder höchstens Punkte der Umgrenzung miteinander gemein haben, so ist die Menge dieser Bereiche abzählbar.

Wir setzen, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, $n = 2$ und nehmen an, der in Betracht kommende Bereich habe einen endlichen Flächeninhalt α; fände dies nicht statt, so würde man mittelst einer passenden Transformation (vgl. Art. 41) zu diesem Falle gelangen können. Unter den Teilbereichen gibt es dann höchstens einen, dessen Flächeninhalt $\frac{\alpha}{2}$ übersteigt, höchstens 3, deren Flächeninhalt $\frac{\alpha}{4}$, höchstens 7, deren Flächeninhalt $\frac{\alpha}{8}$ übertrifft usw. Nehmen wir zunächst — falls überhaupt ein solcher vorhanden ist — den einzigen Bereich von größerem Flächeninhalt als $\frac{\alpha}{2}$, dann die Bereiche zwischen $\frac{\alpha}{4}$ und $\frac{\alpha}{2}$, weiterhin diejenigen zwischen $\frac{\alpha}{8}$ und $\frac{\alpha}{4}$ usw., so gelingt es, die Bereiche in eine einfache Reihe zu ordnen, von der keiner von ihnen ausgeschlossen bleibt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

48. Wenn ein n-dimensionaler Bereich A für $n > 1$ eine abzählbare Menge von Punkten:

$$a_1, \; a_2, \; \ldots$$

enthält und p, q zwei Punkte sind, die dieser Menge nicht angehören[1]), so kann man von p nach q stets längs einer stetigen Linie gelangen, die nicht über den Bereich A hinaus- und durch keinen der Punkte $a_1, a_2, \ldots$ hindurchgeht.

Wir ziehen eine beliebige stetige Linie λ, die, ohne über A hinauszugehen, p mit q verbindet. Da die Gesamtheit ihrer Punkte nicht abzählbar ist (Art. 36), so enthält sie sicherlich unendlich viele Punkte, die von den Punkten a verschieden sind. Wir wählen von ihnen irgend welche aus: $r_1, r_2, \cdots, r_n$, wo n eine beliebige endliche ganze Zahl bezeichnet. Gibt es z. B. auf dem Bogen pr_1 der Linie λ Punkte a, so versuchen wir, diesen Bogen durch einen Kreisbogen zu ersetzen; weil nun die Gesamtheit der p mit r_1 verbindenden Kreisbogen nicht abzählbar ist, so gibt es deren in beliebiger Nähe der Linie λ unendlich viele, die durch keinen Punkt a gehen, und irgend einer von ihnen wird unserer Absicht entsprechen. Wiederholt man dasselbe Verfahren für die Bogen $r_1r_2, \cdots, r_{n-1}r_n, r_nq$ der Linie λ, so wird man eine Linie erhalten, welche den Bedingungen des Satzes genügt.

49. Eine perfekte Menge ist nicht abzählbar.

Um diesen Satz zu begründen, werden wir zeigen, daß eine abzählbare und in sich dichte Menge nicht zugleich abgeschlossen und folglich nicht perfekt sein kann.

Sei A $(a_1, a_2, \ldots)$ die in Betracht kommende Menge, die wir uns als in einer Ebene liegend vorstellen. Weil jeder Punkt a der Annahme nach eine Grenzstelle der Menge ist, so schließt ein Kreis γ_1, den wir um a_1 als Mittelpunkt mit dem willkürlichen Radius ϱ_1 beschreiben, außer a_1 noch weitere Punkte von A ein. Ist a_{k_2} der Punkt vom niedrigsten Index, der in ihm enthalten ist, so werde um a_{k_2} als Mittelpunkt ein Kreis γ_2 beschrieben, der nicht über γ_1 hinausreicht und a_1 nicht einschließt. Dieser Kreis, dessen Radius $\varrho_2 < \frac{1}{2}\varrho_1$ ist, enthält außer a_{k_2} noch weitere Punkte von A. Ist wieder a_{k_3} der Punkt vom niedrigsten Index, der in ihm enthalten ist, so ist offenbar $k_3 > k_2$, da die Punkte von niedrigerem Index als k_2, weil außerhalb γ_1, auch außerhalb γ_2 liegen. Fährt man in dieser Weise fort, so gelingt es, eine unendliche Reihe von Kreisen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ zu bilden, von denen jeder innerhalb des vorhergehenden liegt und einen Radius hat, der kleiner ist als die Hälfte von dessen Radius. Es gibt deshalb nur einen Punkt p, der innerhalb aller dieser Kreise liegt. Er ist eine Grenzstelle von A, weil jede Umgebung von ihm einen der

1) Wir sind sicher, daß es Punkte gibt, die dieser Bedingung genügen, weil die Gesamtheit aller Punkte von A nicht abzählbar ist.

Kreise der bewußten Reihe (und mit ihm alle folgenden) enthält, also notwendigerweise Punkte von A einschließt. Andrerseits gehört er A nicht an, weil er, wenn er z. B. mit a_r zusammenfiele, außerhalb des Kreises γ_{r+1} liegen müßte, der keine Punkte von A mit niedrigerem Index als k_{r+1} und demnach als $r+1$ enthält. Folglich besitzt die Menge A mindestens eine Grenzstelle, die ihr nicht angehört, und ist mithin nicht abgeschlossen.

50. Eine isolierte unendliche Punktmenge ist abzählbar.

Ist A eine isolierte unendliche Menge von Punkten einer Ebene, so läßt sich um jeden Punkt von A ein Kreis beschreiben, der keinen weiteren Punkt von A enthält. Wird dann um jeden Punkt ein Kreis beschrieben, der halb so groß ist wie der eben erwähnte, so schließen alle diese Kreise einander aus; man hat in der Tat, wenn a_1, a_2 zwei gegebene Punkte von A, ϱ_1, ϱ_2 die Radien der ursprünglich um sie beschriebenen Kreise sind:

$$\varrho_1 < \overline{a_1 a_2}, \quad \varrho_2 < \overline{a_1 a_2},$$

mithin:

$$\tfrac{1}{2}\varrho_1 + \tfrac{1}{2}\varrho_2 < \overline{a_1 a_2}.$$

Folglich ist die Gesamtheit dieser Kreise abzählbar (Art. 47); nun enthält jeder von ihnen nur einen Punkt von A — seinen eigenen Mittelpunkt —, mithin ist A abzählbar.

51. Eine Punktmenge, deren Ableitung abzählbar oder endlich ist, ist abzählbar.

Sei A eine Menge, deren Ableitung A' der Annahme gemäß abzählbar oder endlich ist.

Wir werden im folgenden mit $D(A,B)$ die Gesamtheit der den beiden Mengen A, B gemeinsamen Elemente, mit $M(A,B)$ die Gesamtheit der mindestens einer der beiden Mengen A, B angehörenden Elemente bezeichnen.

Wir schreiben also in unserm Fall:

$$A = D(A, A') + B.$$

Weil die Punkte der Menge B keine Grenzstellen von A sind, sind sie es auch nicht von B, das in ihm enthalten ist (Art. 6); somit ist B eine isolierte Menge und folglich (Art. 50) abzählbar. Außerdem ist $D(A,A')$ endlich oder abzählbar, da es ein Bestandteil (Art. 2) der endlichen oder abzählbaren Menge A' ist (Art. 26). Daraus folgt (Art. 29), daß A gleichfalls abzählbar ist.

52. Wendet man diesen Satz mehrere Male nacheinander an, so folgt daraus der weitere:

Jede Menge erster Gattung ist abzählbar.

53. Ist A eine abgeschlossene Menge, so läßt sich eine Menge angeben, deren Ableitung A ist.

Dieser Satz ist die Umkehrung desjenigen des Art. 7.

Setzt man[1]):

$$A = A' + B,$$

so ist B (vgl. Art. 51) isoliert und folglich (Art. 50) abzählbar; weil nun die ihm angehörigen Punkte, die wir mit $b_1, b_2, \cdots$ bezeichnen können, keine Grenzstellen von A sind, läßt sich um jeden Punkt b_r ein Kreis γ_r beschreiben, der keinen weiteren Punkt von A enthält. Innerhalb jedes Kreises γ_r konstruieren wir — was auf unendlich viele Weisen möglich ist — eine Punktmenge C_r, die als einzige Grenzstelle b_r besitzt, und bezeichnen mit D die Gesamtheit aller Punkte der Mengen $C_1, C_2, \cdots$. Man sieht leicht, daß die Grenzstellen von D sämtlich und ausschließlich die Punkte von B und B' sind, so daß man, wenn man berücksichtigt, daß B und B' keinen Punkt gemein haben, schreiben kann:

$$D' = B + B'.$$

Dementsprechend setzen wir:

$$E = D + A';$$

daraus folgt:

$$E' = M(D', A'') = M(B + B', A'');$$

weil nun B mit A' keine Punkte gemein hat, so hat es auch keine mit A'' gemein, das in A' (Art. 7) enthalten ist; folglich kann man schreiben:

$$E' = M(B', A'') + B.$$

---

1) Wir haben (Art. 13) festgesetzt, daß, so oft wir schreiben:

$$P = Q + R, \tag{α}$$

die Teilmengen Q, R ohne gemeinsame Elemente vorausgesetzt werden, so daß jedes Element von P nur einmal auf der rechten Seite auftritt. Dies vorausgesetzt, läßt sich aus den beiden Beziehungen:

$$P = Q + R, \quad P = Q + S$$

regelrecht $R = S$ folgern. Dagegen läßt sich aus der Beziehung (α) nicht schließen:

$$P' = Q' + R',$$

da es, wenn auch Q und R keine Elemente gemein haben, doch vorkommen kann, daß Q' und R' gemeinsame Elemente besitzen; man darf nur schreiben:

$$P' = M(Q', R').$$

Andrerseits folgt aus der ersten hingeschriebenen Beziehung:

$$A' = M(B', A'');$$

folglich hat man:

$$E' = A' + B,$$

oder auch $E' = A$. Mithin gibt es eine Menge E, von welcher A die Ableitung ist.

54. Der Satz des Art. 45 gibt Veranlassung zu einer bemerkenswerten geometrischen Interpretation.

Jeder der Funktionen, welche nur zwei verschiedene Werte p, q annehmen, entspricht eine bestimmte Teilmenge des linearen Kontinuums, nämlich die Menge der Punkte, in welchen die Funktion den Wert p annimmt; umgekehrt entspricht jeder im linearen Kontinuum enthaltenen Menge eine bestimmte Funktion von der angegebenen Beschaffenheit, nämlich diejenige, welche in den Punkten der in Betracht gezogenen Menge den Wert p, in den verbleibenden den Wert q annimmt. Daraus folgt, daß die Gesamtheit der Funktionen, welche nur zwei verschiedene Werte p, q annehmen, und die Gesamtheit der im linearen Kontinuum enthaltenen Mengen dieselbe Mächtigkeit besitzen. Mithin gilt der Satz:

Die Gesamtheit der im linearen Kontinuum enthaltenen Mengen besitzt eine höhere Mächtigkeit als die des Kontinuums.

Dagegen: Die Gesamtheit der im linearen Kontinuum enthaltenen abgeschlossenen Mengen besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Weil wir für jeden Punkt eine abgeschlossene Menge bilden können, welche nur diesen Punkt zur Grenzstelle hat, und weil diese Mengen sämtlich voneinander verschieden sind, so ist vorerst die Mächtigkeit der Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen größer oder gleich der des Kontinuums. Weil andrerseits[1]) die Punkte, an denen eine stetige Funktion denselben Wert annimmt, eine abgeschlossene Menge bilden, so läßt sich nach Annahme irgend eines reellen Wertes c jeder abgeschlossenen Menge eine stetige Funktion zuordnen, die an den Punkten der Menge und nur an ihnen den Wert c annimmt, und diese Funktionen sind sämtlich voneinander verschieden. Daraus folgt, daß die Mächtigkeit der Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen kleiner oder gleich ist derjenigen der Gesamtheit der stetigen Funktionen; diese ist aber die Mächtigkeit des linearen Kontinuums (Art. 45), folglich ist die Behauptung erwiesen.

1) S. z. B. Vivanti, Corso di calcolo infinitesimale, S. 94.

Als Folgerung ergibt sich: Die Gesamtheit der im linearen Kontinuum enthaltenen perfekten Mengen besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Diese Mächtigkeit kann in der Tat nur der des Kontinuums gleich oder geringer sein, weil jede perfekte Menge abgeschlossen ist; andrerseits kann sie nicht geringer sein, weil die Gesamtheit aller Strecken einer Geraden, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt und die Punkte jeder dieser Strecken eine perfekte Menge bilden.

Ordnungstypen und transfinite Zahlen.

55. Um in der Untersuchung der Mengen weiter zu kommen, empfiehlt es sich, zu einem neuen Hilfsmittel zu greifen, zur Theorie der transfiniten Zahlen.

Wenn man sich die Elemente einer Menge nach einem bestimmten Gesetze derart geordnet denkt, daß sich, wenn zwei Elemente gegeben sind, stets erkennen läßt, welches von ihnen dem andern vorangeht oder, mit andern Worten, von niedrigerem Range ist als das andre, so bilden diese Elemente, wie man sagt, eine geordnete Reihe.

Eine geordnete Reihe heißt wohlgeordnet, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

a) Es ist ein erstes Element der Reihe vorhanden.

b) Greift man irgend einen Bestandteil[1]) der Reihe heraus, so ist ein ihm unmittelbar folgendes Element vorhanden.

Es ist klar, daß nicht alle geordneten Reihen wohlgeordnet sind. So besitzt z. B. die Reihe, welche von allen rationalen Zahlen gebildet wird, die größer als Null, aber kleiner als Eins und steigend angeordnet sind, keine der beiden Eigenschaften a), b).

56. Eine eineindeutige, vollständige Beziehung zwischen den Elementen zweier geordneten Reihen, welche die Eigenschaft besitzt, daß sich die entsprechenden Elemente in beiden Reihen in derselben Ordnung befinden, heißt eine geordnete Beziehung. Läßt sich zwischen zwei geordneten Reihen eine geordnete Beziehung herstellen, so sagt man, die beiden Reihen besitzen den gleichen Ordnungstypus oder sind ähnlich.

---

1) Unter einem Bestandteile einer geordneten Reihe versteht man eine geordnete Reihe, deren Elemente sämtlich der gegebenen Reihe angehören und in derselben gegenseitigen Ordnung auftreten, in der sie sich in dieser befinden.

Die Ordnungstypen der wohlgeordneten Reihen heißen Ordnungs- oder transfinite Zahlen.

Für den jetzt eingeführten Begriff der Gleichheit gelten analoge Betrachtungen wie in Art. 12.

Der Ordnungstypus einer geordneten Reihe A wird gewöhnlich mit $\bar{A}$ bezeichnet, indem man durch die Überstreichung andeuten will, daß man von der Natur der Elemente der Reihe (nicht aber von deren Ordnung) absieht.

Die Ähnlichkeit zweier geordneten Reihen A_1, A_2 wird folgendermaßen bezeichnet:

$$A_1 \simeq A_2.$$

Offenbar bilden die Elemente zweier ähnlichen geordneten Reihen zwei Mengen von gleicher Mächtigkeit.

57. Sind zwei geordnete Reihen A, B gegeben, so können wir aus ihnen eine neue geordnete Reihe C herleiten, indem wir der ganzen Reihe A die ganze Reihe B folgen lassen, ohne innerhalb der beiden Reihen die Ordnung der Elemente irgendwie zu ändern. Der Ordnungstypus γ der Reihe C heißt die Summe der Ordnungstypen α, β der Reihen A, B, und man schreibt:

$$\gamma = \alpha + \beta;$$

die entsprechende Operation wird Addition genannt.

Die Addition besitzt die assoziative Eigenschaft, weil man, wenn drei Reihen A_1, A_2, A_3 gegeben sind, dasselbe Ergebnis erzielt, wenn man A_2 hinter A_1 und dann A_3 hinter die so gebildete Reihe setzt, wie wenn man A_3 hinter A_2 und die so gebildete Reihe hinter A_1 setzt.

Dagegen besitzt sie im allgemeinen nicht die kommutative Eigenschaft, wie man aus den Beispielen ersieht, denen wir weiter unten (Art. 74) begegnen werden.

58. Es seien wiederum zwei geordnete Reihen A, B gegeben, und es werde an Stelle jedes Elementes von A eine B ähnliche Reihe gesetzt. Nennt man die so gewonnene Reihe C, ihren Ordnungstypus γ, und bezeichnet man mit α, β die Ordnungstypen der gegebenen Reihen, so heißt γ das Produkt von β in α, β der Multiplikand, α der Multiplikator, und man schreibt:

$$\gamma = \beta\alpha;$$

die entsprechende Operation heißt Multiplikation.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Multiplikation die assoziative und distributive Eigenschaft besitzt.

Dagegen besitzt sie im allgemeinen nicht die kommutative Eigenschaft, wie man aus den Beispielen ersieht, die uns unten (Art. 74) begegnen werden.

59. Jeder Bestandteil einer wohlgeordneten Reihe ist eine wohlgeordnete Reihe.

Sei A eine wohlgeordnete Reihe, B einer ihrer Bestandteile.

Enthält B das erste Element von A, so ist dies zugleich das erste Element von B; andernfalls ist das erste Element von B dasjenige Element, welches sämtlichen Elementen von A, die allen denen von B vorangehen, unmittelbar folgt (ein Element, das zufolge der Eigenschaft b) vorhanden ist). Mithin besitzt B ein erstes Element.

Wir teilen jetzt B in zwei Teile C, D, von denen der erste dem zweiten vorangeht. Da D ein Bestandteil von A ist, so können wir, wenn wir die vorige Betrachtung wiederholen, behaupten, daß D ein erstes Element besitzt; nun folgt dieses in der Reihe B unmittelbar auf den Bestandteil C, mithin besitzt der Bestandteil C dieser Reihe ein unmittelbar folgendes Element.

B besitzt also beide Eigenschaften a), b) und ist mithin eine wohlgeordnete Reihe.

60. Eine Reihe von Elementen abnehmenden Ranges, die einer wohlgeordneten Reihe angehören, ist endlich.

Wäre sie unendlich, so würde man, wenn man die Elemente nach zunehmendem Range ordnete, in der Tat einen Teil einer wohlgeordneten Reihe erhalten, der kein erstes Element besäße, was unmöglich ist (Art. 59).

61. Zwischen zwei wohlgeordneten ähnlichen Reihen besteht eine einzige geordnete Beziehung.

In der Tat ist sie durch folgende zwei Bedingungen vollständig bestimmt: daß dem ersten Elemente der einen Reihe das erste der andern entsprechen muß, und daß dem Element, welches irgend einem Teile der einen unmittelbar folgt, dasjenige Element entsprechen muß, das dem entsprechenden Teile der andern unmittelbar folgt.

62. Unter einem Abschnitt einer wohlgeordneten Reihe versteht man einen solchen Bestandteil derselben, der von allen Elementen gebildet wird, die von niedrigerem Range sind als ein gegebenes Element. Jedes Element einer Reihe bestimmt einen einzigen Abschnitt und umgekehrt.

Ein Abschnitt einer wohlgeordneten Reihe ist eine wohlgeordnete Reihe (Art. 59).

Ein Abschnitt einer Reihe heißt größer (>) oder kleiner (<) als ein anderer, je nachdem das Element, das den einen bestimmt, dem Elemente, das den anderen bestimmt, folgt oder vorangeht.

63. Eine wohlgeordnete Reihe kann keinem ihrer Abschnitte ähnlich sein.

Nehmen wir die Reihe A als ihrem durch das Element a_1 bestimmten Abschnitte A_1 ähnlich an, so entspricht dem ersten Elemente von A_1 das erste Element von A, d. h. das Element selbst, dem zweiten das zweite usw.; dem auf einen Abschnitt von A_1 folgenden Elemente entspricht dann das dem homologen Abschnitte, d. h. demselben Abschnitte in A folgende Element; kurz, allen Elementen von A_1 werden in A die Elemente selbst entsprechen Daraus folgt, daß das Element a_1 von A, das A_1 nicht angehört, in A_1 kein homologes hat. Folglich kann keine Ähnlichkeit statthaben.

64. Da von zwei Abschnitten derselben wohlgeordneten Reihe der kleinere als Abschnitt des größeren betrachtet werden kann, so läßt sich aus dem vorangehenden Satze schließen:

Zwei verschiedene Abschnitte derselben wohlgeordneten Reihe können nicht einander ähnlich sein.

Weiterhin folgt daraus:

Eine wohlgeordnete Reihe kann nicht zwei verschiedenen Abschnitten einer andern ähnlich sein.

65. Sind A_1, A_2 zwei Abschnitte einer wohlgeordneten Reihe A, B_1, B_2 zwei ihnen beziehentlich ähnliche Abschnitte einer andern wohlgeordneten Reihe B, so ist, je nachdem $A_1 \gtrless A_2$, auch $B_1 \gtrless B_2$.

Setzt man $A_1 > A_2$ voraus, so gehört das Element a_2 von A, das A_2 bestimmt, dem Abschnitte A_1 an. Das Element $\overline{b}_2$ von B_1, das a_2 vermöge der zwischen A_1 und B_1 bestehenden Beziehung entspricht, bestimmt einen Abschnitt $\overline{B}_2$ von B_1 und folglich auch von B, der A_2 ähnlich ist; weil aber $A_2 \simeq B_2$ ist, so folgt daraus $\overline{B}_2 \simeq B_2$. Das ist indes unmöglich (Art. 64), wenn $\overline{B}_2$ und B_2 nicht identisch sind. Mithin ist $\overline{b}_2$ dasjenige Element, das B_2 bestimmt, und man darf, da es B_1 angehört, schließen, daß $B_1 > B_2$.

66. Sind zwei wohlgeordnete Reihen so beschaffen, daß sich zu jedem gegebenen Abschnitte der einen von ihnen ein ähnlicher Abschnitt in der andern finden läßt und umgekehrt, so sind die beiden Reihen ähnlich.

In der Tat läßt sich zwischen den Elementen der beiden Reihen eine Beziehung herstellen, wenn man die Elemente, die ähnliche Abschnitte bestimmen, als sich entsprechend betrachtet. Diese Beziehung ist nach der Voraussetzung vollständig, nach dem letzten Satze des Art. 64 eineindeutig und nach dem Satze des Art. 65 geordnet.

67. Sind zwei wohlgeordnete Reihen A, B so beschaffen, daß zu jedem Abschnitt von A ein ähnlicher in B gehört, während das Umgekehrte nicht statthat, so ist in B ein A ähnlicher Abschnitt vorhanden.

Die Elemente, welche die Abschnitte von B bestimmen, zu denen es in A keine ähnlichen Abschnitte gibt, stellen einen Bestandteil von B dar, der (Art. 59) ein erstes Element b_1 hat. Der durch b_1 bestimmte Abschnitt B_1 von B besitzt die Eigenschaft, daß es zu jedem Abschnitt von B, der kleiner als jener, also in ihm enthalten ist, in A einen ähnlichen Abschnitt gibt; andrerseits gehören zu allen Abschnitten von A der Voraussetzung nach ihnen ähnliche in B, und diese sind notwendigerweise in B_1 enthalten. Daraus folgt (Art. 66), daß A ähnlich B_1 ist.

68. Sind zwei wohlgeordnete Reihen A, B gegeben, so kann einer und nur einer der folgenden Fälle statthaben:

a) A ist B ähnlich.

b) Ein Abschnitt von B ist A ähnlich.

c) Ein Abschnitt von A ist B ähnlich.

Zunächst ist klar, daß für zwei Reihen A, B nur die 4 folgenden Fälle möglich sind, die sich gegenseitig ausschließen:

a) Zu jedem Abschnitt von A gehört ein ihm ähnlicher in B und umgekehrt. Dann ist $A \simeq B$ (Art. 66).

b) Zu jedem Abschnitt von A gehört ein ihm ähnlicher in B, während das Umgekehrte nicht stattfindet. Dann gibt es (Art. 67) einen A ähnlichen Abschnitt in B.

c) Zu jedem Abschnitt von B gehört ein ihm ähnlicher in A, während das Umgekehrte nicht stattfindet. Dann gibt es (Art. 67) einen B ähnlichen Abschnitt in A.

d) Es gibt in A irgend einen Abschnitt, zu dem in B kein ähnlicher vorhanden ist, und in B irgend einen Abschnitt, zu dem in A kein ähnlicher vorhanden ist. Dieser Fall ist aber unmöglich. — Sei in der Tat (vgl. Art. 67) A_1 der kleinste Abschnitt von A, zu dem es in B keinen ähnlichen gibt, B_1 der kleinste Abschnitt von B, zu dem es in A keinen ähnlichen gibt. Zu jedem in A_1 enthaltenen Abschnitte von A gibt es dann in B einen ähnlichen, der in B_1 enthalten ist,

und umgekehrt, so daß (Art. 66) $A_1 \simeq B_1$. Allein das widerspricht der Voraussetzung, daß in B kein A_1 ähnlicher Abschnitt vorhanden ist; mithin ist der betrachtete Fall unmöglich.

69. Ein Bestandteil einer wohlgeordneten Reihe ist entweder der Reihe selbst oder einem ihrer Abschnitte ähnlich.

Sei A die gegebene Reihe, B einer ihrer Bestandteile. Wenn keiner der beiden in dem Satze angegebenen Fälle stattfindet, so muß (Art. 68) A einem Abschnitte A' von B ähnlich sein. Sei B' der Teil von A', der dem Teile B von A entspricht; in B' wird dann ein Abschnitt A'' dem Abschnitte A' von B ähnlich sein; usf. ohne Ende. Bezeichnet man mit $a', a'', \cdots$ die Elemente von A, welche $A', A'', \cdots$ unmittelbar folgen, so wird, weil A'' ein Abschnitt von B' ist, welches ein Teil von A' ist, a'' notwendigerweise von niedrigerem Range als a' sein usf. Nun kann in A (Art. 60) keine unendliche Reihe von Elementen abnehmenden Ranges vorhanden sein; folglich ist die gemachte Voraussetzung absurd.

70. Sind zwei wohlgeordnete Reihen A, B nicht ähnlich und gibt es in A einen B ähnlichen Abschnitt, so sagt man, die transfinite Zahl (Art. 56) der Reihe A ist größer als die der Reihe B, oder die zweite ist kleiner als die erste.

Bezeichnen wir die transfiniten Zahlen zweier Reihen A, B mit α, β, so folgt aus dem Satze des Art. 68, daß einer und nur einer der 3 folgenden Fälle statthat:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha < \beta.$$

71. Die Ordnungszahl jeder unendlichen Reihe ist größer als die jeder endlichen Reihe.

Stellt man nämlich eine Beziehung zwischen dem ersten Elemente der einen Reihe und dem der andern, zwischen dem zweiten und dem zweiten usf. her, so erschöpft man schließlich die endliche Reihe, ohne daß die andere erschöpft wäre.

72. Es möge jetzt erörtert werden, welche Gestalt die gewonnenen Begriffe annehmen, wenn die Reihen, auf welche man sie anwenden will, eine endliche Anzahl von Elementen enthalten.

Zunächst ist eine geordnete Reihe von Elementen in endlicher Anzahl stets wohlgeordnet.

Zwei endliche Reihen sind immer und nur dann ähnlich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl von Elementen zusammengesetzt sind. Diese Zahl, die den gemeinsamen Charakter einer ganzen Klasse von

ähnlichen Reihen darstellt, können wir daher als ihre Ordnungszahl annehmen.

Wir können uns die natürliche Zahlenreihe folgendermaßen entstanden denken. Angenommen, es liege eine aus einem einzigen Elemente a gebildete Reihe vor, so läßt man ihr das Zeichen 0 entsprechen und bezeichnet die Ordnungszahl der Reihe mit 1. Nimmt man jetzt zu a ein neues Element b hinzu, so läßt man 0 dem Elemente a, 1 dem Elemente b entsprechen und bezeichnet die Ordnungszahl der Reihe a, b mit 2. Man nimmt, allgemein gesagt, wenn eine Zahl m definiert ist, zu der Reihe von m Elementen, die zu ihrer Bildung gedient hat, ein neues Element hinzu und bezeichnet, nachdem man den Elementen der so erhaltenen Reihe beziehentlich die Zahlen $0, 1, \cdots, m$ zugeordnet, mit $m + 1$ die Ordnungszahl der Reihe.

Daraus folgt:

Die Ordnungszahl eines Abschnittes der natürlichen Zahlenreihe (die wir als mit 0 beginnend annehmen) ist die Zahl, welche in dieser Reihe unmittelbar dem Abschnitte selbst folgt.

Die Ordnungszahl einer endlichen Reihe von Elementen ist dasselbe Symbol, mit welchem die Anzahl ihrer Elemente bezeichnet zu werden pflegt (Kardinalzahl).

73. Diese letzte Bemerkung wirft ein helles Licht auf einen charakteristischen Unterschied, der zwischen endlichen und unendlichen Mengen besteht.

Hat man eine endliche Menge, und bringt man ihre Elemente irgendwie in eine wohlgeordnete Reihe, so ist die Ordnungszahl dieser Reihe stets dieselbe, nämlich der Anzahl der Elemente der Menge gleich.

Das trifft für unendliche Mengen nicht zu. Man kann z. B. die aus allen natürlichen Zahlen gebildete Menge u. a. auf folgende Arten in eine wohlgeordnete Reihe bringen:

α) Man nimmt als erstes Element 1 und läßt ihm 2, dann 3 usf. folgen:

$$1, 2, 3, \cdots.$$

β) Man nimmt als erstes Element 2 und läßt ihm 3, dann 4 usf., endlich der ganzen Reihe der so angeordneten Zahlen die Zahl 1 folgen:

$$2, 3, \cdots, 1.$$

γ) Man nimmt als erstes Element 3 und läßt ihm 4, dann 5 usf., endlich der ganzen Reihe der so angeordneten Zahlen die Zahl 1 und dieser die Zahl 2 folgen:

$$3, 4, \cdots, 1, 2.$$

δ) Man nimmt als erstes Element 1 und läßt ihm 3, 5, 7 usf., dann der ganzen Reihe der ungeraden Zahlen 2, 4, 6 usf. folgen:

$$1, 3, 5, \cdots, 2, 4, 6, \cdots.$$

Die 4 so erhaltenen Reihen haben alle eine verschiedene Ordnungszahl. Tatsächlich ist α dem Abschnitte von β ähnlich, welcher dem Elemente 1 vorangeht; β dem Abschnitte von γ, welcher dem Elemente 2 vorangeht; endlich ist α dem Abschnitte von δ ähnlich, der dem Elemente 2, β demjenigen, der dem Elemente 4, γ demjenigen, der dem Elemente 6 vorangeht.

Wie aus diesen Beispielen klar hervorgeht, steht die Möglichkeit, die Elemente einer Menge in wohlgeordnete Reihen zu bringen, die einander nicht ähnlich sind, in engem Zusammenhang mit der bereits beobachteten Tatsache (Art. 22), daß zwischen einer unendlichen Menge und einem ihrer Teile Äquivalenz statthaben kann.

74. Sind zwei wohlgeordnete Reihen gegeben, so erkennt man leicht, daß ihre Summe und ihr Produkt wiederum wohlgeordnete Reihen sind. Die entsprechenden Ordnungszahlen sind die Summe bezw. das Produkt der Ordnungszahlen der beiden Reihen.

Die Begriffe der Summe und des Produktes der Ordnungszahlen führen sich auf die gewöhnlichen zurück, wenn diese endliche Zahlen sind.

Es läßt sich an einfachen Beispielen nachweisen, daß die Addition und die Multiplikation der Ordnungszahlen im allgemeinen die kommutative Eigenschaft nicht besitzen. Betrachten wir z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen, deren Ordnungszahl mit ω bezeichnet werde, und eine zweite Reihe, die aus einem einzigen Elemente a besteht (deren Ordnungszahl also 1 ist). Die Reihen:

$$1, 2, 3, \cdots, a,$$
$$a, 1, 2, 3, \cdots,$$

deren Ordnungszahlen beziehentlich $\omega + 1$ und $1 + \omega$ sind, sind nicht ähnlich, weil die zweite der Reihe der natürlichen Zahlen oder dem dem Elemente a vorangehenden Abschnitte der ersten ähnlich ist. Man hat also:

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1.$$

Man betrachte ferner die Reihe der natürlichen Zahlen und außerdem eine Reihe, die nur aus zwei Elementen gebildet ist (die also die Ordnungszahl 2 hat). Die Reihen:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots,$$
$$a_1, a_2, a_3, \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots,$$

deren Ordnungszahlen beziehentlich $2 \cdot \omega$ und $\omega \cdot 2$ sind, sind nicht ähnlich, weil die erste der Reihe der natürlichen Zahlen oder dem dem Elemente b_1 vorangehenden Abschnitte der zweiten ähnlich ist. Man hat also:

$$2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2.$$

75. Wir haben mit ω die Ordnungszahl der natürlichen Zahlenreihe bezeichnet. Sie hat die Eigenschaft, die kleinste aller transfiniten (d. h. unendlichen Reihen zugehörenden) Ordnungszahlen zu sein In der Tat bildet jeder Abschnitt der natürlichen Zahlenreihe eine endliche Reihe, so daß nur die endlichen Ordnungszahlen kleiner sind als ω.

Fügt man der ganzen natürlichen Zahlenreihe ein neues Element a_1 hinzu, so erhält man eine Reihe A_1, deren Ordnungszahl $\omega + 1$ ist (Art. 57). Diese Zahl besitzt folgende beiden Eigenschaften:

Sie ist $> \omega$ (weil der Abschnitt von A_1, der a_1 vorangeht, die Ordnungszahl ω hat).

Es gibt keine Zahl, die größer als ω und kleiner als $\omega + 1$ ist (weil ein Abschnitt von A_1 entweder die Ordnungszahl ω hat oder endlich ist).

Auf analoge Weise gelangt man von $\omega + 1$ zu $\omega + 2$, $\omega + 3$ usw.

So wird die natürliche Reihe der Zahlen, die man als Ordnungszahlen der endlichen Reihen ansehen kann, mittelst Hinzunahme der transfiniten Ordnungszahlen ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$ usw. erweitert. In der Reihe:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ \cdots$$

ist jede Zahl größer als alle vorangehenden; außerdem besitzen zwei benachbarte Zahlen die Eigenschaft, daß es keine Zahl gibt, die größer ist als die eine und kleiner als die andre von beiden.

Das Prinzip (Cantors erstes Erzeugungsprinzip), das die Bildung der Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\cdots$ beherrscht und darin besteht, zu einer bereits definierten Zahl eine Einheit hinzuzunehmen, ist dasselbe, das uns leitete, als wir, von der Einheit ausgehend, die ganze natürliche Zahlenreihe bildeten. Die ausschließliche Anwendung dieses Prinzips würde uns daher niemals gestattet haben, über diese Reihe hinauszugehen; wir haben zu diesem Zwecke zu einem neuen Prinzipe (dem zweiten Erzeugungsprinzip) greifen müssen: zur Bildung einer neuen Zahl (der Zahl ω), die wir als die kleinste Zahl definierten, die größer ist als alle bereits gebildeten. Vermittelst dieses Prinzips können wir eine neue Zahl bilden, welche die Ordnungszahl der als unbeschränkt fortgesetzt gedachten Reihe:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots$$

oder die kleinste transfinite Zahl darstellt, die größer ist als alle diejenigen der Reihe selbst. Gleichwohl ist es unnötig, diese Zahl durch ein völlig neues Symbol zu bezeichnen; die Gesetze der oben aufgestellten Operationen gestatten uns, sie mit $\omega \cdot 2$ zu bezeichnen. Ebenso ist $\omega \cdot 3$ die Ordnungszahl der Reihe:

$$0,1,2,\cdots,\quad \omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,\quad \omega\cdot 2,\omega\cdot 2+1,\omega\cdot 2+2,\cdots$$

usf.; $\omega \cdot \omega$ oder ω^2 ist die Ordnungszahl der Reihe:

$$\underbrace{0,1,2,\cdots,}_{A_0}\quad \underbrace{\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,}_{A_1}\quad \underbrace{\omega\cdot 2,\omega\cdot 2+1,\omega\cdot 2+2,\cdots,}_{A_2}\ \cdots,$$

wobei die Gruppen $A_0, A_1, A_2, \cdots$ eine Reihe bilden sollen, die derjenigen der natürlichen Zahlen ähnlich ist. In analoger Weise können ω^3, ω^4, ω^ω, ω^{ω^ω} usw. definiert werden.

Die endlichen Zahlen heißen auch Zahlen der ersten Klasse; die mittelst ω und der endlichen Zahlen gebildeten heißen solche der zweiten Klasse.

Eine Zahl der zweiten Klasse heißt von der ersten oder zweiten Art, je nachdem sie mittelst des ersten oder zweiten Prinzips gebildet ist, d. h. je nachdem sie eine unmittelbar vorangehende Zahl besitzt oder nicht.

Es läßt sich leicht zeigen (s. Art. 28, 29, 30, 31), daß die Gesamtheit aller Zahlen, die kleiner sind als eine bestimmte Zahl der zweiten Klasse, abzählbar ist.

76. Es erhebt sich nun von selbst die Frage: Umfaßt die Gesamtheit der bisher betrachteten Zahlen die Ordnungszahlen aller möglichen wohlgeordneten Reihen?

Auf diese Frage gibt folgender Satz die Antwort:

Ist A eine abzählbare Menge und greift man **irgend eine Zahl** α der zweiten Klasse heraus, so lassen sich die Elemente von A in eine wohlgeordnete Reihe bringen, die derjenigen der Ordnungszahlen ähnlich ist, welche α vorangehen; umgekehrt ist, wenn dies für **irgend eine Zahl** α möglich ist, die Menge A abzählbar.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Weil die Menge der Zahlen, die kleiner als α sind, abzählbar ist (Art. 75), läßt sich zwischen diesen Zahlen und den Elementen von A eine eineindeutige, vollständige Beziehung herstellen. Setzen wir nun fest, daß von zwei Elementen von A dasjenige vorangehen soll, dem die

kleinere Zahl entspricht, so gelingt es, die Elemente von A in eine wohlgeordnete Reihe zu bringen, die derjenigen der Zahlen ähnlich ist, welche kleiner als α sind. — Läßt sich dies umgekehrt für eine Zahl α bewerkstelligen, so folgt (Art. 56), daß A und die Gesamtheit der Zahlen, die kleiner als α sind, gleiche Mächtigkeit besitzen, und daß folglich A abzählbar ist.

Der aufgestellte Satz läßt sich kürzer so aussprechen: Die Zahlen der zweiten Klasse dienen einzig dazu, alle Mengen der ersten Mächtigkeit abzuzählen, wie andrerseits diejenigen der ersten Klasse dazu dienen, alle endlichen Mengen und nur diese abzuzählen.

Hiernach erscheint es offenbar notwendig, neue Zahlen zu bilden, welche die Ordnungszahlen der nicht abzählbaren Mengen anzugeben vermögen. Weil aber diese Zahlen nicht aus ω und den endlichen Zahlen zusammengesetzt werden können, da derart zusammengesetzte Zahlen nur geeignet sind, die Mengen der ersten Mächtigkeit abzuzählen, so macht es sich nötig, ein durchaus neues Symbol einzuführen. Wir werden als solches Ω benutzen, das wir als die kleinste transfinite Zahl definieren, die größer ist als alle Ordnungszahlen derjenigen Reihen, deren Elemente eine abzählbare Menge bilden.

Der Gedanke, erst dann eine völlig neue Zahl Ω einzuführen, wenn alle Zahlen erschöpft sind, die sich dazu eignen, die Reihen abzuzählen, deren Elemente eine abzählbare Menge bilden, stellt, gebührend verallgemeinert, wie sogleich (Art. 77) erklärt werden soll, das Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip dar, durch welches bestimmt wird, unter welchen Bedingungen ein völlig neues Symbol eingeführt werden muß.

Aus der Definition der Zahl Ω folgt: Eine transfinite Zahl ist immer und nur dann von der zweiten Klasse, wenn die Gesamtheit der ihr vorangehenden Zahlen abzählbar ist; und daraus folgt weiter: Die Gesamtheit aller Zahlen, die kleiner als Ω sind, ist nicht abzählbar.

Ferner läßt sich zeigen, daß es keine nicht abzählbare Menge von geringerer Mächtigkeit als derjenigen der Menge Z aller Ordnungszahlen gibt, die kleiner als Ω sind, oder, was dasselbe ist, daß die Mächtigkeit der Menge Z die kleinste Mächtigkeit nach der ersten ist. Sie wird deshalb die zweite Mächtigkeit genannt. Bezeichnet wird sie gewöhnlich mit $\aleph_1$.

Angenommen, es gebe eine nicht abzählbare Menge A, die eine geringere Mächtigkeit besäße als die Menge Z. Der Definition gemäß gibt es dann eine in Z enthaltene und A äquivalente Menge Z_1.

Wir bezeichnen mit Y die wohlgeordnete Reihe der Zahlen, die kleiner sind als Ω, mit Y_1 die wohlgeordnete Reihe (Art. 59), die man erhält, wenn man die Elemente von Z_1 nach zunehmender Größe ordnet. Weil jeder Abschnitt von Y abzählbar, Z_1 es aber nicht ist, so ist Z_1 der Menge der Elemente keines Abschnittes von Y äquivalent, und Y_1 ist deshalb (Art. 56) keinem Abschnitte von Y ähnlich. Weil nun Y_1 ein Bestandteil von Y ist, so folgt daraus (Art. 69), daß Y_1 ähnlich Y, folglich Z_1 äquivalent Z und mithin A äquivalent Z ist — gegen die Voraussetzung.

77. Mittelst der Zahl Ω, der Zahl ω und der endlichen Zahlen und unter Anwendung der beiden Erzeugungsprinzipien lassen sich neue transfinite Zahlen bilden. Darauf wird man gemäß dem Hemmungsprinzip eine völlig neue Zahl erst dann einführen dürfen, wenn die Gesamtheit der gebildeten Zahlen eine höhere Mächtigkeit erreicht hat als die zweite.

Das beschriebene Verfahren nimmt, wie man sieht, kein Ende; und die Bildung einer völlig neuen Zahl ist durch den Umstand bedingt, daß die Gesamtheit aller bereits definierten Zahlen eine höhere Mächtigkeit als diejenige der Menge aller Zahlen besitzt, die kleiner sind als irgend eine der schon definierten Zahlen (Hemmungsprinzip).

78. In jeder Menge von Ordnungszahlen gibt es eine, die kleiner ist als alle andern.

Bildet man nämlich aus der gegebenen Menge eine geordnete Reihe, indem man die Elemente nach zunehmender Größe anordnet, so ist diese (Art. 59) als Bestandteil der Reihe aller Ordnungszahlen wohlgeordnet; folglich hat sie ein erstes Element. Dies ist das kleinste ihrer Elemente.

79. Eine abzählbare Reihe fallender transfiniter Zahlen ist endlich.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall von demjenigen des Artikels 60.

Anwendung der Theorie der transfiniten Zahlen auf die Mengenlehre.

80. In Artikel 7 ist gezeigt worden, daß für jedes beliebige A die erste Ableitung A' die zweite Ableitung A'' enthält. Ebenso enthält A'' auch A''', A''' auch A^{IV} usw. Es kann vorkommen, daß die Mengen:

$$A', A'', A''', \cdots,$$

von denen jede die folgende enthält, gemeinsame Elemente besitzen; die Gesamtheit dieser heißt die **Ableitung ω-ter Ordnung** von A und wird mit $A^{(\omega)}$ bezeichnet. Die Ableitungen von $A^{(\omega)}$ werden der Reihe nach mit:

$$A^{(\omega+1)},\ A^{(\omega+2)},\ \ldots$$

und die Gesamtheit der ihnen gemeinsamen Elemente mit $A^{(\omega\cdot 2)}$ usw. bezeichnet. In demselben Sinne ist $A^{(\Omega)}$ die Gesamtheit der allen Mengen $A^{(\alpha)}$ gemeinsamen Elemente, wo α irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Klasse ist.

Man sieht, daß die **Ordnungen der Ableitungen**, die wir auf diese Weise nach und nach bilden, von den **transfiniten Zahlen** durchaus nicht verschieden sind; man bemerkt außerdem, daß, wenn α eine Zahl der ersten Art ist (Art. 75), $A^{(\alpha)}$ die Ableitung von $A^{(\beta)}$ im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist, sobald nur $\alpha = \beta + 1$, daß aber, wenn α von der zweiten Art ist, $A^{(\alpha)}$ die Menge der allen $A^{(\gamma)}$ gemeinsamen Elemente ist, wobei γ die ganze Reihe der Zahlen durchläuft, die kleiner als α sind.

81. Jede abgeleitete Menge ist abgeschlossen.

Sei $A^{(\alpha)}$ die Ableitung α-ter Ordnung einer Menge A, wo α eine beliebige Ordnungszahl ist.

Ist α eine Zahl der ersten Art, so ist, wenn man $\alpha = \beta + 1$ setzt, $A^{(\alpha)}$ die erste Ableitung von $A^{(\beta)}$ und folglich (Art. 7 und 8) abgeschlossen.

Ist dagegen α von der zweiten Art, so nehmen wir zunächst $\alpha = \omega$ an, und zwar ist nur der Fall zu betrachten, daß $A^{(\omega)}$ eine unendliche Menge ist. Ist dann n irgend eine endliche Zahl, so ist, da $A^{(\omega)}$ in $A^{(n)}$ enthalten ist, $A^{(\omega+1)}$ in $A^{(n+1)}$ enthalten (Art. 6); die Elemente von $A^{(\omega+1)}$ gehören folglich allen Mengen A'', A''', $\cdots$ und deshalb der Menge $A^{(\omega)}$ der allen diesen Mengen gemeinsamen Elemente an. — Sei jetzt $\alpha = \omega \cdot 2$. Bezeichnet γ irgend eine Zahl, die kleiner ist als $\omega \cdot 2$, so ist $A^{(\omega\cdot 2)}$ in $A^{(\gamma)}$ und folglich $A^{(\omega\cdot 2+1)}$ in $A^{(\gamma+1)}$ enthalten; nun ist, da $A^{(\gamma)}$ abgeschlossen ist, wie beschaffen auch $\gamma < \omega \cdot 2$ sei (wie eben gezeigt worden), $A^{(\omega\cdot 2+1)}$ in $A^{(\gamma)}$, mithin in $A^{(\omega\cdot 2)}$ enthalten, das aus der Gesamtheit der allen Mengen $A^{(\gamma)}$ gemeinsamen Elemente besteht. In dieser Weise kann man für jede Zahl der zweiten Klasse fortfahren.

82. Eine Punktmenge A ist von der ersten oder zweiten Gattung (Art. 6), je nachdem $A^{(\omega)}$ Null ist oder nicht.

Ist A von der ersten Gattung, so ist offenbar $A^{(\omega)} = 0$.

Ist A von der zweiten Gattung und nimmt man, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, an, seine Punkte lägen auf einer endlichen Strecke, so müssen, wenn man sie halbiert, wenigstens die in einem der beiden Teile enthaltenen Punkte von A eine Menge der zweiten Gattung bilden. Setzt man diese Betrachtung in bekannter Weise fort (vgl. Art. 5), so kommt man zu dem Schlusse, daß in der Strecke wenigstens ein solcher Punkt p vorhanden ist, daß in jeder Umgebung desselben eine Punktmenge zweiter Gattung von A enthalten ist. Ist B diese in einer Umgebung ε von p enthaltene Menge, so kann man, weil $B^{(n)}$ für jedes n nicht Null ist und einen Bestandteil von $A^{(n)}$ bildet, sagen, in ε seien Punkte von $A^{(n)}$ enthalten. Daraus folgt, daß p eine Grenzstelle von $A^{(n)}$ ist, oder daß es $A^{(n+1)}$ angehört. Demnach gehört p den Punktmengen A'', A''', A^{IV}, $\cdots$ und folglich $A^{(\omega)}$ an, das also nicht Null ist.

83. Läßt sich eine Zahl α der ersten oder zweiten Klasse angeben, für die $A^{(\alpha)}$ abzählbar ist, so ist es auch A' und mithin (Art. 51) A.

Wenn eine Menge P eine zweite Q enthält, so werden wir mit $P - Q$ die Gesamtheit der Elemente von P bezeichnen, die Q nicht angehören.

Dementsprechend kann man sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichung überzeugen:

$$A' = (A' - A'') + (A'' - A''') + \cdots + A^{(\alpha)} = \sum_{\gamma < \alpha} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}) + A^{(\alpha)}.$$

Die Glieder der Summe $\Sigma(A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)})$ bilden eine endliche oder abzählbare Menge (Art. 75), und jedes von ihnen stellt eine isolierte, also abzählbare Menge dar (Art. 50), also ist die Gesamtheit ihrer Elemente abzählbar (Art. 30). Vorausgesetzt also, daß $A^{(\alpha)}$ abzählbar ist, wird es A' ebenfalls sein (Art. 29).

84. Ist A' abzählbar, so gibt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Klasse, für welche $A^{(\alpha)} = 0$ ist.

Wir schreiben analog, wie wir es schon im vorigen Artikel getan:

$$A' = \sum_{\gamma < \Omega} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}) + A^{(\Omega)}.$$

Wenn keine der Mengen $A^{(\gamma)}$ Null ist, so kann $A^{(\gamma)}$, da es als Bestandteil der abzählbaren Menge A' (Art. 26) gleichfalls abzählbar ist, nicht perfekt sein (Art. 49), und deshalb wird $A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}$ nicht Null. Mithin ist die Gesamtheit der Glieder der Summe, die in der angegebenen Gleichung auftritt, nicht abzählbar (Art. 76), und keins

von ihnen stellt eine 0-Menge dar. Daraus folgt, daß A' — gegen die Voraussetzung — nicht abzählbar ist.

Es gibt daher Zahlen γ der ersten oder zweiten Klasse, für welche $A^{(\gamma)}$ Null ist. Unter ihnen gibt es notwendigerweise eine kleinste (Art. 78).

85. Wenn A irgend eine Menge ist, so ist, je nachdem A' abzählbar ist oder nicht, $A^{(\Omega)}$ Null oder nicht.

Ist A' abzählbar, so gibt es (Art. 84) eine Zahl γ der ersten oder zweiten Klasse, für welche $A^{(\gamma)} = 0$ ist. Daraus folgt $A^{(\Omega)} = 0$.

Wir nehmen jetzt an, A' sei nicht abzählbar. Wenn wir uns, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, A als in einer endlichen Strecke enthalten denken, so gelangen wir durch eine bereits angestellte Betrachtung (Art. 82) zu dem Schlusse, daß es in der Strecke einen solchen Punkt p gibt, daß jede Umgebung desselben eine nicht abzählbare Menge von Elementen von A enthält. Bezeichnet man die in der Umgebung ε von p enthaltene Menge mit B, so ist $B^{(\alpha)}$ für keine Zahl der ersten oder zweiten Klasse Null (ja, nicht einmal abzählbar, s. Art. 83); weil nun $B^{(\alpha)}$ in $A^{(\alpha)}$ enthalten ist, enthält die Umgebung ε Punkte von $A^{(\alpha)}$. Daraus folgt, daß p eine Grenzstelle von $A^{(\alpha)}$ ist oder in $A^{(\alpha+1)}$ enthalten ist und mithin (Art. 81) $A^{(\alpha)}$ für jedes beliebige α angehört; der Definition von $A^{(\Omega)}$ entsprechend gehört es daher $A^{(\Omega)}$ an. Folglich ist $A^{(\Omega)}$ nicht Null.

86. Ist A irgendwelche Punktmenge, so ist $A^{(\Omega)}$ perfekt[1]).

Wir denken uns A als in einer Strecke ab enthalten und weisen zuvörderst nach, daß $A^{(\Omega)}$ nicht aus einem einzigen Punkte p dieser Strecke bestehen kann. Angenommen, es sei $A^{(\Omega)} = p$, so halbiere man ap in a_1, dann $a_1 p$ in a_2 usw. Bezeichnen wir dann die in der Strecke $a_{n-1}a_n$ enthaltene Teilmenge von A' (wobei wir $a_0 = a$ annehmen) mit B_n, so ist, da $B_n^{(\Omega)}$ ja $A^{(\Omega)}$ angehört und $A^{(\Omega)}$ aus dem einzigen Punkte p besteht, welcher der Strecke $a_{n-1}a_n$ nicht angehört, $B_n^{(\Omega)} = 0$ und B_n abzählbar (Art. 85); nun ist die Gesamtheit der Strecken $a_{n-1}a_n$ abzählbar, folglich (Art. 30) ist es auch der in ap enthaltene Teil von A'. Analog beweist man, daß es der in pb enthaltene Teil von A' ist, so daß (Art. 29) — gegen die Voraussetzung — A' abzählbar, also $A^{(\Omega)}$ Null ist (Art. 85).

Demnach wird mit Rücksicht darauf, daß die Menge $A^{(\Omega)}$ abgeschlossen ist (Art. 81), zur Begründung des Satzes der Nachweis ge-

1) Dieser Satz umfaßt auch den besonderen Fall, daß A' abzählbar, also $A^{(\Omega)}$ Null ist (Art. 85), da ja eine 0-Menge perfekt ist, weil mit ihrer Ableitung identisch, die gleichfalls Null ist.

nügen, daß sie in sich dicht ist, d. h. daß jeder ihrer Punkte eine ihrer Grenzstellen ist. Ist aber q ein Punkt der Menge $A^{(\Omega)}$, der keine ihrer Grenzstellen wäre, so läßt sich eine Umgebung ε von q angeben, welche außer q selbst keinen weiteren Punkt von $A^{(\Omega)}$ enthält. Ist C die in ε enthaltene Teilmenge von A, so ist $C^{(\Omega)}$ die in ε enthaltene Teilmenge von $A^{(\Omega)}$, beschränkt sich also auf den einzigen Punkt q, was als unmöglich erwiesen worden ist.

87. Ist A irgend eine Menge, so ist die Menge $R = A' - A^{(\Omega)}$ abzählbar.

Da $A^{(\Omega)}$ perfekt ist (Art. 86) und R keine Punkte mit $A^{(\Omega)}$ gemein hat, kann kein Punkt von R Grenzstelle von $A^{(\Omega)}$ sein, d. h. für jeden Punkt von R läßt sich eine Umgebung des Punktes selbst bestimmen, die keinen Punkt von $A^{(\Omega)}$ enthält. Sei ab das Intervall, in dem, wie wir annehmen wollen, die Menge A enthalten ist, und betrachten wir den Teil von ab, der (einmal, mehrere oder unendlich viele Male) von den erwähnten Umgebungen bedeckt wird, die sich natürlich ganz oder teilweise überdecken können. Dieser wird aus einer Menge getrennter Intervalle bestehen, die (Art. 47) endlich oder abzählbar ist. Wir können diese Intervalle daher mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ bezeichnen. Sei R_n der in ε_n enthaltene Teil von R. Da R in A' enthalten ist, so ist $R^{(\Omega)}$ und folglich $R_n^{(\Omega)}$, das nur einen Teil davon bildet, in $A^{(1+\Omega)}$ oder auch $A^{(\Omega)}$ enthalten. Nun enthält aber ε_n kein Element von $A^{(\Omega)}$; mithin ist $R_n^{(\Omega)} = 0$, d. h. R_n (Art. 85) und folglich (Art. 30) R abzählbar.

88. Ist A' nicht abzählbar, so gibt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Klasse von der Art, daß $A^{(\alpha)}$ perfekt ist.

Wir greifen auf die Gleichung (Art. 84):

$$A' = \sum_{\gamma < \Omega} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}) + A^{(\Omega)}$$

zurück und stellen sie der andern gegenüber (Art. 87):

$$A' = R + A^{(\Omega)}.$$

Daraus folgern wir (s. Anm. zu Art. 53):

$$R = \sum_{\gamma < \Omega} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}).$$

Wäre keine der Mengen $A^{(\gamma)}$ perfekt, so würde keine der Mengen $(A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)})$ Null und, weil die Gesamtheit der Glieder der Summe nicht abzählbar ist (Art. 76), auch R es nicht sein, während doch R bekanntlich abzählbar ist (Art. 87). Folglich gibt es Zahlen γ, für welche $A^{(\gamma)}$ perfekt ist; und unter ihnen gibt es (Art. 78) eine kleinste.

89. Aus den Sätzen der Art. 84, 87, 88 erhält man mit Rücksicht auf denjenigen des Art. 53 die folgenden:

Ist A eine abgeschlossene abzählbare Menge, so gibt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Klasse von der Art, daß $A^{(\alpha)} = 0$ ist.

Ist A eine abgeschlossene nicht abzählbare Menge, so gibt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Klasse von der Art, daß $A^{(\alpha)}$ perfekt ist; dann ist die Menge $R = A - A^{(\alpha)}$ abzählbar.

Als Korollar ergibt sich:

Eine abgeschlossene Menge A läßt sich stets in zwei Teilmengen R, S zerlegen:

$$A = R + S,$$

von denen die eine R abzählbar, die andere S perfekt ist. Die Menge S ist immer und nur dann Null, wenn A abzählbar ist.

90. Ist A eine perfekte, in keinem Intervalle überall dichte lineare Punktmenge[1]), so läßt sich eine abzählbare und in sich dichte Punktmenge bilden, die A zur ersten Ableitung hat.

Wir dürfen die Punktmenge A als in einem bestimmten endlichen Intervalle δ enthalten voraussetzen und werden die Gesamtheit der Punkte von δ mit I bezeichnen. Setzen wir:

$$A + B = I,$$

so bezeichnet B die Gesamtheit der Punkte des Intervalles δ, welche der Menge A nicht angehören. Weil nun A keine Grenzstelle hat, die nicht A selbst angehörte, läßt sich für jeden Punkt von B eine Umgebung des Punktes selbst angeben, die kein Element von A enthält. Diese Umgebungen, die sich selbst ganz oder teilweise überdecken können, werden einmal, mehrere oder unendlich viele Male einen bestimmten Teil des Intervalls δ bedecken, der aus einer end-

1) Über die Beschaffenheit solcher Mengen läßt sich folgender Satz beweisen: Jede abgeschlossene (und folglich insbesondere jede perfekte) lineare Punktmenge, die in keinem Teile eines Intervalles δ, das sie enthält, überall dicht ist, besteht aus den Endpunkten einer im ganzen Intervall δ überall dichten Menge von Intervallen und aus den Grenzstellen der Gesamtheit dieser Endpunkte. — Als Beispiel einer perfekten, in keinem Intervall überall dichten linearen Menge können wir die Menge der Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$ anführen, wo die Konstanten c_n nur die Werte 0 und 2 annehmen können.

lichen oder abzählbaren (Art. 47) Menge getrennter Intervalle besteht. Wir nennen die Menge der linken Endpunkte P, diejenige der rechten Endpunkte Q und setzen:

$$C = P + Q.$$

Die aus der Vereinigung der beiden abzählbaren Mengen P, Q gebildete Menge C ist abzählbar (Art. 29).

Außerdem ist sie in sich dicht. Sei nämlich c irgend einer ihrer Punkte, γ irgend eine Umgebung desselben. Die Umgebung γ enthält dann sicher Punkte von A, weil c sonst kein Endpunkt eines der betrachteten Intervalle sein würde; nun muß γ, weil A in keinem Teile von δ überall dicht ist, auch Punkte enthalten, die A nicht angehören. Daraus folgt, daß innerhalb γ notwendig Punkte von P und Punkte von Q, also Punkte von C vorkommen, und daß mithin jeder Punkt von C Grenzstelle von C selbst ist, so daß C in sich dicht ist.

Wir betrachten nun einen Punkt von C'; in jeder Umgebung desselben werden sich Punkte von C und folglich nach dem, was eben bemerkt worden, Punkte von A finden, so daß die Punkte von C' Grenzstellen von A sind und deshalb — da A perfekt ist — A selbst angehören. Umgekehrt werden, da A in keinem Teile von δ überall dicht ist, in jeder Umgebung irgend eines seiner Punkte auch Punkte von B und folglich von C liegen, so daß jeder Punkt von A der Menge C' angehört.

Daraus folgt $A = C'$, und die Menge C genügt allen Bedingungen des Satzes.

91. Jede lineare perfekte Menge besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Sei A eine perfekte Menge von Punkten einer Strecke δ. Ist sie in einem Teile ε von δ (oder auch im ganzen δ) überall dicht, so enthält sie alle Punkte von ε; in der Tat sind alle diese Punkte ihr zugehörige Grenzstellen und müssen ihr folglich, weil A perfekt ist, angehören. Die Mächtigkeit von A ist also (Art. 26) $\geqq$ derjenigen der Gesamtheit der Punkte von ε; nun ist diese (Art. 38) gleich derjenigen der Gesamtheit der Punkte von δ, welche ihrerseits (Art. 26) $\geqq$ derjenigen von A ist. Daraus folgt, daß A die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Wir wollen jetzt annehmen, A sei in keinem Teile von δ überall dicht. Dann läßt sich (Art. 90) eine abzählbare und in sich dichte Menge C bilden, welche A zur Ableitung hat; da A nicht abzählbar

ist (Art. 49), so enthält A außer denen von C noch andre Punkte, und man kann schreiben:

$$A = C + D,$$

worin die Menge D sicher nicht Null ist. Die Gesamtheit der Intervalle, deren Endpunkte die Menge C bilden, werde mit I bezeichnet.

Zwischen zwei beliebigen dieser Intervalle sind andre Intervalle der Menge I enthalten; es würden in der Tat, wenn dies nicht der Fall wäre, in irgend einem Teile der zwischen den beiden betreffenden Intervallen enthaltenen Strecke Punkte von A liegen, und daher A innerhalb dieser Strecke überall dicht sein, was ausgeschlossen ist. Wir bringen jetzt die Intervalle der Menge I in eine Reihe von abnehmender Größe (vgl. Art. 47):

$$I = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots)$$

und nehmen auf irgend einer Strecke σ eine Punktmenge:

$$L = (l_1, l_2, \cdots)$$

an, die abzählbar, innerhalb der ganzen Strecke σ überall dicht ist und deren Endpunkte nicht enthält. Wir können dann zwischen den Elementen der beiden Mengen I, L eine eineindeutige, vollständige Beziehung derart herstellen, daß, wenn sich ein Intervall ε rechts von einem andern in der Strecke δ befindet, der dem ersteren entsprechende Punkt sich rechts von dem Punkte befindet, der dem andern im Abschnitte σ entspricht. Zu diesem Zwecke läßt man vor allem dem Intervalle ε_1 den Punkt l_1 entsprechen, den wir auch p_1 nennen werden. In L sind sicher Punkte vorhanden, die sich in bezug auf l_1 in derselben relativen Lage befinden, in welcher sich ε_2 in bezug auf ε_1 befindet; ist l_{r_2} derjenige von ihnen, welcher den niedrigsten Index hat, so bezeichnen wir ihn mit p_2 und betrachten ihn als homolog zu ε_2. Fährt man in dieser Weise fort, so entspricht, wie man sieht, jedem Abschnitte ε_i ein und nur ein Punkt l_{r_i} oder p_i. Man bemerkt leicht, daß kein Punkt l von der Beziehung ausgeschlossen bleibt. Sind nämlich die Punkte $p_1, p_2, \cdots, p_s$ wirklich bestimmt und ist l_t unter den verbleibenden Punkten l der Punkt vom niedrigsten Index, so sind in der Menge I sicher Intervalle vorhanden, welche sich in bezug auf $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$ in derselben relativen Lage befinden, in welcher sich l_t in bezug auf $p_1, p_2, \cdots, p_s$ befindet; zu demjenigen unter ihnen, der den niedrigsten Index hat, ist dann in L offenbar der Punkt l_t homolog.

Wir bezeichnen mit J die Gesamtheit der Punkte des Abschnittes σ und definieren die Menge M mittelst der Gleichung:

$$J = L + M.$$

Ist m ein Punkt von M und nimmt man eine linke Umgebung desselben, so liegen in dieser sicher Punkte der Menge:

$$L = p_1, p_2, \cdots;$$

p_{h_1} sei derjenige von ihnen, der den niedrigsten Index hat. Wir nehmen eine neue Umgebung links von m, die nicht von größerer Länge als der Hälfte der vorigen ist und p_{h_1} nicht enthält, und p_{h_2} sei von den darin enthaltenen Punkten p derjenige vom niedrigsten Index; und so fort. Die Punkte $p_{h_1}, p_{h_2}, \cdots$ werden eine Folge mit wachsenden Indices bilden, die von links nach rechts fortschreitet und m zur Grenze hat. Ebenfalls von links nach rechts werden die homologen Intervalle $\varepsilon_{h_1}, \varepsilon_{h_2}, \cdots$ fortschreiten und sich folglich — da ihre Größe mit wachsenden Indices abnimmt — unbegrenzt einem bestimmten Punkte n nähern, der A angehört, weil in jeder Nähe desselben Punkte von C und folglich von A vorkommen. Man kann gleichwohl zeigen, daß er C nicht angehört. Wäre er nämlich ein (selbstverständlich linker) Endpunkt eines Intervalles ε_k, so würde der ε_k in σ entsprechende Punkt p_k sich rechts von allen Punkten $p_{h_1}, p_{h_2}, \cdots$ befinden und, da er nicht mit m zusammenfallen kann, weil dieses L nicht angehört, rechts von m stehen. Nennt man daher p_s irgend einen von den zwischen m und p_k enthaltenen Punkten p, so müßte ε_s rechts von allen Intervallen $\varepsilon_{h_1}, \varepsilon_{h_2}, \cdots$ und links von ε_k, also links vom Punkte n stehen; allein das ist unmöglich, weil, wenn man links von n eine Umgebung von geringerer Breite als ε_s nimmt, in ihr sicher Intervalle ε_{h_i} vorkommen. Mithin gehört der Punkt n der Menge D an.

Halten wir den Punkt m fest und nehmen wir die Folge $p_{h_1}, p_{h_2}, \cdots$ auf verschiedene Weise, so erhalten wir eine Folge $\varepsilon_{h_1}, \varepsilon_{h_2}, \cdots$ von Intervallen, die von denen der ersten verschieden sind. Die Grenze n ändert sich gleichwohl nicht, weil jedes Intervall ε, das rechts von allen denen der ersten Folge steht, ebenso rechts von allen denen der zweiten stehen muß und umgekehrt.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich umkehren, indem man von einem Punkte n von D ausgeht, um zu einem Punkte m von M zu gelangen.

Damit ist zwischen den Punktmengen D und M eine eindeutige, vollständige Beziehung hergestellt; man hat daher:

$$D \sim M.$$

Da andrerseits C und L abzählbar, A (Art. 49) und J (Art. 36) nicht abzählbar sind, hat man (Art. 32):

$$A \sim D, \quad J \sim M.$$

Daraus folgt:

$$A \sim J,$$

d. h. $\overline{\overline{A}} = \aleph$.

92. Jede abgeschlossene lineare Menge ist entweder abzählbar, oder besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums[1]).

Für jedwede abgeschlossene Menge war (Art. 89) gefunden worden:

$$A = R + S,$$

worin R abzählbar und S perfekt ist. Ist S Null, so hat man:

$$A = R,$$

also

$$\overline{\overline{A}} = \aleph_0;$$

ist S perfekt, so hat man (Art. 32):

$$A \sim S,$$

also (Art. 91):

$$\overline{\overline{A}} = \aleph.$$

93. Jede perfekte Menge von Punkten, die in einem Raume von einer beliebigen Zahl n von Dimensionen liegen, besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Wir setzen der Einfachheit wegen $n = 2$ und denken uns weiterhin die Punkte der perfekten Menge A innerhalb des Quadrates gelegen, das die Strecken $\overline{01}$ der beiden rechtwinkligen Koordinatenachsen als benachbarte Seiten hat. Wir nennen dann:

B die Gesamtheit der Punkte des Quadrates,

B_1 die Gesamtheit der Punkte von B, für welche beide Koordinaten irrational sind,

B_2 die Gesamtheit der Punkte von B, für welche nur eine Koordinate irrational ist,

B_3 die Gesamtheit der Punkte von B, für welche beide Koordinaten rational sind,

A_1, A_2, A_3 die beziehentlich in B_1, B_2, B_3 enthaltenen Bestandteile von A.

---

1) Cantor hat wiederholt versichert, daß dieser Satz für alle linearen Mengen gelte, ein strenger Beweis dafür ist aber noch nicht geliefert worden. Der von P. Tannery 470 ist ungenügend Levi 262 teilt zwar mit, er habe diesen Satz bewiesen, sein Beweis ist aber bisher noch nicht veröffentlicht worden.

Wir wollen dann nachweisen, daß A_1 und A_2 entweder endlich oder abzählbar sind oder die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen, und daß A_3 abzählbar ist.

Betrachten wir zunächst A_1, so wollen wir voraussetzen, es sei weder endlich noch abzählbar.

Wir setzen auf einer beliebigen Geraden einen Nullpunkt fest, nehmen auf ihr die Strecke $\overline{01}$ an und nennen:

C die Gesamtheit der Punkte der Strecke,

C_1 die Gesamtheit der Punkte von C mit irrationaler Abscisse,

C_2 die Gesamtheit der Punkte von C mit rationaler Abscisse.

Zwischen den Punkten c_t von C_1 und den Punkten b_{u_1, u_2} von B_1 läßt sich, wie in Art. 42, eine eineindeutige, vollständige Beziehung herstellen. Wir nennen E die Gesamtheit der Punkte von C_1, die denen von A_1 entsprechen, E_1 die Gesamtheit der Punkte der Ableitung E', die C_1 angehören, E_2 die Gesamtheit derjenigen, die C_2 angehören, so daß:

$$E' = E_1 + E_2 .$$

Die Menge E, und folglich (Art. 51) die Menge E', besitzt eine höhere als die erste Mächtigkeit.

Ist c_r ein Punkt von E_1 und setzen wir unter Benutzung der Bezeichnung in Art. 42:

$$r = (\varrho_1, \varrho_2, \cdots),$$

so läßt sich, weil c_r Grenzstelle von E ist, für jeden Wert von k von 1 an in E ein Punkt c_t von der Art finden, daß die ersten $2k$ Glieder der Entwicklung:

$$t = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$$

mit denen von r zusammenfallen; diese Punkte bilden dann eine Folge mit der Grenze c_r. Die homologen Punkte in B_1 bilden eine Folge von der Art, daß die ersten k Glieder der Kettenbruchentwicklungen der Koordinaten des k-ten Punktes mit denen aller folgenden Punkte zusammenfallen. Daraus folgt, daß auch diese Folge einen Grenzpunkt b_{s_1, s_2} besitzt, der irrationale Koordinaten hat und folglich B_1 angehört. Nun entsprechen die Punkte derjenigen Folge, deren Grenze b_{s_1, s_2} ist, Punkten der Menge E und gehören daher der Menge A_1 und folglich auch A an; da aber die Menge A perfekt ist, so wird der Punkt b_{s_1, s_2} zu A und, da seine Koordinaten irrational sind, zu A_1 gehören; der ihm homologe Punkt c_r in C_1 wird daher E angehören. Jeder Punkt von E_1 gehört also E an oder, mit andern Worten, alle

Punkte von E', die E nicht angehören, haben eine rationale Abscisse; daraus folgt (nach der in Art. 51 festgesetzten Bezeichnung), daß die Menge:

$$E' - D(E, E')$$

abzählbar oder endlich ist (Art. 26, 33). Andrerseits ist die Menge:

$$E - D(E, E'),$$

weil sie isoliert ist, abzählbar oder endlich (Art. 50). Daraus folgt (Art. 32):

$$E' \sim D(E, E'), \quad E \sim D(E, E'),$$

mithin:

$$E' \sim E.$$

Nun besitzt E', weil es (Art. 7) eine abgeschlossene, nicht abzählbare Menge ist, die Mächtigkeit des Kontinuums (Art. 92); folglich läßt sich von E dasselbe sagen und ebenso von A_1, welches mit E äquivalent ist.

Wir betrachten jetzt den Bestandteil F von A_2, der auf der Geraden $x = v$ liegt, wo v eine zwischen 0 und 1 enthaltene rationale Zahl ist. Die Punkte von F haben dann eine irrationale Ordinate; wenn nun ein Punkt von F' eine irrationale Ordinate hat, so schließt man, wie kurz vorher, daß er, da A perfekt ist, A und folglich F angehören muß. Daraus folgt dann wieder, daß:

$$F' - D(F, F')$$

aus Punkten mit rationaler Ordinate besteht und mithin abzählbar ist; endlich folgert man durch dieselben Betrachtungen wie früher, daß F entweder abzählbar ist oder die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Da nun jedem rationalen Werte der Abscisse oder der Ordinate eine Menge wie F entspricht und der Inbegriff dieser Mengen A_2 bildet, so darf man schließen (Art. 30, 43), daß A_2 entweder (endlich oder) abzählbar ist oder die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Schließlich ist A_3 (Art. 39) (endlich oder) abzählbar.

Mithin ist A entweder (endlich oder) abzählbar oder es besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Nun kann A, weil es perfekt ist, nicht abzählbar sein (Art. 49); also besitzt es die Mächtigkeit des Kontinuums.

94. Daraus läßt sich wie oben schließen:

Jede unendliche abgeschlossene Menge von Punkten, die in einem Raume von einer beliebigen Zahl von Dimensionen liegen, ist entweder abzählbar oder besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums.

Zweiter Teil.

Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen[1]).

Funktionen der Punkte eines Bereichs.

95. Wenn jedem Punkte eines Bereichs[2]) von beliebiger Dimensionszahl ein einziger reeller oder komplexer Wert entspricht, so sagt man, die Gesamtheit dieser Werte bilde eine eindeutige Funktion der Punkte des Bereichs. Die Funktion heißt reell, wenn alle ihre Werte reell sind.

Wir werden auf die Funktionen der Punkte eines Bereichs gewisse Definitionen und Eigenschaften zu übertragen suchen, die sich auf die gewöhnlichen Funktionen einer reellen Veränderlichen beziehen, indem wir uns zumeist auf einen Bereich von zwei Dimensionen beschränken.

96. Unter der oberen bezw. unteren Grenze einer reellen Funktion der Punkte eines Bereichs verstehen wir eine Zahl von der Art, daß kein Wert der Funktion größer bezw. kleiner ist als sie, daß aber Werte der Funktion vorhanden sind, die von ihr um weniger als eine beliebig kleine positive Größe σ verschieden sind.

Nimmt die Funktion Werte an, die größer bezw. kleiner sind als irgend ein vorgeschriebener Wert, so sagt man, sie habe zur oberen bezw. unteren Grenze $+\infty$ bezw. $-\infty$.

Es existiert stets eine obere bezw. untere Grenze, und zwar nur eine.

---

1) Nachschlagewerke: Bianchi 33, Biermann 36, 37, Borel 46, 47, Burkhardt 98, Forsyth 155, Fouët 156, Harkness und Morley 197, Hermite 201, Osgood 338, Petersen 365, Pincherle 383, 384, 387, Puzyna 420, Tannery und Molk 468, Thomae 477, Timtschenko 481, Vivanti 511. — S. auch Hurwitz 211.

2) Wenn wir von einem Bereich sprechen, so betrachten wir stets auch die Punkte seiner Begrenzung (d. h. diejenigen Punkte, von denen jede Umgebung Punkte enthält, die dem Bereich angehören, und Punkte, die ihm nicht angehören) als zu ihm gehörig.

Übersteigen die Werte der Funktion jede beliebig festgesetzte Zahl, so ist die obere Grenze vorhanden und gleich $+\infty$; und es ist klar, daß es keine andre geben kann.

Seien dagegen alle Werte der Funktion kleiner als eine gegebene Zahl p. Denken wir sie uns nach zunehmender Größe geordnet, so erhalten wir eine steigende Folge reeller Zahlen, die sämtlich kleiner sind als die bestimmte Zahl p; und diese Folge besitzt stets eine Grenze[1]). Man kann leicht beweisen, daß sie die obere Grenze der gegebenen Menge ist.

Die obere (untere) Grenze bezeichnet man auch als Maximum (Minimum), wenn sie einer der Werte ist, welche die Funktion annimmt.

Greift man zwei beliebige Punkte des Bereichs heraus und bildet die Differenz der entsprechenden Werte der (reellen oder nicht reellen) Funktion, so besitzt die Gesamtheit der absoluten Werte der so erhaltenen Größen eine obere Grenze, welche man die Schwankung der Funktion in jenem Bereiche nennt.

Für eine reelle Funktion ist die Schwankung gleich der Differenz zwischen ihrer oberen und ihrer unteren Grenze.

97. Ist L die obere, l die untere Grenze einer reellen Funktion der Punkte eines Bereichs, so ist in dem Bereiche mindestens ein Punkt von der Art vorhanden, daß in jeder Umgebung desselben die obere Grenze der Funktion L, und ein zweiter von der Art, daß in jeder Umgebung desselben die untere Grenze l ist.

Wir nehmen ein Rechteck an, das in seinem Innern den gegebenen Bereich C enthält. Teilen wir es durch Parallele zu den Seiten in 4 gleiche Rechtecke, so ist mindestens in einem der Teile, in welche der gegebene Bereich auf diese Weise zerlegt wird, die obere Grenze der Funktion gleich L; wäre sie nämlich in allen vier Teilen niedriger als L, so würde sie es auch im ganzen Bereiche sein. Sei C_1 ein Teil, in welchem die obere Grenze L ist. Wir teilen das Rechteck, in welchem er liegt, in 4 gleiche Teile und fahren damit unbegrenzt fort. Man erhält so eine Folge von Rechtecken, von denen ein jedes in dem vorangehenden enthalten ist und ein Viertel von ihm beträgt, und in deren jedem die obere Grenze L ist. Diese Rechtecke bestimmen gemäß Art. 5 einen Punkt, der innerhalb aller dieser Rechtecke liegt. In jeder Umgebung dieses Punktes ist die obere Grenze L; sie kann nämlich nicht kleiner als L sein, weil man

1) Siehe z. B.: Capelli, Istituzioni di analisi algebrica, Napoli 1902, S. 284.

zu jeder vorgegebenen Umgebung des betrachteten Punktes ein von derselben umschlossenes Rechteck finden kann, in welchem die obere Grenze L ist. Der Punkt gehört ferner dem gegebenen Bereiche an, weil sich in jeder Umgebung von ihm Punkte des Bereichs vorfinden.

Analog gestaltet sich der Beweis für die untere Grenze.

98. Eine Funktion $f(x)$ der Punkte x eines Bereichs heißt stetig in einem Punkte c, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe σ eine Umgebung von c finden läßt, für deren sämtliche Punkte[1]) die Ungleichung gilt:

$$|f(x) - f(c)| < \sigma.$$

Mit dieser Definition ist die andere gleichbedeutend:

Eine Funktion heißt stetig in einem Punkte c, wenn sich nach Annahme einer beliebigen positiven Größe σ eine Umgebung von c finden läßt, in welcher die Schwankung kleiner ist als σ.

In der Tat läßt sich, wenn $f(x)$ in c nach der ersten Definition stetig ist, nach Annahme eines beliebigen σ eine Umgebung von c so bestimmen, daß für jeden Punkt x derselben:

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\sigma}{3}$$

ist; sind daher x_1, x_2 irgend zwei Punkte der betrachteten Umgebung, so hat man:

$$|f(x_1) - f(c)| < \frac{\sigma}{3}, \quad |f(x_2) - f(c)| < \frac{\sigma}{3}$$

und folglich:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{2\sigma}{3}.$$

Es ergibt sich hieraus, daß die Schwankung nicht größer als $\frac{2\sigma}{3}$, also kleiner als σ ist.

Läßt sich umgekehrt, wie man auch σ wähle, eine Umgebung von c bestimmen, in welcher die Schwankung kleiner ist als σ, so gilt für jeden beliebigen Punkt x dieser Umgebung:

$$|f(x) - f(c)| < \sigma.$$

99. Die absoluten Werte einer stetigen Funktion bilden eine (reelle) stetige Funktion.

---

1) Wenn c auf der Begrenzung des betrachteten Bereichs liegt, so versteht sich von selbst, daß von jeder Umgebung von c nur der im Bereich selbst enthaltene Teil berücksichtigt werden darf.

In der Tat hat man, da der absolute Betrag der Differenz zweier Größen niemals kleiner ist als die Differenz ihrer absoluten Beträge:

$$0 \leqq \big| |f(x)| - |f(c)| \big| \leqq |f(x) - f(c)|;$$

wenn folglich in einer Umgebung von c:

$$|f(x) - f(c)| < \sigma$$

ist, so ergibt sich daraus:

$$\big| |f(x)| - |f(c)| \big| < \sigma.$$

100. Wenn eine Funktion in einem ganzen Bereiche (d. h. in allen Punkten des Bereichs) stetig ist, so läßt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe σ eine bestimmte Größe r der Art finden, daß die Schwankung der Funktion in jedem in dem Bereiche enthaltenen Kreise vom Radius r kleiner ist als σ **(Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit).**

Ist x irgend ein Punkt des betrachteten Bereichs, so läßt sich um x ein Kreis beschreiben, in welchem die Schwankung der Funktion kleiner ist als σ. Ist $\varrho(x)$ die obere Grenze der Radien derjenigen Kreise mit dem Mittelpunkt x, für welche diese Bedingung erfüllt ist, so läßt sich $\varrho(x)$ in dem betrachteten Bereiche als reelle und positive Funktion von x auffassen und besitzt demnach eine untere Grenze r, die positiv oder Null ist. Es läßt sich daher (Art. 97) ein Punkt x_0 so bestimmen, daß in jeder Umgebung desselben die untere Grenze von $\varrho(x)$ gleichfalls r ist. Beschreibt man mit dem Radius $\varrho(x_0)$ um x_0 einen Kreis, so ist entsprechend der Definition der Funktion ϱ die Schwankung der Funktion in jedem Bereiche innerhalb dieses Kreises kleiner als σ; sie wird es im besondern in jedem Kreise sein, der mit einem Radius $\leqq \frac{1}{2}\varrho(x_0)$ um einen Punkt beschrieben wird, der innerhalb des Kreises um x_0 mit dem Radius $\frac{1}{2}\varrho(x_0)$ liegt. Daraus folgt, daß für irgend einen Punkt x dieses letzteren Kreises $\varrho(x) \geqq \frac{1}{2}\varrho(x_0)$ ist, und daß mithin die untere Grenze der Funktion $\varrho(x)$ innerhalb desselben $\geqq \frac{1}{2}\varrho(x_0)$ ist. Nun ist diese untere Grenze nach der Art, wie der Punkt x_0 gewählt worden, gleich r; folglich ist $r \geqq \frac{1}{2}\varrho(x_0)$, d. h. r ist nicht Null, sondern positiv.

Weil demnach für alle Punkte x des betrachteten Bereichs die Ungleichung $\varrho(x) \geqq r$ gilt, so ist die Schwankung in jedem mit dem Radius r um irgend einen Punkt des Bereichs beschriebenen Kreise sicherlich kleiner als σ.

101. Wenn eine reelle Funktion in einem ganzen Bereiche stetig und L bezw. l ihre obere bezw. untere Grenze

ist, so ist mindestens ein Punkt vorhanden, in dem sie den Wert L, und ein zweiter, in dem sie den Wert l annimmt. — Kürzer: Eine in einem Bereiche stetige reelle Funktion besitzt darin ein Maximum und ein Minimum.

Auf Grund des Satzes in Art. 97 läßt sich ein Punkt c so bestimmen, daß die obere Grenze der Funktion für jede Umgebung desselben gleich L ist. Nehmen wir an, die Funktion habe in c nicht den Wert L, so ist alsdann:

$$f(c) < L.$$

Es werde $L - f(c) = \tau$ gesetzt. Da die Funktion in c stetig ist, läßt sich eine Umgebung von c so bestimmen, daß für alle ihre Punkte:

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\tau}{2}$$

wird. Da andrerseits die obere Grenze der Funktion in dieser Umgebung gleich L ist, lassen sich darin Punkte x angeben, für welche:

$$|L - f(x)| < \frac{\tau}{2}$$

ist. Aus beiden Beziehungen folgt:

$$L - f(c) < \tau,$$

was widersinnig ist.

Analog ist der Beweis für die untere Grenze.

102. Eine in einem zusammenhängenden[1]) Bereiche stetige reelle Funktion nimmt darin jeden Wert an, der zwischen ihrem Maximum und ihrem Minimum enthalten ist.

Sei M ein zwischen l und L liegender Wert.

Nach dem vorigen Satze gibt es zwei Punkte c, d von der Art, daß:

$$f(c) = l, \quad f(d) = L$$

ist. Es werde c mit d durch eine Linie λ verbunden, die sich selbst nicht schneidet und vollständig innerhalb des betrachteten Bereiches enthalten ist. Wegen der Stetigkeit der Funktion läßt sich nach Annahme einer beliebigen positiven Größe σ ein Punkt p der Linie λ so bestimmen, daß die Funktion auf dem ganzen Bogen cp von l um weniger als σ verschieden ist. Nehmen wir im besondern $\sigma = M - l$, dann bleibt die Funktion auf dem ganzen Bogen cp kleiner als M.

---

1) Ein Bereich heißt zusammenhängend, wenn irgend zwei Punkte desselben sich durch eine ganz im Innern des Bereichs liegende Linie verbinden lassen.

Da diese Eigenschaft offenbar nicht dem ganzen Bogen cd zukommt, so läßt sich auf der Linie λ ein Punkt e so bestimmen, daß $f(x)$, falls p auf dem Bogen ce liegt, in allen Punkten x des Bogens cp kleiner ist als M, während diese Ungleichung nicht für alle Punkte dieses Bogens besteht, falls p auf ed liegt. Es läßt sich nun leicht beweisen, daß $f(e) = M$ ist.

Es möge zunächst $f(e) < M$ sein. Wird $f(e) = M - \theta$ gesetzt, so läßt sich auf der Linie λ zwischen e und d ein Punkt p so bestimmen, daß auf dem ganzen Bogen ep:

$$|f(x) - f(e)| < \theta,$$

folglich:

$$f(x) < M$$

ist. Es gilt dann für den ganzen Bogen cp die Ungleichung $f(x) < M$, was unmöglich ist.

Es sei nun umgekehrt $f(e) > M$. Wird $f(e) = M + \theta$ gesetzt, so läßt sich auf der Linie λ zwischen c und e ein Punkt p so bestimmen, daß für den ganzen Bogen pe:

$$|f(x) - f(e)| < \theta,$$

folglich:

$$f(x) > M$$

ist. Der Bogen cp hat dann die Eigenschaft, daß $f(x)$ nicht in allen seinen Punkten kleiner ist als M, was wiederum unmöglich ist.

Folglich ist $f(e) = M$.

103. Die Summe zweier (oder mehrerer) in einem Punkte stetiger Funktionen ist eine in diesem Punkte stetige Funktion.

Es seien $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei in einem Punkte c stetige Funktionen. Nehmen wir σ willkürlich an, so läßt sich eine Umgebung ε_1 von c bestimmen, für deren sämtliche Punkte:

$$(1) \qquad |f_1(x) - f_1(c)| < \frac{\sigma}{2}$$

ist, und eine zweite Umgebung ε_2 von c, für deren sämtliche Punkte ebenfalls:

$$(2) \qquad |f_2(x) - f_2(c)| < \frac{\sigma}{2}$$

ist.

Für die den beiden Umgebungen ε_1, ε_2 gemeinsamen Punkte des Bereiches ε gelten dann (1), (2) gleichzeitig; aus ihnen folgt:

$$|[f_1(x) + f_2(x)] - [f_1(c) + f_2(c)]| < \sigma,$$

womit die Stetigkeit der Funktion $f_1(x) + f_2(x)$ im Punkte c bewiesen ist.

104. Das Produkt zweier (oder mehrerer) in einem Punkte stetiger Funktionen ist eine in diesem Punkte stetige Funktion.

Die Stetigkeit der beiden Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ im Punkte c läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Welches auch die reelle positive Größe τ sei, stets lassen sich zwei Umgebungen ε_1, ε_2 von c angeben, für deren sämtliche Punkte beziehentlich:

$$(1) \qquad f_1(x) = f_1(c) + \alpha_1 \tau, \quad f_2(x) = f_2(c) + \alpha_2 \tau$$

ist, wo $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| < 1$ ist. In dem ε_1, ε_2 gemeinsamen Bereiche ε gelten dann die Gleichungen (1) gleichzeitig. Aus ihnen folgt:

$$f_1(x) f_2(x) = f_1(c) f_2(c) + \tau[\alpha_2 f_1(c) + \alpha_1 f_2(c) + \alpha_1 \alpha_2 \tau]$$

und daraus, wenn man beachtet, daß der absolute Betrag der Summe niemals die Summe der absoluten Beträge übersteigt, und mit Rücksicht auf die Bedingungen, denen α_1, α_2 unterliegen:

$$|f_1(x) f_2(x) - f_1(c) f_2(c)| < \tau[|f_1(c)| + |f_2(c)| + \tau].$$

Nehmen wir σ beliebig an und wählen wir τ so, daß es den beiden Bedingungen:

$$\tau < 1, \quad \tau < \frac{\sigma}{|f_1(c)| + |f_2(c)| + 1}$$

genügt, so ist für alle Punkte des Bereichs ε:

$$|f_1(x) f_2(x) - f_1(c) f_2(c)| < \sigma,$$

eine Beziehung, welche die Stetigkeit der Funktion $f_1(x) f_2(x)$ im Punkte c beweist.

105. Die reziproke Funktion einer in einem Punkte stetigen und nicht verschwindenden Funktion ist in diesem Punkte stetig.

Welches auch die positive Größe τ sei, stets läßt sich der Voraussetzung nach eine Umgebung ε des Punktes c angeben, für deren sämtliche Punkte:

$$f(x) = f(c) + \alpha\tau$$

ist, wo $|\alpha| < 1$ ist; außerdem ist $f(c) \neq 0$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)} = -\frac{\alpha\tau}{f(c)[f(c) + \alpha\tau]},$$

mithin:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)}\right| < \frac{\tau}{|f(c)|\,|f(c) + \alpha\tau|}.$$

Nun läßt sich, wenn σ beliebig gegeben ist, τ so wählen, daß:

$$\tau < \frac{|f(c)|}{2}, \quad \tau < \frac{\sigma}{2}|f(c)|^2$$

ist. Alsdann wird:

$$|f(c) + \alpha\tau| > |f(c)| - \tau > \frac{|f(c)|}{2}$$

und folglich:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)}\right| < \frac{2\tau}{|f(c)|^2} < \sigma;$$

durch diese Beziehung ist die Stetigkeit der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ im Punkte c bewiesen.

106. Kombinieren wir diesen Satz mit dem des vorigen Artikels, so erhalten wir folgenden Satz:

Der Quotient zweier in einem Punkte stetiger Funktionen, von denen die Funktion im Nenner in diesem Punkte nicht Null ist, ist eine in dem Punkte selbst stetige Funktion.

107. Ist eine Reihe in einem Punkte stetiger Funktionen in einer Umgebung dieses Punktes gleichmäßig konvergent[1]), so ist die Summe der Reihe eine in diesem Punkte stetige Funktion.

Sei ε die Umgebung des Punktes c, in welcher die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ gleichmäßig konvergent ist. Nach Wahl eines beliebigen σ läßt sich eine Zahl n so bestimmen, daß für alle Punkte x von ε:

(1) $$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty} f_h(x)\right| < \frac{\sigma}{3},$$

folglich im besondern:

(2) $$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty} f_h(c)\right| < \frac{\sigma}{3}$$

---

1) Es sei daran erinnert, daß eine Summe von Funktionen $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ in einem Bereiche gleichmäßig konvergent genannt wird, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl σ eine Zahl n der Art bestimmen läßt, daß für alle Punkte des Bereichs:

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty} f_h(x)\right| < \sigma$$

ist.

ist. Da andrerseits $\sum_{h=1}^{n} f_h(x)$ eine im Punkte c stetige Funktion ist (Art. 103), so läßt sich eine Umgebung ε' des Punktes c angeben, für deren sämtliche Punkte:

$$(3) \qquad \left| \sum_{h=1}^{n} f_h(x) - \sum_{h=1}^{n} f_h(c) \right| < \frac{\sigma}{3}$$

ist. In dem ε, ε' gemeinsamen Bereiche gelten dann die Ungleichungen (1), (3) gleichzeitig; kombinieren wir sie mit der Ungleichung (2), die wir auch folgendermaßen schreiben können:

$$\left| -\sum_{h=n+1}^{\infty} f_h(c) \right| < \frac{\sigma}{3},$$

so erhalten wir:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x) - \sum_{h=1}^{\infty} f_h(c) \right| < \sigma.$$

Damit ist die Stetigkeit der Funktion $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ im Punkte c bewiesen.

Potenzreihen.

108. Die Erörterung der allgemeineren Funktionen der Punkte eines Bereichs beiseite lassend, werden wir jetzt den Punkten der Ebene zunächst eine arithmetische Bedeutung beilegen und uns mit denjenigen Funktionen beschäftigen, deren Wert in einem Punkte man erhält, indem man mit dem durch den Punkt selbst dargestellten Werte arithmetische Operationen vornimmt.

Die Ebene werden wir von nun an in der üblichen Weise als das Bild der Gesamtheit aller komplexen Zahlen betrachten. Wir nehmen also zwei rechtwinklige Koordinatenachsen an und betrachten als das Bild der komplexen Zahl $x + iy$ den Punkt der Ebene, der die Abscisse x und die Ordinate y hat. Die Punkte der x-Achse stellen also im besondern die reellen Werte dar. Hiermit wird die Theorie der linearen Mengen zur Theorie der Mengen von reellen Zahlen, und die Theorie der zweidimensionalen Mengen zur Theorie der Mengen von komplexen Zahlen. Überhaupt gewinnen damit allgemein die geometrischen Theorien des ersten Teiles auch eine arithmetische Bedeutung.

Die einfachsten unter den durch arithmetische Operationen erzeugten Funktionen erhält man dadurch, daß man die durch die Punkte der Ebene dargestellte komplexe Variable x mit andern reellen oder komplexen, konstanten numerischen Werten mittels einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen verknüpft. Dergleichen Ausdrücke nennt man Polynome; ihre Untersuchung ist Sache der elementaren Algebra.

Die nächstliegende Verallgemeinerung der Polynome ergibt sich, wenn man voraussetzt, daß in einem nach steigenden Potenzen der Variabeln geordneten Polynome die Anzahl der Glieder über jede Grenze hinaus wachse. Man erhält so eine Reihe, deren Glieder ganze, positive und wachsende Potenzen der Variabeln enthalten oder, wie man kürzer sagt, eine Potenzreihe.

109. Liegt die Potenzreihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \tag{1}$$

vor und setzt man:

$$|a_h| = \alpha_h, \quad |x| = \xi,$$

so lassen sich alle reellen nicht negativen Zahlen in zwei Klassen A, B teilen, je nachdem sie, in der Reihe mit reellen und positiven Gliedern:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h \tag{2}$$

an Stelle von ξ gesetzt, diese Reihe konvergent oder divergent machen. Es ist klar, daß, wenn eine Zahl der Klasse A (oder B) angehört, jede Zahl, die kleiner (größer) ist als sie, derselben Klasse angehört. Es gibt folglich eine einzige Zahl ϱ, die weder kleiner ist als irgend eine Zahl der Klasse A noch größer als irgend eine Zahl der Klasse B, die mithin die Eigenschaft besitzt, daß die Reihe (2) für jedes $\xi < \varrho$ konvergent, für jedes $\xi > \varrho$ divergent ist. Welcher der beiden Klassen die Zahl ϱ angehört, ob also die Reihe (2) für $\xi = \varrho$ konvergent oder divergent ist, läßt sich nur in jedem besondern Falle entscheiden.

Der Klasse A gehört in jedem Falle die Zahl 0 an, weil sich die Reihe (2) für $\xi = 0$ auf ihr erstes Glied reduziert. Enthält sie keine weitere Zahl, so ist $\varrho = 0$. Es kann umgekehrt vorkommen, daß alle reellen und positiven Zahlen der Klasse A angehören; dann setzt man $\varrho = \infty$.

Beschreibt man mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt einen Kreis, so gilt für alle Punkte innerhalb desselben $|x| = \xi < \varrho$, so daß die Reihe (2) konvergent, die Reihe (1) folglich absolut konvergent ist;

umgekehrt gilt für alle Punkte außerhalb desselben $|x| = \xi > \varrho$, so daß die Reihe (2) divergent, die Reihe (1) also nicht absolut konvergent ist. Über die Punkte der Peripherie läßt sich auf allgemeine Weise nichts entscheiden.

Die Zahl ϱ heißt Konvergenzradius, der um den Anfangspunkt mit dem Radius ϱ beschriebene Kreis Konvergenzkreis der Reihe (1).

Beispiele:

$$1 + x + x^2 + \cdots \text{ hat den Konvergenzradius } 1;$$
$$1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + \cdots \quad „ \quad „ \quad „ \quad 0;$$
$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad „ \quad „ \quad „ \quad \infty.$$

110. In den Punkten außerhalb ihres Konvergenzkreises ist eine Potenzreihe nicht einmal bedingt konvergent.

Angenommen, die Reihe sei für einen Wert von x von der Art, daß $|x| = \xi > \varrho$ ist, konvergent, dann muß sein:

$$\lim_{h=\infty} a_h x^h = 0$$

und folglich:

$$\lim_{h=\infty} \alpha_h \xi^h = 0.$$

Dies besagt, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe σ läßt sich eine Zahl n der Art finden, daß für jedes $h > n$ gilt:

$$\alpha_h \xi^h < \sigma.$$

Ist also η eine zwischen ϱ und ξ enthaltene Größe, so wird:

$$\alpha_h \eta^h < \sigma \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^h$$

und folglich:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \eta^h < \sigma \sum_{h=n+1}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^h = \sigma \frac{\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\eta}{\xi}}$$

sein; hiernach würde die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \alpha_h \eta^h$ konvergent sein, während sie doch, da $\eta > \varrho$ ist, divergent ist. Folglich kann die gemachte Voraussetzung nicht statthaben.

Der Satz läßt sich auch folgendermaßen aussprechen: Konvergiert eine Potenzreihe für einen bestimmten Wert von x, so konvergiert sie absolut für jeden Wert von x von kleinerem absoluten Betrage.

111. Eine Potenzreihe ist in jedem Kreise um den Anfangspunkt gleichmäßig konvergent, dessen Radius kleiner ist als der Konvergenzradius.

Sei $\varrho > 0$ der Konvergenzradius der Reihe, ϱ' irgend eine positive Zahl, die kleiner ist als ϱ. Weil die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ für $\xi = \varrho'$ konvergiert, so läßt sich nach Annahme einer beliebigen positiven Größe σ eine Zahl n von der Art bestimmen, daß:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \varrho'^h < \sigma.$$

Daraus folgt für jedes $\xi \leqq \varrho'$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \xi^h \leqq \sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \varrho'^h < \sigma$$

und mithin für jeden Punkt x des Kreises mit dem Radius ϱ' um den Anfangspunkt (mit Einschluß der Peripherie):

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} a_h x^h \right| < \sigma,$$

womit der Satz bewiesen ist.

112. Beachtet man, daß (Art. 104) x^h eine stetige Funktion von x ist, so gilt (Art. 107, 111) das folgende Theorem:

Eine Potenzreihe ist in jedem Kreise um den Anfangspunkt, dessen Radius kleiner ist als der Konvergenzradius der Reihe, eine stetige Funktion.

Ist ein im Innern des Konvergenzkreises liegender Bereich (d. h. ein Bereich, dessen sämtliche Punkte mit Einschluß der Begrenzung dem Konvergenzkreise, nicht aber dessen Peripherie angehören) vorhanden, so läßt sich stets um den Anfangspunkt ein Kreis beschreiben, dessen Radius kleiner ist als der Konvergenzradius und der jenen Bereich vollständig enthält. Daraus folgt also:

Eine Potenzreihe ist in jedem im Innern ihres Konvergenzkreises liegenden Bereiche eine stetige Funktion. Oder kürzer: Eine Potenzreihe ist **innerhalb** ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion.

113. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe ist offenbar eine Funktion ihrer Koeffizienten; aber die Untersuchung dieser Funktion

bietet die erheblichsten Schwierigkeiten und ist noch so gut wie vollständig zu erledigen.

Eine bemerkenswerte Beziehung zwischen den Koeffizienten einer Potenzreihe und ihrem Konvergenzradius ist durch folgenden Satz gegeben[1]):

Ist $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine Potenzreihe, $\alpha_h = |a_h|$, so ist das größte Element[2]) λ der abgeleiteten Menge der Menge der reellen und positiven Werte:

$$(1) \qquad \alpha_1, \ \sqrt{\alpha_2}, \ \sqrt[3]{\alpha_3}, \cdots, \ \sqrt[h]{\alpha_h}, \cdots$$

der reziproke Wert des Konvergenzradius der Reihe.

Die Zahl λ, die durch $\overline{\lim\limits_{h=\infty}} \sqrt[h]{\alpha_h}$ bezeichnet werden mag, läßt sich auch als das Trennungselement definieren zwischen denjenigen Zahlen, welche von der Art sind, daß in der Menge (1) unzählige Elemente vorkommen, die größer sind als sie, und denjenigen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen[3]).

Nehmen wir einen Wert $\xi < \frac{1}{\lambda}$ an und bezeichnen wir mit μ eine Zahl zwischen $\frac{1}{\xi}$ und λ, so können wir schreiben:

$$\lambda < \mu = \frac{\vartheta}{\xi},$$

wo $0 < \vartheta < 1$ ist. Nach der Definition von λ ist dann nur eine endliche Anzahl von Elementen der Menge (1) vorhanden, die größer als μ sind; nennen wir $n-1$ den größten unter den Indices dieser Elemente, so hat man für jedes $h \geqq n$:

$$\sqrt[h]{\alpha_h} \leqq \mu = \frac{\vartheta}{\xi},$$

woraus folgt:

$$\alpha_h \xi^h \leqq \vartheta^h,$$

1) Hadamard 184, 187. S. auch van Vleck 512, Walter 515. — Nach einer Bemerkung von Pringsheim (Enzyklop. d. math. Wissenschaften, Bd. I, Leipzig, 1898, S. 81) wurde der Satz zum ersten Male bereits von Cauchy (Analyse algébrique, 1822) entdeckt, geriet dann aber wieder in Vergessenheit, so daß er jetzt bisweilen als der Cauchy-Hadamardsche Satz bezeichnet wird.

2) Es mag hier darauf hingewiesen sein, daß eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen immer ein größtes und ein kleinstes Element besitzt.

3) Gäbe es nämlich für $\mu > \lambda$ unendlich viele Elemente der Menge (1), die $> \mu$ wären, so würden sie eine Grenzstelle besitzen (Art. 5), die $\geqq \mu$ wäre, während es doch keine Grenzstelle gibt, die größer als λ ist.

und wenn wir summieren:

$$\sum_{h=n}^{\infty} \alpha_h \xi^h \leqq \sum_{h=n}^{\infty} \vartheta^h = \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta}.$$

Daraus folgt, daß für den betreffenden Wert von ξ die Reihe $\sum_{h=n}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ konvergiert.

Nehmen wir nun $\xi > \frac{1}{\lambda}$ an, so werden in der Menge (1) unzählige Elemente vorhanden sein, die größer als $\frac{1}{\xi}$ sind; man wird also für unzählige Werte von h haben:

$$\sqrt[h]{\alpha_h} > \frac{1}{\xi},$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha_h \xi^h > 1.$$

Daraus folgt, daß für den betreffenden Wert von ξ die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ divergiert.

Folglich ist $\frac{1}{\lambda}$ der Konvergenzradius der vorgelegten Reihe.

114. Sind L, l das größte und das kleinste Element der abgeleiteten Menge der Menge der reellen und positiven Werte:

(1) $$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \quad \frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h}, \ldots,$$

so ist, wenn L endlich ist, der Konvergenzradius nicht kleiner als $\frac{1}{L}$; wenn ferner l von 0 verschieden ist, so ist der Konvergenzradius nicht größer als $\frac{1}{l}$[1]).

Nehmen wir $\xi < \frac{1}{L}$ und bezeichnen wir mit K einen Wert zwischen $\frac{1}{\xi}$ und L, so kann man schreiben:

$$L < K = \frac{\vartheta}{\xi},$$

wo $0 < \vartheta < 1$ ist. Da in der Menge (1) nur eine endliche Anzahl von Elementen vorhanden ist, die größer als K sind, so hat man von einem bestimmten Werte s von h an:

1) Pincherle 384.

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} \leqq K \qquad (h \geqq s)$$

und folglich für jeden Wert von r:

$$\alpha_{s+r} \leqq \alpha_s K^r,$$

woraus folgt:

$$\sum_{h=s}^{\infty} \alpha_h \xi^h \leqq \alpha_s \xi^s \sum_{r=0}^{\infty} K^r \xi^r = \alpha_s \xi^s \sum_{r=0}^{\infty} \vartheta^r = \frac{\alpha_s \xi^s}{1-\vartheta},$$

so daß die Reihe endlich ist und der Konvergenzradius nicht kleiner als $\frac{1}{L}$ sein kann.

Nehmen wir jetzt $\xi > \frac{1}{l}$ und bezeichnen mit k einen Wert zwischen $\frac{1}{\xi}$ und l, so können wir schreiben:

$$l > k = \frac{\sigma}{\xi},$$

wo $\sigma > 1$ ist. Da in der Menge (1) nur eine endliche Anzahl von Elementen vorhanden ist, die kleiner als k sind, so hat man von einem bestimmten Werte t von h an:

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} \geqq k \qquad (h \geqq t)$$

und folglich für jeden Wert von r:

$$\alpha_{t+r} \geqq \alpha_t k^r,$$

woraus folgt:

$$\sum_{h=t}^{\infty} \alpha_h \xi^h \geqq \alpha_t \xi^t \sum_{r=0}^{\infty} k^r \xi^r = \alpha_t \xi^t \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r;$$

diese letzte Reihe divergiert aber, folglich kann der Konvergenzradius der betrachteten Reihe nicht größer als $\frac{1}{l}$ sein.

115. Daraus ergibt sich als besonderer Fall:

Nähert sich $\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h}$ mit unbegrenzt wachsendem h einer bestimmten Grenze λ, so ist der reziproke Wert dieser Grenze der Konvergenzradius der Reihe.

In der Tat besteht in diesem Falle die abgeleitete Menge der Menge (1) aus dem einzigen Elemente λ, so daß $L = l = \lambda$ ist.

116. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist der folgende[1]:

Läßt sich eine Zahl m von der Art finden, daß sich für eine Zahl r der Reihe:

$$(1) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

das Verhältnis $\frac{\alpha_{hm+r}}{\alpha_{(h-1)m+r}}$ mit unbegrenzt wachsendem h einer bestimmten Grenze λ nähert und daß sich außerdem nach Annahme einer beliebigen positiven Größe σ eine Zahl H angeben läßt, so daß für alle übrigen Zahlen r' der Reihe (1) die Bedingung:

$$\frac{\alpha_{hm+r'}}{\alpha_{(h-1)m+r'}} < \lambda + \sigma \quad \text{für } h > H$$

erfüllt ist, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ gleich $\frac{1}{\sqrt[m]{\lambda}}$.

Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit der, daß die abgeleitete Menge der Menge $\frac{\alpha_{hm+r'}}{\alpha_{(h-1)m+r'}}$ eine obere Grenze habe, die nicht größer ist als λ.

Man kann schreiben:

$$(2) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h = \sum_{t=0}^{m-1} \xi^t \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+t} \xi^{hm} = \sum_{t=0}^{m-1} \xi^t \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+t} \eta^h,$$

wo $\eta = \xi^m$ gesetzt ist. Die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+t} \eta^h$ hat für $t = r$ (Art. 115) den Konvergenzradius $\frac{1}{\lambda}$ und für jeden andern Wert von t (Art. 114) einen Konvergenzradius, der nicht kleiner ist als $\frac{1}{\lambda}$; folglich hat die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+t} \xi^{hm}$ in beiden Fällen einen Konvergenzradius, der gleich $\frac{1}{\sqrt[m]{\lambda}}$ bezw. nicht kleiner als $\frac{1}{\sqrt[m]{\lambda}}$ ist. Da andrerseits die Glieder der m Teilreihen, in die gemäß (2) die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ zerfällt, verschiedene Potenzen von ξ enthalten und sich folglich nicht gegen-

1) Bortolotti 82.

einander heben können, so ist diese Reihe immer und nur dann konvergent, wenn es alle m Teilreihen sind (vgl. unten Art. 118). Daraus folgt, daß der Konvergenzradius der betrachteten Reihe gleich $\frac{1}{\sqrt[m]{\lambda}}$ ist.

117. Wenn der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ gleich ϱ, der der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ gleich ϱ' ist, so ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h \geqq \varrho\varrho'$ [1]).

Setzen wir $|a_h| = \alpha_h$, $|b_h| = \beta_h$ und nehmen wir eine beliebige Zahl $\mu'' > \frac{1}{\varrho\varrho'}$ an, so können wir diese auf unzählige Arten derart in zwei Faktoren μ, μ' zerlegen, daß $\mu > \frac{1}{\varrho}$, $\mu' > \frac{1}{\varrho'}$ ist. Dann lassen sich (Art. 113) zwei Zahlen n, n' von der Art bestimmen, daß $\sqrt[h]{\alpha_h} < \mu$ für jedes $h > n$ und $\sqrt[h]{\beta_h} < \mu'$ für jedes $h > n'$ ist; bezeichnen wir nun mit n'' eine Zahl, die nicht kleiner ist als jede der beiden Zahlen n, n', so wird, für jedes $h > n''$, $\sqrt[h]{\alpha_h \beta_h} < \mu\mu' = \mu''$ sein. Daraus folgt, wenn wir mit ϱ'' den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$ bezeichnen, daß $\mu'' \geqq \frac{1}{\varrho''}$ sein muß, so oft $\mu'' > \frac{1}{\varrho\varrho'}$ ist, folglich $\frac{1}{\varrho\varrho'} \geqq \frac{1}{\varrho''}$ oder $\varrho'' \geqq \varrho\varrho'$.

118. Ist ϱ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, ϱ' der der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$, so ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} (a_h + b_h) x^h$ **genau** gleich der kleineren der Zahlen ϱ, ϱ', wenn sie verschieden, dagegen **mindestens** gleich ihrem gemeinsamen Werte, wenn sie einander gleich sind.

Setzt man $\varrho > \varrho'$ voraus, so sind beide Reihen für $|x| < \varrho'$ konvergent, folglich ist es auch die dritte; dagegen ist die erste Reihe für Werte von $|x|$, die zwischen ϱ' und ϱ liegen, konvergent, die

---

1) Hadamard 191, 192, 193. — Siehe auch Jensen 214, Meyer 302.

zweite aber nicht, also die dritte ebensowenig; damit ist bewiesen, daß der Konvergenzradius der dritten Reihe genau ϱ' ist.

Ist dagegen $\varrho = \varrho'$, so ist die dritte Reihe für $|x| < \varrho$ konvergent, man kann aber im allgemeinen nichts darüber sagen, wie sie sich für $|x| > \varrho$ verhält; es läßt sich demnach nur behaupten, daß ihr Konvergenzradius nicht kleiner als ϱ ist.

Aus diesem Satze und dem des Art. 113 ergibt sich unmittelbar der folgende, der sich übrigens leicht direkt beweisen läßt:

Sind:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots$$

zwei Folgen positiver Zahlen und ist:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\alpha_h} = \sigma, \quad \overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\beta_h} = \tau,$$

wobei $\sigma > \tau$ ist, alsdann ist:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\alpha_h + \beta_h} = \sigma.$$

119. Die Frage nach der Abhängigkeit des Konvergenzradius von den Koeffizienten läßt sich noch unter einem andern Gesichtspunkte betrachten. Sieht man nämlich die Koeffizienten als Funktionen einer neuen Variabeln y an, so läßt sich der Konvergenzradius ϱ als Funktion von y untersuchen. Aber auch nach dieser Richtung hin sind die bisher erzielten Ergebnisse[1]) gering. Sie zeigen indes, daß selbst in dem einfachsten Falle, in dem die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von y sind, ϱ im allgemeinen eine unstetige Funktion von y ist.

So läßt sich beispielsweise eine Potenzreihe bilden, deren Koeffizienten Polynome in y sind und deren Konvergenzradius einen bestimmten Wert R für alle Werte von y hat, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Werten $y_1, y_2, \cdots, y_n$, für die er einen andern Wert $R' > R$ hat. Wenn nämlich die Potenzreihen $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ beziehentlich die Konvergenzradien R, R' haben $(R' > R)$ und:

$$(y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_n) = \varphi(y)$$

gesetzt wird, so hat (Art. 118) die Reihe:

---

1) Pincherle 391, Vivanti 507, 508.

$$\sum_{h=0}^{\infty} [b_h + a_h \varphi(y)] x^h$$

tatsächlich die verlangte Eigenschaft.

Allgemeiner: Sind

$$R = f(y), \quad R' = g(y)$$

die Konvergenzradien der Reihen:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y) x^h, \quad \sum_{h=0}^{\infty} b_h(y) x^h,$$

so hat die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} [b_h(y) + a_h(y)\varphi(y)] x^h$$

den Konvergenzradius $f(y)$ für alle Werte von y, für welche $f(y) < g(y)$ und $\varphi(y) \neq 0$ ist, für alle übrigen aber den Konvergenzradius $g(y)$.

Dagegen läßt sich folgender Satz beweisen:

Sind die Koeffizienten einer Potenzreihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y) x^h$$

Polynome, deren Grade nicht höher sind als eine bestimmte Zahl p, und hat die Reihe für $p+1$ Werte $y_0, y_1, \cdots, y_p$ von y einen Konvergenzradius, der nicht kleiner ist als eine bestimmte Zahl R, so findet dasselbe für alle Werte von y statt.

Es sei:

$$a_h(y) = c_{h0} + c_{h1} y + c_{h2} y^2 + \cdots + c_{hp} y^p,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & \cdots & y_0^p \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \cdots & y_1^p \\ . & . & . & . & . \\ 1 & y_p & y_p^2 & \cdots & y_p^p \end{vmatrix} = D,$$

und es mögen mit D_{ik} die Unterdeterminanten der Elemente der Determinante D bezeichnet werden. Da nun der Annahme nach die Reihen:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y_i) x^h \qquad (i = 0, 1, \cdots, p)$$

einen Konvergenzradius $\geqq R$ haben, so wird dasselbe (Art. 118) für die Reihen:

$$\sum_{h=0}^{\infty}[D_{1k}a_h(y_0) + D_{2k}a_h(y_1) + \cdots + D_{p+1,k}a_h(y_p)]x^h$$
$$(k = 1, 2, \cdots, p+1)$$

oder:

$$D\sum_{h=0}^{\infty}c_{h,k-1}x^h \qquad (k = 1, 2, \cdots, p+1)$$

statthaben und folglich auch (Art. 118) (indem man den Faktor D forthebt und nach Multiplikation mit y^{k-1} für alle Werte von k summiert) für die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty}(c_{h0} + c_{h1}y + \cdots + c_{hp}y^p)x^h$$

oder:

$$\sum_{h=0}^{\infty}a_h(y)x^h,$$

wo y jeden beliebigen Wert haben kann.

Hinsichtlich anderer verwandter Sätze sei auf die in der letzten Anmerkung angeführten Arbeiten verwiesen.

120. Ist eine Potenzreihe gegeben, so läßt sich eine Umgebung des Anfangspunktes finden, innerhalb welcher die Reihe in keinem Punkte, höchstens den Anfangspunkt selbst ausgenommen, den Wert Null hat[1]).

Sei $\sum_{h=0}^{\infty}a_hx^h = \mathfrak{P}(x)$ die betrachtete Potenzreihe und sei vorerst $a_0 \neq 0$. Da $\mathfrak{P}(x)$ innerhalb ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion ist (Art. 112), so wird sich eine Umgebung des Anfangspunktes bestimmen lassen, in deren sämtlichen Punkten:

$$|\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(0)| < |a_0|$$

ist; nun ist $\mathfrak{P}(0) = a_0$, folglich wird in allen Punkten dieser Umgebung $\mathfrak{P}(x) \neq 0$ sein.

Ist dagegen $a_0 = 0$ und wird außerdem der Allgemeinheit halber angenommen, daß:

---

1) In diesem Satze wie in den folgenden wird stillschweigend vorausgesetzt, daß der Konvergenzradius nicht Null ist, weil die Sätze sonst keinen Sinn haben würden.

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0, \quad a_r \neq 0$$

sei, so ist:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=r}^{\infty} a_h x^h = x^r \sum_{h=0}^{\infty} a_{r+h} x^h.$$

Nun läßt sich nach dem soeben Gesagten eine Umgebung des Anfangspunktes finden, in der $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_{r+h} x^h$ niemals Null ist; in dieser Umgebung wird $\mathfrak{P}(x)$ nur im Anfangspunkte verschwinden.

121. Der vorstehende Satz läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Ist eine Potenzreihe in allen Punkten einer Menge, die den Anfangspunkt zur Grenzstelle hat, Null, so ist sie identisch Null (d. h. alle ihre Koeffizienten sind Null)[1].

---

1) Aus diesem Satze folgt:

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ kann nicht in allen Punkten einer Umgebung des Anfangspunktes einen reellen (oder rein imaginären) Wert haben.

Sei diese Umgebung ein Kreis vom Radius ϱ. Wir setzen $a_h = b_h + i c_h$ und geben x irgend einen reellen Wert von kleinerem absolutem Betrage als ϱ; dann muß:

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h = 0$$

sein, woraus $c_h = 0$ folgt, so daß die Koeffizienten a_h reell sein müssen.

Wir geben hiernach x einen rein imaginären Wert iv und erhalten:

$$\mathfrak{P}(iv) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (iv)^h = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_{2h} v^{2h} + i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_{2h+1} v^{2h+1}.$$

Da $\mathfrak{P}(iv)$ für jedes reelle v von kleinerem absolutem Betrage als ϱ reell sein muß, so wird für alle diese Werte von v gelten müssen:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_{2h+1} v^{2h+1} = 0,$$

woraus nach dem Satze im Texte folgt:

$$a_{2h+1} = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \cdots),$$

mithin, wenn $x^2 = y$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h} x^{2h} = \mathfrak{Q}(x^2) = \mathfrak{Q}(y).$$

Beachten wir, daß die Stellen, an denen eine Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

einen Wert C annimmt, dieselben sind wie die, an denen die Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) - C = (a_0 - C) + \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h$$

verschwindet, so erhalten wir den Satz:

Ist $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe, C eine beliebige Größe, so läßt sich eine Umgebung des Anfangspunktes finden, innerhalb welcher $\mathfrak{P}(x)$ in keinem Punkte, höchstens mit Ausnahme des Anfangspunktes selbst, den Wert C annimmt. — Oder in andrer Form:

Hat eine Potenzreihe an allen Punkten einer Menge, die den Anfangspunkt zur Grenzstelle hat, ein und denselben Wert, so reduziert sie sich auf eine Konstante (d. h. alle ihre Koeffizienten sind Null außer dem ersten).

Beachten wir ferner, daß die Punkte, in denen zwei Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h} x^h, \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h} x^h$$

gleiche Werte annehmen, dieselben sind wie die, in denen die Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}_1(x) - \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (a_{1h} - a_{2h}) x^h$$

verschwindet, so erhalten wir den Satz:

Haben zwei Potenzreihen in allen Punkten einer Menge, die den Anfangspunkt zur Grenzstelle hat, gleiche (wenn auch möglicherweise von Punkt zu Punkt verschiedene) Werte, so sind die beiden Reihen identisch gleich (d. h. ihre entsprechenden Koeffizienten sind gleich).

Da die Reihe $\mathfrak{Q}(y)$ für jedes y von kleinerem absolutem Betrage als ϱ^2 reell sein muß, so findet man, indem man die vorige Überlegung wiederholt:

$$a_{2(2h+1)} = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \cdots).$$

Indem man so fortfährt, beweist man, daß diejenigen Koeffizienten Null sein müssen, deren Indices höchstens die 2te, 3te, $\cdots$ Potenz von 2 enthalten, und daß mithin alle Koeffizienten mit Ausnahme von a_0 Null sein müssen, weil sich für jeden gegebenen Koeffizienten die höchste Potenz von 2 angeben läßt, die in seinem Index enthalten ist.

122. Die Eigenschaften der Potenzreihen von x lassen sich auf die Potenzreihen von $x - c$ übertragen, wo c eine endliche Zahl ist, vorausgesetzt, daß der Punkt c in den verschiedenen Sätzen an die Stelle des Anfangspunktes tritt. So konvergiert z. B. eine Potenzreihe von $x - c$ innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt c; sie kann in allen Punkten einer Menge, welche c zur Grenzstelle hat, nicht Null werden, ohne identisch Null zu sein, usf.

Um zu sehen, was geschieht, wenn wir anstatt eines Punktes c von endlicher Entfernung den unendlich fernen Punkt in Betracht ziehen, wenden wir auf die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, die den Konvergenzradius ϱ habe, die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ an; sie wird dadurch zu $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{x'^h}$; diese Reihe konvergiert aber, wenn man $\varrho' = \frac{1}{\varrho}$ setzt, für $x' > \varrho'$. In dem hier betrachteten Falle liegt also eine Potenzreihe von $\frac{1}{x'}$ vor, die in dem Teile der Ebene konvergiert, der sich außerhalb eines bestimmten Kreises um den Anfangspunkt befindet.

Der Mittelwert und seine Anwendungen.

123. Sei $f(x)$ eine Funktion der Punkte eines Bereiches, die auf einer in diesem Bereiche enthaltenen Kreislinie vom Radius ϱ um den Anfangspunkt stetig sein möge. Man teile die Kreislinie, von ihrem Schnittpunkte mit der positiven reellen Achse ausgehend, in 2^n gleiche Teile, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Die Teilpunkte stellen dann die Werte:

$$\varrho, \quad \alpha_n \varrho, \quad \alpha_n^2 \varrho, \cdots, \alpha_n^{2^n - 1} \varrho$$

der Variabeln x dar, wo:

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$$

die imaginäre Wurzel der Einheit vom Grade 2^n mit dem kleinsten Argumente ist; bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_n f(\varrho)$ das arithmetische Mittel der Funktionswerte in diesen Punkten, so wird sein:

$$\mathfrak{M}_n f(\varrho) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n -} f(\alpha_n^k \varrho).$$

Wir werden beweisen, daß sich dieser Ausdruck, wenn n unbegrenzt wächst, einer endlichen und bestimmten Grenze nähert.

Setzen wir:

$$\alpha_{n+p} = e^{\frac{2\pi i}{2^{n+p}}},$$

so ist:

$$(1)\qquad \mathfrak{M}_n f(\varrho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^p f(\alpha_n^k \varrho),$$

und:

$$(2)\qquad \mathfrak{M}_{n+p} f(\varrho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{2^{n+p}-1} f(\alpha_{n+p}^k \varrho).$$

Wir schreiben nun:

$$(3)\qquad k = 2^p \cdot q + r,$$

wo q und r den Quotienten und den Rest der Division von k durch 2^p bezeichnen. Da k in (2) von 0 bis $2^{n+p}-1$ variieren muß, wird man alle seine Werte aus (3) erhalten, wenn man darin q von 0 bis $2^n - 1$, r aber von 0 bis $2^p - 1$ variieren läßt, so daß sich (2), wenn man außerdem berücksichtigt, daß $\alpha_{n+p}^{2^p} = \alpha_n$ ist, folgendermaßen schreiben läßt:

$$\mathfrak{M}_{n+p} f(\varrho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{q=0}^{2^n-1} \sum_{r=0}^{2^p-1} f\left(\alpha_{n+p}^{2^p q + r} \varrho\right) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{q=0}^{2^n-1} \sum_{r=0}^{2^p-1} f(\alpha_{n+p}^r \alpha_n^q \varrho).$$

Zieht man davon (1) ab, so erhält man:

$$\mathfrak{M}_{n+p} f(\varrho) - \mathfrak{M}_n f(\varrho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{q=0}^{2^n-1} \sum_{r=0}^{2^p-1} [f(\alpha_{n+p}^r \alpha_n^q \varrho) - f(\alpha_n^q \varrho)].$$

Nun kann man[1]) infolge der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ für $|x| = \varrho$ nach Vorgabe einer beliebig kleinen Größe σ eine andere positive Größe θ so bestimmen, daß die Schwankung der Funktion $f(x)$ auf jedem Bogen, der gleich oder kleiner als θ ist, kleiner ist als σ. Wählt man demnach die Zahl n so, daß der Bogen von der Länge $\frac{2\pi\varrho}{2^n}$ kleiner ist als θ, und beachtet man, daß der Bogen zwischen den beiden Punkten:

$$\alpha^q \varrho \text{ und } \alpha_{n+p}^r \alpha_n^q \varrho \qquad (0 \leqq r \leqq 2^p - 1)$$

die Länge $\frac{2\pi r \varrho}{2^{n+p}} < \frac{2\pi\varrho}{2^n} < \theta$ hat, so ist für jeden Wert von p:

$$|f(\alpha_{n+p}^r \alpha_n^q \varrho) - f(\alpha_n^q \varrho)| < \sigma,$$

1) Nach dem Satze von der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen einer reellen Variabeln, der, wie andere analoge Sätze, unmittelbar auf Funktionen der Punkte irgendwelcher Linie übertragen werden darf.

und folglich:

$$|\mathfrak{M}_{n+p} f(\varrho) - \mathfrak{M}_n f(\varrho)| < \sigma,$$

eine Beziehung, welche zeigt, daß sich $\mathfrak{M}_n f(\varrho)$ einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn n über alle Grenzen wächst. Wir werden diese Grenze mit $\mathfrak{M} f(\varrho)$ bezeichnen:

$$\mathfrak{M} f(\varrho) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n f(\varrho) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\alpha_n^k \varrho) \right],$$

und sie Mittelwert[1]) der Funktion $f(x)$ auf der Kreislinie vom Radius ϱ nennen. Anstatt $\mathfrak{M}_n f(\varrho)$, $\mathfrak{M} f(\varrho)$ empfiehlt es sich bisweilen zu schreiben: $\mathfrak{M}_n[f(x)]_\varrho$, $\mathfrak{M}[f(x)]_\varrho$.

Die Definition des Mittelwertes findet im besondern auf jede Potenzreihe Anwendung, die einen größeren Konvergenzradius als ϱ hat, da ja (Art. 112) eine solche Reihe eine innerhalb ihres ganzen Konvergenzkreises und folglich im besondern auf der betrachteten Kreislinie vom Radius ϱ stetige Funktion ist.

Aus der Definition des Mittelwertes folgt:

Der absolute Betrag des Mittelwertes einer Funktion ist nicht größer als der Mittelwert ihres absoluten Betrages.

124. Der absolute Betrag des Mittelwertes einer Funktion auf einer Kreislinie übertrifft nicht den größten absoluten Betrag der Funktion längs der Kreislinie selbst.

Ist $M(\varrho)$ der größte absolute Wert der Funktion $f(x)$ längs der Kreislinie vom Radius ϱ, so gilt für jeden Wert von n und k:

$$|f(\alpha_n^k \varrho)| \leqq M(\varrho),$$

folglich ist:

$$|\mathfrak{M}_n f(\varrho)| \leqq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |f(\alpha_n^k \varrho)| \leqq M(\varrho),$$

woraus nach einem bekannten Satze über Grenzwerte folgt:

$$|\mathfrak{M} f(\varrho)| \leqq M(\varrho).$$

1) Der Mittelwert wurde von Pringsheim 407, 412, 416 hauptsächlich zu dem Zwecke eingeführt, um auf elementarem Wege den Satz von Laurent (siehe weiter unten Art. 180) zu beweisen, der ursprünglich aus der Theorie der krummlinigen Integrale hergeleitet worden ist. Andre elementare Beweise des Satzes von Laurent, die aber weit weniger einfach sind als der von Pringsheim, waren bereits vorher von Mittag-Leffler 308, 309, 311 und von Scheeffer 439 gegeben worden. — Seit 1880 hat Weierstraß 517 zum Beweise der Ungleichung (3) Art. 128 Mittelwerte benutzt, worauf mich Herr Gutzmer aufmerksam gemacht hat.

Man kann den Satz hinzufügen:

Ist die Funktion längs des Kreises nicht konstant, so hat man:

(1) $$|\mathfrak{M} f(\varrho)| < M(\varrho).$$

Man setze zur Abkürzung $M(\varrho) = a$ Falls nun $f(x)$ längs des Kreises nicht konstant ist, so gibt es mindestens einen Punkt x_0, für den $|f(x_0)| < a$ ist. Sei $|f(x_0)| = a - \lambda$; dann läßt sich, weil $f(x)$ stetig ist, ein x_0 enthaltender Bogen angeben, in dessen sämtlichen Punkten $|f(x)| < a - \frac{\lambda}{2}$ ist. Hat man diesen Bogen festgestellt, so gibt es einen ersten Wert m, für den er mindestens zwei der Punkte $\alpha_m^q (q = 0, 1, \cdots, 2^m - 1)$ enthält; für $m + 1$ enthält er deren mindestens $2 + 1 = 3$ (nämlich die beiden vorigen und den Mittelpunkt des von ihnen begrenzten Bogens), für $m + 2$ mindestens $2 + 1 + 2 = 5$; für $m + 3$ mindestens $2 + 1 + 2 + 4 = 9; \cdots$; für $m + p$ mindestens $2 + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{p-1} = 1 + 2^p$. Man hat sonach:

$$|\mathfrak{M}_{m+p} f(\varrho)| < \frac{1}{2^{m+p}}\left[(2^{m+p} - 2^p - 1)a + (2^p + 1)\left(a - \frac{\lambda}{2}\right)\right]$$
$$= a - \frac{2^p + 1}{2^{m+p}} \cdot \frac{\lambda}{2} < a - \frac{\lambda}{2^{m+1}};$$

da aber die letzte Größe unabhängig von p ist, so erhält man durch Übergang zur Grenze:

$$|\mathfrak{M} f(\varrho)| \leqq a - \frac{\lambda}{2^{m+1}} < a,$$

womit die Behauptung erwiesen ist[1]).

1) Es läßt sich auch leicht beweisen, daß, wenn $f(x)$ in allen Punkten eines Kreisringes um den Anfangspunkt mit den äußersten Radien ϱ_1, $\varrho_2 < \varrho_1$ stetig ist, $M(\varrho)$ eine für alle zwischen ϱ_1 und ϱ_2 liegenden Werte von ϱ stetige Funktion ist.

Da (Art. 99) $|f(x)|$ eine stetige Funktion ist, läßt sich (Art. 100), wenn man willkürlich eine Größe σ annimmt eine Größe k von der Art angeben, daß für jedes $|x' - x| < k$ innerhalb des Kreisringes:

$$\big||f(x')| - |f(x)|\big| < \sigma$$

ist. Nimmt man nun $\varrho' = \varrho + \delta$ an, wo $\delta < k$, $\varrho_2 < \varrho < \varrho' < \varrho_1$, und bezeichnet man mit x, x' zwei auf demselben Radius liegende Punkte der Kreislinien ϱ, ϱ' um den Anfangspunkt, so hat man:

$$|x' - x| = \delta < k,$$

folglich:

$$\big||f(x')| - |f(x)|\big| < \sigma,$$

und demnach:

$$|f(x')| < |f(x)| + \sigma.$$

125. Leicht beweist man folgende Sätze:

Der Mittelwert einer Konstanten ist die Konstante selbst

Der Mittelwert des Produktes einer Konstanten mit einer Funktion ist das Produkt der Konstanten mit dem Mittelwerte der Funktion.

Der Mittelwert der Summe zweier oder mehrerer Funktionen ist die Summe ihrer Mittelwerte.

126. Sind die unendlich vielen Funktionen:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$$

längs der mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreislinie stetig und ist $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ auf der Kreislinie selbst gleichmäßig konvergent, so ist:

$$\mathfrak{M} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(\varrho) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathfrak{M} f_h(\varrho).$$

Wählt man m so, daß längs der ganzen Kreislinie:

$$|R_m(x)| = \left| \sum_{h=m+1}^{\infty} f_h(x) \right| < \sigma,$$

wo σ beliebig gewählt ist, und bedenkt man, daß nach einem bekannten Satze (vgl. Art. 107) $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ eine längs der Kreislinie stetige Funktion ist, so hat man (Art. 124, 125):

$$\mathfrak{M} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(\varrho) = \sum_{h=1}^{m} \mathfrak{M} f_h(\varrho) + \mathfrak{M} R_m(\varrho),$$

$$|\mathfrak{M} R_m(\varrho)| < \sigma,$$

Es gilt also für alle Punkte der Kreislinie ϱ':

$$|f(x')| < M(\varrho) + \sigma,$$

mithin ist für $\varrho' - \varrho < \delta$

$$M(\varrho') - M(\varrho) < \sigma.$$

Auf dieselbe Weise beweist man:

$$M(\varrho) - M(\varrho') < \sigma,$$

so daß:

$$|M(\varrho') - M(\varrho)| < \sigma,$$

also ist die Funktion $M(\varrho)$ stetig.

woraus folgt:

$$\mathfrak{M}\sum_{h=1}^{\infty} f_h(\varrho) = \lim_{m=\infty}\sum_{h=1}^{m}\mathfrak{M}f_h(\varrho) = \sum_{h=1}^{\infty}\mathfrak{M}f_h(\varrho).$$

127. Wir wollen den Mittelwert einer ganzzahligen Potenz x^m der Variabeln bestimmen. Ist m Null, so hat man (Art. 125):

$$\mathfrak{M}(\varrho^m) = \mathfrak{M}(1) = 1.$$

Ist $m \gtrless 0$, so hat man:

$$\mathfrak{M}_n(\varrho^m) = \frac{\varrho^m}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\alpha_n^{mk}.$$

Wählt man n so, daß $2^n > |m|$, so ist die Summe auf der rechten Seite nach einer bekannten Eigenschaft der Einheitswurzeln gleich Null, so daß $\mathfrak{M}_n(\varrho^m)$ von einem bestimmten Werte von n an Null ist; folglich ist:

$$\mathfrak{M}(\varrho^m) = 0 \quad \text{für } m \gtrless 0.$$

128. Es sei jetzt eine Potenzreihe von x, $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, und eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\sum_{h=1}^{\infty} b_h x^{-h}$, gegeben; die erste sei konvergent innerhalb eines Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius ϱ_1, die zweite außerhalb (Art. 122) eines Kreises mit dem Radius ϱ_2.

Ist $\varrho_1 > \varrho_2$, so wird die Summe:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h + \sum_{h=1}^{\infty} b_h x^{-h}$$

eine innerhalb des zwischen den beiden Kreisen gelegenen Ringes stetige Funktion sein, und ihr Mittelwert wird daher auf jedem Kreise vom Radius ϱ, wo $\varrho_2 < \varrho < \varrho_1$ ist, endlich und bestimmt sein.

Wir setzen für alle positiven Werte von h:

$$b_h = a_{-h},$$

so daß wir schreiben dürfen:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h x^h.$$

Demgemäß erhalten wir (Art. 125, 126, 127):

$$\mathfrak{M}f(\varrho) = \sum_{h=-\infty}^{\infty}\mathfrak{M}(a_h\varrho^h) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h\mathfrak{M}(\varrho^h) = a_0, \tag{1}$$

ein bemerkenswertes Ergebnis, das uns zeigt, daß der Mittelwert der Funktion $f(x)$ von ϱ unabhängig ist.

Auch $\frac{f(x)}{x^r}$ ist eine in dem betrachteten Ringe für jeden positiven und negativen Wert von r stetige Funktion, und man hat:

$$\mathfrak{M}\frac{f(\varrho)}{\varrho^r} = \mathfrak{M}\sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h \varrho^{h-r} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h \mathfrak{M}\varrho^{h-r} = a_r.$$

Folglich hat man für jeden positiven oder negativen Wert von r einschließlich Null:

$$\mathfrak{M}\frac{f(\varrho)}{\varrho^r} = a_r. \tag{2}$$

Aus der gefundenen Formel und dem Satze des Art. 124 folgt:

$$|a_r| \leqq \frac{M(\varrho)}{\varrho^r}. \tag{3}$$

129. Es sei:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius nicht Null ist. Setzt man:

$$f(x) = Q(x) + iR(x),$$

wo $Q(x)$ und $R(x)$ reell sind, und bezeichnet man mit $\bar{t}$ die zu t konjugierte Größe, so ist:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h \bar{x}^h = Q(x) - iR(x),$$

mithin:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h + \sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h \bar{x}^h\right],$$

und folglich (Art. 126), wenn ϱ kleiner als der Konvergenzradius der gegebenen Reihe, r aber eine ganze, positive Zahl ist:

$$\mathfrak{M}\frac{Q(\varrho)}{\varrho^r} = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_h \mathfrak{M}(\varrho^{h-r}) + \sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h \,\mathfrak{M}\left[\frac{\bar{x}^h}{x^r}\right]_\varrho\right].$$

Nun ist (Art. 127):

$$\mathfrak{M}\varrho^{h-r} = \begin{cases} 1 \text{ für } h = r \\ 0 \quad ,, \quad h \neq r \end{cases}.$$

Setzt man ferner $x = \varrho e^{i\theta}$, so ist $\bar{x} = \varrho e^{-i\theta}$, folglich:

$$\mathfrak{M}_n \left[\frac{\bar{x}^h}{x^r}\right]_\varrho = \frac{\varrho^{h-r}}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha^{(-h-r)k};$$

da aber $-h-r \neq 0$ für $h > 0$, $r > 0$, so ist (vgl. Art. 127) für ein hinreichend großes n:

$$\mathfrak{M}_n \left[\frac{\bar{x}^h}{x^r}\right]_\varrho = 0,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M} \left[\frac{\bar{x}^h}{x^r}\right]_\varrho = 0.$$

Es ist also:

(1) $$\mathfrak{M} \frac{Q(\varrho)}{\varrho^r} = \frac{1}{2} a_r.$$

Da ferner (Art. 128):

$$\mathfrak{M} \frac{f(\varrho)}{\varrho^r} = \mathfrak{M} \frac{Q(\varrho)}{\varrho^r} + i \mathfrak{M} \frac{R(\varrho)}{\varrho^r} = a_r$$

ist, so ergibt sich:

(2) $$\mathfrak{M} \frac{R(\varrho)}{\varrho^r} = -\frac{i}{2} a_r.$$

Bezeichnen wir mit $C(\varrho)$ den größten positiven, mit $D(\varrho)$ den absoluten Wert des größten negativen Wertes von $Q(x)$ für $|x| = \varrho$, so ist:

$$|Q(x)| + Q(x) \leqq 2C(\varrho),$$
$$|Q(x)| - Q(x) \leqq 2D(\varrho).$$

Nun hat man, wenn $a_0 = a_0' + i a_0''$ gesetzt wird:

$$a_0' = \mathfrak{M}\, Q(\varrho), \qquad a_0'' = \mathfrak{M}\, R(\varrho),$$

ferner (Art. 123 am Ende), wegen (1):

$$\frac{1}{2} |a_r| \leqq \frac{1}{\varrho^r} \mathfrak{M} [|Q(x)|]_\varrho.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{4} \varrho^r |a_r| + \frac{1}{2} a_0' \leqq C(\varrho),$$

$$\frac{1}{4} \varrho^r |a_r| - \frac{1}{2} a_0' \leqq D(\varrho);$$

mithin ist:

(3) $$|a_r| \leqq \frac{4}{\varrho^r}\left[C(\varrho) - \frac{1}{2} a_0'\right] \leqq \frac{4}{\varrho^r}\left[C(\varrho) + \frac{1}{2} |a_0'|\right],$$

(4) $$|a_r| \leqq \frac{4}{\varrho^r}\left[D(\varrho) + \frac{1}{2} a_0'\right] \leqq \frac{4}{\varrho^r}\left[D(\varrho) + \frac{1}{2} |a_0'|\right].$$

130. Aus Art. 124,(1) und Art. 128,(1) folgt:

$$|a_0| < M(\varrho),$$

unter der Voraussetzung, daß die Funktion auf der Kreislinie ϱ nicht konstant sei. Diese Formel, welche besagt, daß es auf der Kreislinie notwendig Punkte gibt, in denen der absolute Betrag der Funktion größer als im Mittelpunkt ist, gibt zu einer wichtigen Betrachtung Anlaß.

Ist $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe, ϱ ein Wert, der kleiner ist als ihr Konvergenzradius, M der größte Wert von $|\mathfrak{P}(x)|$ in dem ganzen Kreise mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt, den Umfang mit einbegriffen, so läßt sich beweisen, daß die Punkte, in denen $|\mathfrak{P}(x)|$ den Wert M annimmt, auf dem Umfange liegen, oder auch, daß das Maximum von $|\mathfrak{P}(x)|$ in dem Kreise mit seinem Maximum auf dem Umfang desselben zusammenfällt. Setzen wir voraus, für einen Innenpunkt c sei $|\mathfrak{P}(c)| = M$, und beschreiben wir um c als Mittelpunkt einen Kreis, der vollständig innerhalb des Kreises ϱ liegt, so gibt es, da $\mathfrak{P}(x)$ (siehe unten Art. 159, Anm.) nicht längs dieses ganzen Kreises konstant sein kann, auf ihm notwendig Punkte p, für die $|\mathfrak{P}(p)| > M$; das widerspricht aber der Annahme, M sei der Maximalwert von $|\mathfrak{P}(x)|$.

Zieht man also eine Folge von Kreisen um den Anfangspunkt in Betracht, deren Radien wachsen, aber beständig kleiner bleiben als der Konvergenzradius der Reihe, und bezeichnet man wiederum durch $M(\varrho)$ das Maximum von $|\mathfrak{P}(x)|$ auf dem ganzen Kreise oder — was nach dem soeben Gesagten dasselbe ist — längs der Kreislinie vom Radius ϱ, so wächst $M(\varrho)$, wenn ϱ wächst.

131. Wir wollen jetzt den Mittelwert der Funktion:

$$\frac{x f(x)}{x-c}$$

längs eines Kreises ϱ berechnen, wo $f(x)$ längs desselben Kreises stetig und c eine Größe ist, deren absoluter Betrag von ϱ verschieden ist.

Zunächst sei $|c| > \varrho$. Bekanntlich ist für $|x| = \varrho$:

$$\frac{x}{x-c} = -\frac{x}{c}\frac{1}{1-\frac{x}{c}} = -\frac{x}{c}\left(1+\frac{x}{c}+\left(\frac{x}{c}\right)^2+\cdots\right) = -\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{x}{c}\right)^h;$$

das ist aber eine Potenzreihe, die den Konvergenzradius $|c|$ hat und folglich längs des Kreises ϱ gleichmäßig konvergent ist. Daher wird auch die Reihe:

$$\frac{x f(x)}{x-c} = -\sum_{h=1}^{\infty}\frac{x^h f(x)}{c^h}$$

gleichmäßig konvergent sein, und man hat (Art. 126):

$$(1)\qquad \mathfrak{M}\frac{\varrho f(\varrho)}{\varrho - c} = -\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c^h}\mathfrak{M}[\varrho^h f(\varrho)] \quad \text{für } |c| > \varrho.$$

Es sei jetzt $|c| < \varrho$. Man hat für $|x| = \varrho$:

$$\frac{x}{x-c} = \frac{1}{1-\frac{c}{x}} = 1 + \frac{c}{x} + \left(\frac{c}{x}\right)^2 + \cdots = \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{c}{x}\right)^h,$$

und folglich, wie vorhin:

$$(2)\qquad \mathfrak{M}\frac{\varrho f(\varrho)}{\varrho - c} = \sum_{h=0}^{\infty} c^h \mathfrak{M}\left[\frac{1}{\varrho^h} f(\varrho)\right] \quad \text{für } |c| < \varrho.$$

Setzt man für $f(x)$ eine Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r,$$

und erwägt man, daß (Art. 128):

$$\mathfrak{M}\frac{\mathfrak{P}(\varrho)}{\varrho^r} = \begin{cases} 0 & \text{für } r < 0 \\ a_r & \text{für } r \geqq 0, \end{cases}$$

so ergibt sich:

$$(3)\qquad \mathfrak{M}\frac{\varrho\,\mathfrak{P}(\varrho)}{\varrho - c} = \begin{cases} 0 & \text{für } |c| > \varrho, \\ \sum_{h=0}^{\infty} a_h c^h = \mathfrak{P}(c) & \text{für } |c| < \varrho. \end{cases}$$

Setzt man insbesondere $\mathfrak{P}(x) \equiv 1$, so erhält man:

$$(4)\qquad \mathfrak{M}\frac{\varrho}{\varrho - c} = \begin{cases} 0 & \text{für } |c| > \varrho, \\ 1 & \text{für } |c| < \varrho. \end{cases}$$

132. Es seien unendlich viele Reihen mit positiven und negativen Potenzen:

$$(1)\qquad f_k(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{kh} x^h \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

gegeben, die innerhalb des Ringes zwischen den Kreisen um den Anfangspunkt mit den Radien ϱ_1 und $\varrho_2 < \varrho_1$ konvergieren[1]); ist die Reihe:

1) Vgl. Art. 128.

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{2}$$

gleichmäßig konvergent längs jedes Kreises um den Anfangspunkt, dessen Radius ϱ zwischen ϱ_1 und ϱ_2 liegt, dann gelten folgende Sätze:

a) Die Summen der entsprechenden Koeffizienten der Reihen $f_k(x)$ sind konvergent;

b) Setzt man:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kh} = A_h, \tag{3}$$

so ist die Reihe:

$$G(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h x^h \tag{4}$$

in allen Punkten konvergent, die innerhalb des Ringes liegen, und hat denselben Wert wie die Funktion $F(x)$ **(Hilfssatz von Weierstraß)**[1].

Da die Funktionen (1) längs des Kreises vom Radius ϱ stetig sind (Art. 112) und die Reihe (2) auf diesem Kreise gleichmäßig konvergent ist, so wird auch $F(x)$ eine stetige Funktion sein, und ebenso $\frac{F(x)}{x^h}$, welches auch die ganze Zahl h sei; und daher wird $\mathfrak{M}\frac{F(\varrho)}{\varrho^h}$ eine bestimmte und endliche Größe sein. Nun ist (Art. 126, 128):

$$\mathfrak{M}\frac{F(\varrho)}{\varrho^h} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}\frac{f_k(\varrho)}{\varrho^h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kh}, \tag{5}$$

so daß (3) konvergent ist.

Man nehme nun einen beliebigen Wert ϱ_1' zwischen ϱ und ϱ_1 und einen zweiten ϱ_2' zwischen ϱ_2 und ϱ und bezeichne mit M_1 den größten absoluten Betrag von $F(x)$ längs des Kreises vom Radius ϱ_1', mit M_2 den analogen Wert längs des Kreises vom Radius ϱ_2'. Mit Rücksicht auf (3) erhält man dann aus (5) für alle Werte von h (Art. 124):

$$|A_h| = \left|\mathfrak{M}\frac{F(\varrho_1')}{\varrho_1'^h}\right| \leqq \frac{M_1}{\varrho_1'^h},$$

1) Weierstraß 517. Die Bedingungen des Satzes sind hinreichend, aber nicht notwendig, wie Runge 434 an einem Beispiele gezeigt hat. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind von Arzelà 10 festgestellt worden. S. auch Arzelà 11, v. Dalwigk 126, Osgood 340, Severini 456, 457.

folglich:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |A_h| \varrho^h \leqq M_1 \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho_1'}\right)^h = \frac{M_1 \varrho_1'}{\varrho_1' - \varrho};$$

analog ist:

$$|A_h| = \left|\mathfrak{M}\frac{F(\varrho_2')}{\varrho_2'^h}\right| \leqq \frac{M_2}{\varrho_2'^h},$$

folglich:

$$\sum_{h=-1}^{-\infty} |A_h| \varrho^h \leqq M_2 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_2'}{\varrho}\right)^h = \frac{M_2 \varrho_2'}{\varrho - \varrho_2'}.$$

Durch Summierung erhält man:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |A_h| \varrho^h \leqq \frac{M_1 \varrho_1'}{\varrho_1' - \varrho} + \frac{M_2 \varrho_2'}{\varrho - \varrho_2'}, \tag{6}$$

also ist die Reihe (4) absolut konvergent für jedes x, dessen absoluter Betrag zwischen ϱ_1 und ϱ_2 liegt.

Setzen wir:

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_1' - \varrho} + \frac{\varrho_2'}{\varrho - \varrho_2'} = \theta,$$

so werden wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (2) nach Annahme einer beliebigen Größe σ zwei Zahlen n_1, n_2 der Art bestimmen können, daß längs des Kreises ϱ_1':

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \frac{\sigma}{2\theta}$$

ist für jedes $N \geqq n_1$, und längs des Kreises ϱ_2' dieselbe Beziehung für jedes $N \geqq n_2$ gilt. Bezeichnen wir nun mit n irgendwelche Zahl, die nicht kleiner ist als jede der beiden Zahlen n_1, n_2, und setzen wir:

$$F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x),$$

so ergibt sich für alle Punkte der beiden Kreise ϱ_1', ϱ_2':

$$|F_n(x)| < \frac{\sigma}{2\theta}.$$

Man wird demnach durch Wiederholung der oben dargelegten Schlußweise für die Funktion $F_n(x)$ zu einer ähnlichen Beziehung wie (6) gelangen, wo $\frac{\sigma}{2\theta}$ an Stelle von M_1, M_2 tritt, an Stelle der Koeffizienten A_h aber die Koeffizienten:

$$A_h^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{kh}$$

auftreten. Man wird also erhalten:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |A_h^{(n)}| \varrho^h \leqq \frac{\sigma}{2},$$

und folglich:

$$\left| \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h \right| \leqq \frac{\sigma}{2}$$

für $|x| = \varrho$.

Andrerseits läßt sich n hinreichend groß wählen, damit längs des Kreises ϱ:

$$|F_n(x)| < \frac{\sigma}{2}$$

sei; daraus folgt für jedes $|x| = \varrho$ und für jedes n von einem bestimmten Werte an:

$$\left| F_n(x) - \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h \right| < \sigma. \tag{7}$$

Es ist nun:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + F_n(x)$$

und:

$$G(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{kh} x^h + \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h,$$

oder, da das erste Glied rechts die Summe einer endlichen Anzahl von Reihen ist:

$$G(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{kh} x^h + \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h,$$

woraus sich ergibt:

$$F(x) - G(x) = F_n(x) - \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h,$$

und folglich, wegen (7), für $|x| = \varrho$:

$$|F(x) - G(x)| < \sigma,$$

oder, da σ willkürlich ist:

$$F(x) = G(x).$$

Ableitung und Integral einer Potenzreihe.

133. Unter der Ableitung einer Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

versteht man die Reihe:

$$\mathfrak{P}'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^{h-1},$$

die man erhält, indem man jedes Glied mit dem in ihm vorkommenden Exponenten von x multipliziert, den Exponenten selbst aber um eine Einheit vermindert.

Die Ableitung der Ableitung wird zweite Ableitung genannt und mit $\mathfrak{P}''(x)$ bezeichnet usf.

Als Integral einer Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

bezeichnet man die Reihe:

$$\int \mathfrak{P}(x)\,dx = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h x^{h+1}}{h+1} + C, \tag{1}$$

die man erhält, indem man jeden Exponenten um eine Einheit vermehrt, das betreffende Glied durch den so vermehrten Exponenten dividiert und dann eine willkürliche Konstante hinzufügt.

Ist die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \frac{a_h x^{h+1}}{h+1}$ für einen Wert x_0 von x konvergent, so schreibt man:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h x^{h+1}}{h+1} - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h x_0^{h+1}}{h+1} = \int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}(x)\,dx;$$

es ist insbesondere:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h x^{h+1}}{h+1} = \int_{0}^{x} \mathfrak{P}(x)\,dx.$$

Manchmal schreibt man auch $\int\limits_{x_0} \mathfrak{P}(x)\,dx$ anstatt $\int\limits_{x_0}^{x} \mathfrak{P}(x)\,dx$.

Die Ableitung des Integrals einer Potenzreihe fällt, wie leicht einzusehen, mit der ursprünglichen Reihe zusammen. Dasselbe kann man, von einer willkürlichen additiven Konstanten abgesehen, von dem Integral der Ableitung einer Potenzreihe sagen.

134. Eine Potenzreihe und ihre Ableitung haben denselben Konvergenzradius.

Es sei ϱ der Konvergenzradius der Reihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h,$$

ϱ' derjenige ihrer Ableitung:

$$\mathfrak{P}'(x) = \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^h.$$

Es läßt sich vermittelst der Konvergenzkriterien der algebraischen Analysis leicht beweisen, daß die Reihen:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} h x^h, \quad \psi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h}$$

für $|x| < 1$ konvergent, für $|x| > 1$ divergent sind, so daß ihr Konvergenzradius 1 ist.

Wenden wir den Satz des Art. 117 zunächst auf die Reihen $\mathfrak{P}(x)$, $\varphi(x)$, dann auf die Reihen $x\mathfrak{P}'(x)$, $\psi(x)$ an, so finden wir demgemäß:

$$\varrho' \geqq \varrho \times 1, \quad \varrho \geqq \varrho' \times 1,$$

woraus $\varrho = \varrho'$ folgt.

Auf Grund der letzten Bemerkung des vorigen Artikels läßt sich der Satz auch so aussprechen:

Eine Potenzreihe und ihre Integralreihe haben denselben Konvergenzradius.

135. In Art. 128, 131 haben wir gefunden:

(1) $$a_h = \mathfrak{M} \frac{\mathfrak{P}(\varrho)}{\varrho^h},$$

(2) $$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{M} \frac{\varrho \mathfrak{P}(\varrho)}{\varrho - x} \text{ für } |x| < \varrho,$$

vorausgesetzt, daß ϱ kleiner ist als der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$. Man kann nun Formeln finden, die für alle Ableitungen von $\mathfrak{P}(x)$ zu (2) analog sind.

Wegen (1) hat man:

$$\mathfrak{P}'(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\, a_{h+1}\, x^h = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\, x^h\, \mathfrak{M}\, \frac{\mathfrak{P}(\varrho)}{\varrho^{h+1}} =$$
$$= \mathfrak{M}\left[\mathfrak{P}(\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\, \frac{x^h}{\varrho^{h+1}}\right],$$

und allgemein:

$$\mathfrak{P}^{(r)}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\cdots(h+1)\, a_{h+r}\, x^h$$
$$= \mathfrak{M}\left[\mathfrak{P}(\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\cdots(h+1)\, \frac{x^h}{\varrho^{h+r}}\right].$$

Nun weiß man, daß für $|t| < 1$ die Entwicklung besteht:

$$\frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h-1}{r-1} t^h =$$
$$= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{h=0}^{\infty} (h+r-1)(h+r-2)\cdots(h+1)\, t^h \text{ [1]};$$

daraus folgt für $|x| < \varrho$, wenn $r+1$ an die Stelle von r tritt:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\varrho}\right)^{r+1}} = \frac{1}{r!} \sum_{h=0}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\cdots(h+1)\, \frac{x^h}{\varrho^h},$$

---

1) Diese Formel läßt sich überaus leicht durch vollständige Induktion beweisen.

Vorausgesetzt, daß:

$$\frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h-1}{r-1} t^h = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h-1}{h} t^h,$$

hat man:

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h-1}{h} t^h \cdot \sum_{h=0}^{\infty} t^h =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left[\binom{r+h-1}{h} + \binom{r+h-2}{h-1} + \cdots + \binom{r}{1} + 1\right] t^h.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\binom{r+h-1}{h} + \binom{r+h-2}{h-1} + \cdots + \binom{r}{1} + 1 = \binom{r+h}{h},$$

folglich ist:

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{h} t^h.$$

und demnach:

$$\mathfrak{P}^{(r)}(x) = r!\,\mathfrak{M}\,\frac{\varrho\,\mathfrak{P}(\varrho)}{(\varrho - x)^{r+1}}.$$

136. Wir werden in diesem und den folgenden Artikeln zeigen, daß die gewöhnlichen Differentiationsregeln auch bei unserer Definition der Ableitung gelten[1]).

Die Ableitung einer auf ein einziges konstantes Glied reduzierten Reihe ist Null.

Umgekehrt: Eine Reihe, die identisch Null ist (d. h. deren sämtliche Koeffizienten Null sind), kann als Ableitung einer Reihe aufgefaßt werden, die auf ein einziges konstantes Glied reduziert ist, das übrigens jeden beliebigen Wert haben kann.

137. Die Ableitung der Summe zweier Potenzreihen ist die Summe ihrer Ableitungen.

Sind zwei Potenzreihen:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h} x^h, \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h} x^h$$

gegeben und setzt man:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x) + \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} [a_{1h} + a_{2h}] x^h,$$

so ist:

$$\mathfrak{P}_1'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h a_{1h} x^{h-1}, \quad \mathfrak{P}_2'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h a_{2h} x^{h-1},$$

$$\mathfrak{P}'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h [a_{1h} + a_{2h}] x^{h-1},$$

folglich:

$$\mathfrak{P}'(x) = \mathfrak{P}_1'(x) + \mathfrak{P}_2'(x).$$

138. Die Ableitung des Produktes:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2(x)$$

zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ ist:

$$\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2'(x) + \mathfrak{P}_1'(x)\,\mathfrak{P}_2(x).$$

Es seien $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ durch die Formeln (1) des vorigen Artikels ausgedrückt. Nach dem aus der Reihentheorie bekannten Multiplikationsgesetz von Reihen hat man:

---

1) Vivanti 502.

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h,$$

wo:

$$c_h = \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k};$$

folglich ist:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^h \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k},$$

ferner:

$$\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2'(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h} x^h \cdot \sum_{h=1}^{\infty} h a_{2h} x^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty} x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} (h-k)\, a_{1k} a_{2,h-k},$$

$$\mathfrak{P}_1'(x)\,\mathfrak{P}_2(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h a_{1h} x^{h-1} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h} x^h = \sum_{h=1}^{\infty} x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} k \cdot a_{1k} a_{2,h-k}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2'(x) + \mathfrak{P}_1'(x)\,\mathfrak{P}_2(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k} = \mathfrak{P}'(x),$$

womit der Satz bewiesen ist.

139. Die Ableitung des Produktes mehrerer Potenzreihen erhält man, indem man die Ableitung jeder einzelnen Reihe mit allen übrigen multipliziert und die Produkte addiert.

Da der Satz für das Produkt zweier Potenzreihen gilt (Art. 138), so genügt es, ihn durch vollständige Induktion zu beweisen.

Es sei:

$$\mathfrak{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h = \prod_{r=1}^{n} \mathfrak{P}_r(x),$$

wo:

$$\mathfrak{P}_r(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{rh} x^h \qquad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

Setzt man:

$$\prod_{r=1}^{n-1} \mathfrak{P}_r(x) = \mathfrak{Q}(x),$$

so hat man:

$$\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{Q}(x)\,\mathfrak{P}_n(x),$$

und folglich, da der Satz für $n = 2$ gilt und für $n - 1$ als wahr vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}'(x) &= \mathfrak{P}_1'(x)\,\mathfrak{P}_2(x)\,\mathfrak{P}_3(x)\cdots\mathfrak{P}_{n-1}(x)\\ &\quad+\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2'(x)\,\mathfrak{P}_3(x)\cdots\mathfrak{P}_{n-1}(x)+\cdots\\ &\quad+\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2(x)\cdots\mathfrak{P}_{n-2}(x)\,\mathfrak{P}_{n-1}'(x),\\ \mathfrak{R}'(x) &= \mathfrak{Q}(x)\,\mathfrak{P}_n'(x)+\mathfrak{Q}'(x)\,\mathfrak{P}_n(x),\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}'(x) &= \mathfrak{P}_1'(x)\,\mathfrak{P}_2(x)\,\mathfrak{P}_3(x)\cdots\mathfrak{P}_n(x)\\ &\quad+\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2'(x)\,\mathfrak{P}_3(x)\cdots\mathfrak{P}_n(x)+\cdots\\ &\quad+\mathfrak{P}_1(x)\,\mathfrak{P}_2(x)\cdots\mathfrak{P}_{n-1}(x)\,\mathfrak{P}_n'(x).\end{aligned}$$

140. Die Ableitung von $[\mathfrak{P}(x)]^n$, wo n eine ganze und positive Zahl, $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe bezeichnet, ist $n[\mathfrak{P}(x)]^{n-1}\mathfrak{P}'(x)$.

Es genügt, in dem vorhergehenden Satze:

$$\mathfrak{P}_1(x)=\mathfrak{P}_2(x)=\cdots=\mathfrak{P}_n(x)=\mathfrak{P}(x)$$

zu setzen.

Daraus läßt sich ein bemerkenswertes Ergebnis herleiten.

Setzen wir:

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{h=0}^{\infty}a_h x^h,\quad [\mathfrak{P}(x)]^n=\sum_{h=0}^{\infty}a_h^{(n)}x^h,\quad [\mathfrak{P}(x)]^{n-1}=\sum_{h=0}^{\infty}a_h^{(n-1)}x^h;$$

dann ist:

$$\sum_{h=1}^{\infty}h a_h^{(n)}x^{h-1}=n\sum_{h=0}^{\infty}a_h^{(n-1)}x^h\cdot\sum_{h=1}^{\infty}h a_h x^{h-1}=n\sum_{h=1}^{\infty}\left[x^{h-1}\sum_{k=1}^{h}k a_k a_{h-k}^{(n-1)}\right],$$

woraus folgt:

$$a_h^{(n)}=\frac{n}{h}\sum_{k=1}^{h}k a_k a_{h-k}^{(n-1)}. \tag{1}$$

141. Es sei eine Potenzreihe:

$$\mathfrak{Q}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$$

gegeben, deren Konvergenzradius σ sei, und eine zweite Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{h=0}^{\infty}a_h x^h,$$

und es sei für $|x|<\varrho$:

$$|\mathfrak{P}(x)|\leqq\sigma'<\sigma.$$

Dann ist die Reihe von Potenzreihen:

$$\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [\mathfrak{P}(x)]^n$$

in jedem Bereiche gleichmäßig konvergent, der in dem mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreise enthalten ist, und läßt sich folglich (Art. 132) in der Form einer einfachen Potenzreihe darstellen:

$$\mathfrak{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h,$$

wo:

$$c_h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_h^{(n)}.$$

Wir werden jetzt beweisen, daß die Ableitung von $\mathfrak{R}(x)$ das Produkt der Ableitung von $\mathfrak{P}(x)$ mit der von $\mathfrak{Q}(z)$ ist, wo $z = \mathfrak{P}(x)$ zu setzen ist.

Man hat:

$$\mathfrak{Q}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1},$$

folglich:

$$\mathfrak{Q}'[\mathfrak{P}(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n [\mathfrak{P}(x)]^{n-1}.$$

Da (Art. 134) auch $\mathfrak{Q}'(z)$ den Konvergenzradius σ hat, so läßt sich auch auf diese Reihe der Satz des Art. 132 anwenden, und man erhält:

$$\mathfrak{Q}'[\mathfrak{P}(x)] = \sum_{h=0}^{\infty} d_h x^h,$$

wo $d_h = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n a_h^{(n-1)}$.

Andrerseits ist nach (1) des vorigen Artikels:

$$c_h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_h^{(n)} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{h} n k b_n a_k a_{h-k}^{(n-1)} =$$
$$= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \left[k a_k \sum_{n=1}^{\infty} n b_n a_{h-k}^{(n-1)} \right] = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} k a_k d_{h-k},$$

folglich:

$$\mathfrak{R}'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h c_h x^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k a_k d_{h-k} \right],$$

oder:

$$\mathfrak{R}'(x) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{P}(x)) \cdot \mathfrak{P}'(x).$$

142. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, eine Potenzreihe, falls sie überhaupt existiert, zu finden, die mit ihrer Ableitung identisch ist. Ist $\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h$ die gesuchte Reihe, so muß sein:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^{h-1},$$

oder:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) a_{h+1} x^h,$$

woraus für alle Werte von h:

$$a_h = (h+1) a_{h+1},$$

mithin:

$$a_0 = 1!\, a_1 = 2!\, a_2 = 3!\, a_3 = \cdots,$$

oder:

$$a_h = \frac{a_0}{h!}$$

folgt. Die gesuchte Reihe ist also:

$$a_0 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right);$$

der eingeklammerte Ausdruck heißt die Exponentialreihe und wird gewöhnlich mit e^x bezeichnet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h!}$$

(unter der bekannten Festsetzung: $0! = 1$).

Die Exponentialreihe ist für jeden Wert von x absolut konvergent, da sich ja das Verhältnis des n-ten Gliedes zum $(n-1)$-ten der Null nähert, wenn n über alle Grenzen wächst. Der Konvergenzradius der Reihe ist folglich unendlich.

Die Fundamentaleigenschaft der Exponentialreihe ist folgende:

$$e^x e^y = e^{x+y}. \tag{1}$$

In der Tat ist:

$$e^x e^y = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\frac{x^h}{h!} + \frac{x^{h-1} y}{(h-1)!\, 1!} + \frac{x^{h-2} y^2}{(h-2)!\, 2!} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{x^2 y^{h-2}}{2!\,(h-2)!} + \frac{x y^{h-1}}{1!\,(h-1)!} + \frac{y^h}{h!}\right];$$

nun ist:
$$\binom{h}{r} = \frac{h!}{(h-r)!\,r!},$$
folglich:
$$e^x e^y = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left[x^h + \binom{h}{1}x^{h-1}y + \binom{h}{2}x^{h-2}y^2 + \cdots + \binom{h}{h-2}x^2y^{h-2} + \right.$$
$$\left. + \binom{h}{h-1}x\,y^{h-1} + y^h\right] = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x+y)^h}{h!} = e^{x+y}.$$

Aus (1) und aus $e^0 = 1$ folgt:

(2) $$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Aus (1) und (2) folgt, daß man e^x in der Tat als die Potenz einer Zahl e mit dem Exponenten x ansehen kann.

143. Ist $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe, so ist (Art. 132) $e^{\mathfrak{P}(x)}$ eine mindestens innerhalb des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(x)$ konvergente Potenzreihe. Ihre Ableitung ist (Art. 141, 142):
$$e^{\mathfrak{P}(x)}\mathfrak{P}'(x).$$

144. Es mögen hier einige die Funktion e^x betreffende Relationen Platz finden, die uns in der Folge von Nutzen sein werden.

Zunächst hat man:
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}.$$
Die Zahl e, deren Wert 2,71828... beträgt, dient als Basis eines Systems von Logarithmen, die hyperbolische oder natürliche Logarithmen genannt werden. (S. unten Art. 146).

Für jede beliebige positive Zahl h hat man:
$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h < e < \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h+1};$$
wächst h unbegrenzt, so nähern sich überdies das erste und dritte Glied der Ungleichung dem Werte e.

Wir haben:
$$\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = 1 + \binom{h}{1}\frac{1}{h} + \binom{h}{2}\frac{1}{h^2} + \cdots + \binom{h}{h}\frac{1}{h^h}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{h}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{h}\right)\left(1 - \frac{2}{h}\right) +$$
$$+ \cdots + \frac{1}{h!}\left(1 - \frac{1}{h}\right)\left(1 - \frac{2}{h}\right)\cdots\left(1 - \frac{h-1}{h}\right)$$
$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{h!} < e.$$

Wächst h, so wachsen alle Glieder der Entwicklung von $\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$, und außerdem kommen neue positive Glieder hinzu, so daß, wenn h nach ganzen positiven Werten wächst, auch $\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$ beständig wächst. Weil aber diese Summe begrenzt ist, da sie stets $< e$ bleibt, so nähert sie sich nach einem bekannten Satze einer endlichen Grenze $\leqq e$, die wir vorläufig mit g bezeichnen wollen.

Setzt man:

$$\theta_r = \binom{h}{r}\frac{1}{h^r} = \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\left(1-\frac{2}{h}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{h}\right)$$

also:

$$\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = 1+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_h,$$

so hat man[1]):

$$\theta_{r+1} = \frac{1}{r+1}\left(1-\frac{r}{h}\right)\theta_r < \frac{1}{r+1}\theta_r;$$

ebenso:

$$\theta_{r+2} < \frac{1}{r+2}\theta_{r+1} < \frac{1}{(r+2)(r+1)}\theta_r < \frac{1}{(r+1)^2}\theta_r$$

usf. Daraus folgt:

$$\theta_{r+1}+\theta_{r+2}+\cdots+\theta_h < \left(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{(r+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(r+1)^{h-r}}\right)\theta_r < \frac{\theta_r}{r},$$

und:

$$\left(1+\frac{1}{h}\right)^h - \frac{\theta_r}{r} < 1+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_r < \left(1+\frac{1}{h}\right)^h.$$

Läßt man h ins Unendliche zunehmen, und beachtet man, daß:

$$\lim_{h=\infty}\theta_r = \frac{1}{r!},$$

so erhält man daraus:

$$g-\frac{1}{r\cdot r!} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{r!} < g,$$

und schließlich, wenn man r ins Unendliche wachsen läßt, $g=e$.

Also ist:

$$\lim_{h=\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = e.$$

Daraus folgt weiter:

$$\lim_{h=\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h+1} = \lim_{h=\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\cdot\lim_{h=\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right) = e,$$

1) Vgl. Cesàro-Kowalewski, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Übungsbeispielen, Leipzig (B. G. Teubner) 1904, S. 121.

immer vorausgesetzt, daß h dem Unendlichen nach ganzen positiven Werten zustrebt.

Nun läßt sich aber beweisen, daß $\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h+1}$ abnimmt, wenn h wächst. Setzen wir:

$$\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h+1}=\varphi(h),$$

so ist:

$$\frac{\varphi(h)}{\varphi(h-1)}=\frac{\left(\frac{h+1}{h}\right)^{h+1}}{\left(\frac{h}{h-1}\right)^{h}}=\frac{h+1}{h}\left[\frac{(h+1)(h-1)}{h^2}\right]^h$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{h^2}\right)^h}{\frac{1}{1+\frac{1}{h}}}=\frac{P}{Q},$$

wo:

$$P=\left(1-\frac{1}{h^2}\right)^h=1-\frac{1}{h}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h^2}-\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\left(1-\frac{2}{h}\right)\frac{1}{h^3}+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^h}{h!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{h}\right)\frac{1}{h^h},$$

$$Q=1-\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^3}+\cdots=$$
$$=1-\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^3}+\cdots+\frac{(-1)^h}{h^h}+\frac{(-1)^{h+1}}{h^{h+1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{h}};$$

mithin ist für gerade wie ungerade h:

$$Q>1-\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}-\cdots+\frac{(-1)^h}{h^h}-\frac{1}{h^{h+1}}.$$

Daraus folgt:

$$Q-P>\left[1-\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\right]\frac{1}{h^2}-\left[1-\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\left(1-\frac{2}{h}\right)\right]\frac{1}{h^3}+\cdots$$
$$+(-1)^h\left[1-\frac{1}{h!}\left(1-\frac{1}{h}\right)\left(1-\frac{2}{h}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{h}\right)\right]\frac{1}{h^h}-\frac{1}{h^{h+1}}$$
$$>\left\{\frac{2!-1}{2!}\cdot\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^3}+\frac{4!-1}{4!}\cdot\frac{1}{h^4}-\frac{1}{h^5}+\cdots\right\}-\frac{1}{h^{h+1}}.$$

Die Summe innerhalb der geschweiften Klammern besteht für $h>2$ aus alternierenden und abnehmenden Gliedern, ihr Wert ist folglich größer als die Differenz der ersten beiden Glieder; also ist:

$$Q-P>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^3}-\frac{1}{h^{h+1}}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2}-\frac{2}{h^3}.$$

Für $h \geqq 4$ ist folglich $Q - P > 0$, d. h. $\frac{P}{Q} < 1$. Für die Anfangswerte von h bestätigt es sich unmittelbar, daß dieses Verhältnis kleiner ist als 1. Folglich nimmt $\varphi(h)$ ab, wenn h wächst; weil aber sein Grenzwert für $h = \infty$ gleich e ist, so folgt daraus, daß $\varphi(h) > e$ ist für jeden ganzen und positiven Wert von h.

145. Setzen wir:

$$\lambda = x^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots\right),$$

so ist:

$$e^x - 1 = x + \lambda,$$

mithin:

$$|x| - |\lambda| \leqq |e^x - 1| \leqq |x| + |\lambda|.$$

Ist $|x| < 1$, so folgt:

$$|\lambda| < |x|^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right) = |x|^2(e - 2),$$

und da $e < \frac{11}{4}$:

$$|\lambda| < \frac{3}{4}|x|^2 < \frac{3}{4}|x|;$$

mithin ist:

$$\frac{1}{4}|x| < |e^x - 1| < \frac{7}{4}|x|,$$

wofür man schreiben kann:

$$|e^x - 1| = \theta\,|x|,$$

wo $\frac{1}{4} < \theta < \frac{7}{4}$ und $|x| < 1$ ist.

Sei jetzt x irgend eine positive Größe; offenbar gilt dann:

(1) $$e^x > 1 + x,$$

(2) $$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Man hat auch:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Für $0 < x < 1$ nehmen die Glieder, vom Vorzeichen abgesehen, fortgesetzt ab, also folgt unmittelbar:

(3) $$e^{-x} > 1 - x \qquad (0 < x < 1)$$

und:

(4) $$e^{-x} < 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \qquad (0 < x < 1).$$

Ferner ist, wiederum für $0 < x < 1$, wegen (1):

$$e^x\left(1-\frac{x}{2}\right) > (1+x)\left(1-\frac{x}{2}\right) = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2} > 1,$$

mithin:

$$e^x > \frac{1}{1-\frac{x}{2}},$$

oder auch:

(5) $$e^{-x} < 1-\frac{x}{2} \qquad (0 < x < 1).$$

146. Ist eine ganze und positive Zahl n gegeben, so läßt sich ein positiver Wert ϱ von der Art angeben, daß für jedes $x > \varrho$:

$$e^x > x^n$$

ist.

In der Tat hat man:

$$e^x > \frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x^n\left[\frac{1}{n!}+\frac{x}{(n+1)!}\right];$$

nimmt man:

$$\varrho = (n+1)! - (n+1),$$

so folgt daraus:

$$\frac{1}{n!}+\frac{\varrho}{(n+1)!} = 1,$$

mithin für jedes $x > \varrho$:

$$\frac{1}{n!}+\frac{x}{(n+1)!} > 1,$$

und schließlich $e^x > x^n$.

Setzt man $n+1$ für n, so kann diese Formel auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{e^x}{x^n} > x;$$

sie lehrt uns, daß für jede beliebige ganze und positive Zahl n der Quotient $\frac{e^x}{x^n}$ unbegrenzt wächst, wenn x unbegrenzt wächst. Dasselbe kann für jede beliebige positive Größe τ offenbar von $\frac{e^{\tau x}}{x^n}$ behauptet werden.

Setzen wir für ein positives oder negatives reelles x:

$$u = e^x,$$

so ist offenbar $u > 1$, wenn x positiv ist; dagegen ist für ein negatives x, da $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $0 < u < 1$. Wächst x, so wächst auch u, folg-

lich entspricht jedem positiven Werte von u ein und nur ein reeller Wert von x; er wird der **hyperbolische** oder **natürliche Logarithmus** von u genannt und folgendermaßen geschrieben:

$$x = \lg u.$$

Aus Art 142, (1) folgt unmittelbar:

$$\lg(uv) = \lg u + \lg v.$$

Weiterhin folgt aus der zuletzt gewonnenen Ungleichung, daß sich für jedwede ganze und positive Zahl n das Verhältnis $\frac{(\lg u)^n}{u}$ der Null nähert, wenn u über alle Grenzen wächst.

In der Analysis pflegt man auch die Logarithmen komplexer Größen in Betracht zu ziehen. Ist:

$$u = e^x, \quad u = v + iw, \quad x = y + iz,$$

so schreibt man ebenfalls:

$$x = \lg u.$$

Es ist dann:

$$u = v + iw = e^{y+iz} = e^y e^{iz};$$

ferner, da e^{iz} und e^{-iz} als konjugierte Größen denselben absoluten Betrag haben:

$$|e^{iz}|^2 = |e^{iz}|\,|e^{-iz}| = |e^{iz}e^{-iz}| = 1,$$

woraus folgt:

$$|e^{iz}| = 1,$$

also:

$$|u| = e^y,$$

oder:

$$y = \lg\sqrt{v^2 + w^2}.$$

Man ersieht daraus, daß y bei gegebenem u vollständig bestimmt ist.

147. Es sei die Potenzreihe:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

gegeben; ihr Konvergenzradius sei ϱ. Bezeichnen wir mit c einen Punkt innerhalb ihres Konvergenzkreises und setzen wir:

$$x = c + x_1,$$

so wird sich $\mathfrak{P}(x)$ in eine Summe von unendlich vielen Polynomen in x_1 umwandeln:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (c + x_1)^h = \varphi(x_1).$$

Da die Reihe (1) in jedem Bereiche innerhalb des Kreises ϱ gleichmäßig konvergent ist (Art. 111), so wird sie es im besondern auf einer beliebigen, innerhalb des Kreises gelegenen Kreislinie um c sein; folglich (Art. 132) wird man die Reihe $\varphi(x_1)$ in eine Potenzreihe von x_1 transformieren können:

$$\varphi(x_1) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x_1^r,$$

wo A_r die Summe der Koeffizienten von x_1^r in den Gliedern von (2) ist. Die allgemeine Form dieser Glieder ist:

$$a_h(c + x_1)^h = a_h \sum_{r=0}^{h} \binom{h}{r} c^{h-r} x_1^r;$$

daraus ergibt sich, wenn man beachtet, daß x_1^r nur in den Gliedern vorkommt, in denen $h \geqq r$ ist:

$$A_r = \sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h c^{h-r} = \frac{1}{r!} \sum_{h=r}^{\infty} h(h-1)\cdots(h-r+1) a_h c^{h-r}.$$

Diese letzte Summe ist aber die r-te Ableitung von $\mathfrak{P}(x)$ für $x = c$; folglich hat man:

$$A_r = \frac{1}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c),$$

und (wenn man festsetzt, daß $\mathfrak{P}^{(0)}(c) = \mathfrak{P}(c)$ sei):

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi(x_1) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c) x_1^r,$$

oder:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c) = \mathfrak{P}(c) + \frac{x-c}{1!} \mathfrak{P}'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} \mathfrak{P}''(c) + \cdots;$$

das ist aber die bekannte Taylorsche Reihe. Sie ist in jedem um den Punkt c beschriebenen, innerhalb des Konvergenzkreises ϱ der Reihe (1) enthaltenen Kreise konvergent; ihr Konvergenzradius ist folglich nicht kleiner als $\varrho - |c|$.

148. Aus der gefundenen Formel folgt:

$$\frac{\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(c)}{x - c} = \mathfrak{P}'(c) + \frac{x-c}{2!} \mathfrak{P}''(c) + \frac{(x-c)^2}{3!} \mathfrak{P}'''(c) + \cdots.$$

Wenn x sich c nähert, so nähern sich alle Glieder der Reihe auf der rechten Seite außer dem ersten der Null; folglich nähert sich ebenso, da die Reihe gleichmäßig konvergent ist, ihre Summe der Null. Daraus folgt:

$$\lim_{x=c} \frac{\mathfrak{P}(x)-\mathfrak{P}(c)}{x-c} = \mathfrak{P}'(c).$$

D. h.: Unsere Definition der Ableitung deckt sich mit der in der Infinitesimalrechnung üblichen.

149. Aus der Taylorschen Reihe läßt sich alles folgern, was gewöhnlich in den Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung aus dieser Formel hergeleitet wird. Wir wollen hier nur eine Einzelheit berühren.

Die Taylorsche Reihe werde folgendermaßen geschrieben:

$$\mathfrak{P}(c+u) = \mathfrak{P}(c) + \frac{u}{1!}\mathfrak{P}'(c) + \frac{u^2}{2!}\mathfrak{P}''(c) + \cdots,$$

und entsprechend:

$$\mathfrak{P}(c-u) = \mathfrak{P}(c) - \frac{u}{1!}\mathfrak{P}'(c) + \frac{u^2}{2!}\mathfrak{P}''(c) - \cdots.$$

Nehmen wir an, daß c, u sowie die Koeffizienten von $\mathfrak{P}(u)$ reell sind und daß:

$$\mathfrak{P}'(c) = \mathfrak{P}''(c) = \cdots = \mathfrak{P}^{(r-1)}(c) = 0, \quad \mathfrak{P}^{(r)}(c) \neq 0$$

ist, so haben wir:

$$\mathfrak{P}(c+u) - \mathfrak{P}(c) = \qquad u^r\left[\frac{1}{r!}\mathfrak{P}^{(r)}(c) + \frac{u}{r+1!}\mathfrak{P}^{(r+1)}(c) + \cdots\right] = u^r\mathfrak{Q}(u),$$

$$\mathfrak{P}(c-u) - \mathfrak{P}(c) = (-u)^r\left[\frac{1}{r!}\mathfrak{P}^{(r)}(c) - \frac{u}{r+1!}\mathfrak{P}^{(r+1)}(c) + \cdots\right] = (-u)^r\mathfrak{R}(u).$$

Wegen der Stetigkeit der Potenzreihen (Art. 112) können wir einen reellen positiven Wert σ von der Art angeben, daß $\mathfrak{Q}(u)$ und $\mathfrak{R}(u)$ für jedes $|u| < \sigma$ mit ihrem ersten Gliede, also mit $\mathfrak{P}^{(r)}(c)$, im Vorzeichen übereinstimmen. Daraus folgt, daß die Differenzen:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(c+u) - \mathfrak{P}(c), \quad \mathfrak{P}(c-u) - \mathfrak{P}(c)$$

für $|u| < \sigma$ dasselbe Vorzeichen haben oder nicht, je nachdem r gerade oder ungerade ist, und daß ihr gemeinsames Vorzeichen im ersten Falle das von $\mathfrak{P}^{(r)}(c)$ ist.

Nun sagt man, eine reelle Funktion besitze für einen Wert c der Veränderlichen ein Maximum oder Minimum[1]), wenn sich eine Um-

1) Die Worte Maximum und Minimum haben hier eine etwas andere Bedeutung, als ihnen in Art. 96 beigelegt worden ist.

gebung von c angeben läßt, in deren sämtlichen Punkten die Funktion Werte annimmt, die kleiner, beziehentlich größer sind als der Wert, den sie in c besitzt. Es liegt nämlich ein Maximum oder Minimum in c vor, wenn die beiden Differenzen (1) für Werte von u, die absolut kleiner sind als eine bestimmte positive Größe, dasselbe Vorzeichen haben, also zugleich negativ, beziehentlich positiv sind. Man darf deshalb schließen, daß es, wenn in c ein Maximum oder Minimum statthaben soll, notwendig, aber auch hinreichend ist, daß die erste Ableitung in c verschwindet, die erste Ableitung aber, die in diesem Punkte nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist; je nachdem diese Ableitung negativ oder positiv ist, handelt es sich um ein Maximum oder Minimum.

Wenden wir diese Regel auf ein Beispiel an.

Es sei:

$$\mathfrak{P}(x) = xe^x;$$

daraus folgt (Art. 138, 142):

$$\mathfrak{P}'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1),$$
$$\mathfrak{P}''(x) = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2).$$

$\mathfrak{P}'(x)$ verschwindet für $x = -1$, und man hat: $\mathfrak{P}''(-1) = e^{-1} > 0$; daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{P}(x)$ für $x = -1$ ein Minimum besitzt. Der Wert von $\mathfrak{P}(x)$ für $x = -1$ ist $-\frac{1}{e}$.

Da, wie bereits bemerkt, x und e^x zugleich zu- und abnehmen, so besitzt auch e^{xe^x} für $x = -1$ ein Minimum.

Setzen wir $x = \lg u$, so haben wir: $e^{xe^x} = e^{u \lg u} = (e^{\lg u})^u = u^u$; außerdem ist u für $x = -1$ gleich $\frac{1}{e}$; also besitzt u^u für $u = \frac{1}{e}$ ein Minimum

Transformierte Reihen.

150. Die gefundene Beziehung (Art. 147):

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c)$$

transformiert eine Potenzreihe von x in eine Potenzreihe von $x - c$, wobei c ein Punkt innerhalb des Konvergenzkreises ϱ der ersten Reihe ist. Der Konvergenzradius ϱ_1 der zweiten Reihe ist mindestens gleich $\varrho - |c|$, und deshalb berührt der Konvergenzkreis der zweiten Reihe den Kreis ϱ von innen, oder er geht zum Teil darüber hinaus.

Die auf der rechten Seite von (1) stehende Reihe heißt die aus $\mathfrak{P}(x)$ in bezug auf c transformierte[1]) Reihe und wird mit $\mathfrak{P}(x|c)$ bezeichnet.

Für jeden Punkt x innerhalb der Konvergenzkreise der beiden Reihen hat man:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x|c).$$

Man nehme nun innerhalb des mit dem Radius ϱ_1 um c beschriebenen Kreises einen Punkt d an. Die aus $\mathfrak{P}(x|c)$ in bezug auf d transformierte Reihe, die man mit $\mathfrak{P}(x|c, d)$ bezeichnen kann, wird eine Potenzreihe von:

$$[(x - c) - (d - c)]$$

oder von $x - d$ sein. Liegt der Punkt d zugleich innerhalb des Kreises ϱ, so werden wir auch die Reihe $\mathfrak{P}(x|d)$ bilden können, die aus $\mathfrak{P}(x)$ in bezug auf d transformiert ist und demnach eine Potenzreihe von $x - d$ ist. Wir werden beweisen, daß $\mathfrak{P}(x|c, d)$ und $\mathfrak{P}(x|d)$ miteinander identisch sind.

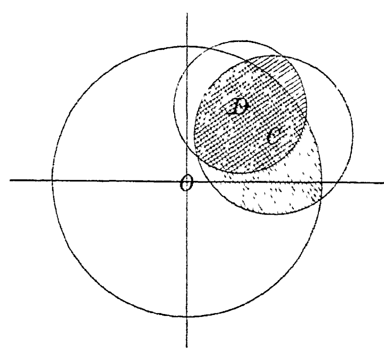

Fig 1

Es seien ϱ_2, ϱ_2' die Konvergenzradien dieser beiden Reihen.

In den Punkten innerhalb der Kreise ϱ, ϱ_1 hat man:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x|c);$$

in den Punkten innerhalb der Kreise ϱ_1, ϱ_2 hat man:

$$\mathfrak{P}(x|c) = \mathfrak{P}(x|c, d);$$

in den Punkten innerhalb der Kreise ϱ, ϱ_2' hat man:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x|d)$$

Bezeichnen wir also mit $\overline{\varrho_2}$ den kleineren der Radien der beiden konzentrischen Kreise ϱ_2, ϱ_2', so wird in den den drei Kreisen ϱ, ϱ_1, $\overline{\varrho_2}$ gemeinsamen Punkten[2]) sein:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x|c, d), \quad \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x|d),$$

und demnach:

$$\mathfrak{P}(x|c, d) = \mathfrak{P}(x|d).$$

---

1) Wir gebrauchen das Wort „transformiert" statt des üblichen „abgeleitet", um Verwechslungen zu vermeiden.

2) Derartige Punkte sind unter der Voraussetzung, daß c innerhalb des Kreises ϱ und d innerhalb der beiden Kreise ϱ, ϱ_1 liegt, immer vorhanden.

Diese Gleichung wird daher in allen Punkten eines bestimmten Kreises mit dem Mittelpunkt d statthaben, woraus folgt (Art. 121):

$$\mathfrak{P}(x|c, d) \equiv \mathfrak{P}(x|d).$$

Man drückt dies dahin aus, daß man sagt: Die **unmittelbar** oder **mittelbar** aus einer gegebenen Reihe in bezug auf denselben innerhalb ihres Konvergenzkreises liegenden Punkt transformierten Reihen sind identisch gleich.

Der Satz wird ohne Schwierigkeit auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Zwischenpunkten ausgedehnt, vorausgesetzt, daß sie alle innerhalb des Konvergenzkreises der ursprünglichen Reihe liegen.

151. Liegt der Anfangspunkt innerhalb des Kreises ϱ_1, so kann man den Punkt d mit ihm zusammenfallen lassen, und die zuletzt gefundene Beziehung wird zu folgender:

$$\mathfrak{P}(x|c, 0) \equiv \mathfrak{P}(x).$$

D. h.: Die ursprüngliche Reihe kann als aus ihrer transformierten Reihe transformiert angesehen werden.

Wir werden beweisen, daß sich die Reihe $\mathfrak{P}(x)$, auch wenn der Anfangspunkt nicht innerhalb des Kreises ϱ_1 liegt, als aus $\mathfrak{P}(x|c)$ — selbstverständlich mittelbar — transformiert ansehen läßt.

Es sei A der Schnittpunkt der Verlängerung von OC (wo C den Wert c darstellt) mit dem Kreise ϱ, M der Schnittpunkt von OC mit dem Kreise ϱ_1, somit:

$$OC = |c| = \gamma, \quad OA = \varrho,$$
$$OM = \gamma - \varrho_1.$$

Auf MA nehmen wir eine Strecke $MD = \frac{\varrho - \gamma}{2}$; bezeichnet d die dem Punkte D zugehörige Größe, so ist:

$$|d| = \delta = \gamma - \varrho_1 + \frac{\varrho - \gamma}{2} = \frac{\varrho + \gamma}{2} - \varrho_1.$$

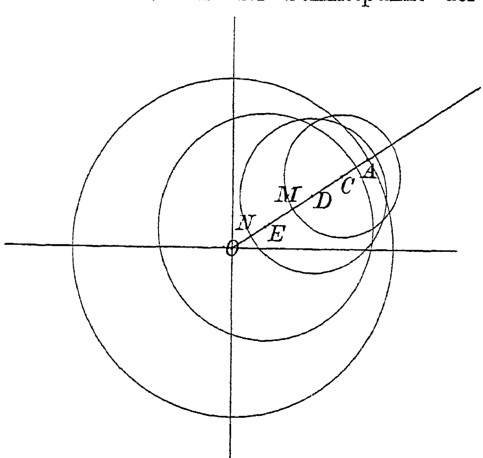

Fig. 2

Ist ϱ_2 der Konvergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}(x|c, d)$, so ist:

$$\varrho_2 \geqq \varrho - \delta,$$

folglich:

$$\delta - \varrho_2 \leqq 2\delta - \varrho = \gamma - 2\varrho_1.$$

Ist $\varrho_2 > OD$, so liegt der Anfangspunkt innerhalb des Kreises ϱ_2, und man hat:

$$\mathfrak{P}(x|c, d, 0) = \mathfrak{P}(x).$$

Im entgegengesetzten Falle sei N der Schnittpunkt der Strecke OD mit dem Kreise ϱ_2; man nehme auf ND die Strecke $NE = \frac{\varrho - \gamma}{2}$; bezeichnet e die dem Punkte E zugehörige Größe, so ist:

$$|e| = \varepsilon = \delta - \varrho_2 + \frac{\varrho - \gamma}{2} \leqq \gamma - 2\varrho_1 + \frac{\varrho - \gamma}{2} = \frac{\varrho + \gamma}{2} - 2\varrho_1.$$

Ist ϱ_3 der Konvergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}(x|c, d, e)$, so ist:

$$\varrho_3 \geqq \varrho - \varepsilon,$$

folglich:

$$\varepsilon - \varrho_3 \leqq 2\varepsilon - \varrho \leqq \gamma - 4\varrho_1,$$

usf. Nun können die Größen $\gamma - \varrho$, $\gamma - 2\varrho_1$, $\gamma - 4\varrho_1, \cdots$ nicht sämtlich positiv sein, folglich stößt man nach einer endlichen Anzahl von Transformationen auf einen Konvergenzkreis, der in seinem Innern den Anfangspunkt enthält.

152. Aus den im vorigen Art. angeführten Ergebnissen läßt sich ein wichtiger Schluß ziehen.

Es war gefunden worden:

$$\varrho_1 \geqq \varrho - \gamma;$$

da aber $\mathfrak{P}(x)$ als aus $\mathfrak{P}(x|c)$ transformiert betrachtet werden kann, so hat man aus demselben Grunde:

$$\varrho \geqq \varrho_1 - \gamma,$$

woraus folgt:

(1) $$\varrho + \gamma \geqq \varrho_1 \geqq \varrho - \gamma.$$

Geometrisch läßt sich das so aussprechen: Der Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}(x|c)$ liegt zwischen dem Kreise um c, der den Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x)$ von innen, und demjenigen, der ihn von außen berührt.

Aus (1) ergibt sich auch: Der Konvergenzradius der transformierten Reihe $\mathfrak{P}(x|c)$ ist eine stetige Funktion von c.

153. Die Ableitung der aus einer gegebenen Reihe in bezug auf einen Punkt c transformierten Reihe ist die in

bezug auf den Punkt c aus der Ableitung der ursprünglichen Reihe transformierte Reihe.

Setzen wir:

$$\mathfrak{Q}(x-c) = \mathfrak{P}(x|c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c),$$

so ist:

$$\mathfrak{Q}'(x-c) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{r-1}}{r-1!} \mathfrak{P}^{(r)}(c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} \mathfrak{P}^{(r+1)}(c).$$

Andrerseits ist:

$$\mathfrak{P}'(x|c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} (\mathfrak{P}')^{(r)}(c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} \mathfrak{P}^{(r+1)}(c),$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{Q}'(x-c) = \mathfrak{P}'(x|c).$$

154. Die untere Grenze der Konvergenzradien der aus einer gegebenen Reihe in bezug auf alle Punkte innerhalb ihres Konvergenzkreises transformierten Reihen ist Null.

Sei λ die untere Grenze der Konvergenzradien und $\lambda > 0$ vorausgesetzt. Man nehme eine positive Größe $\lambda' < \lambda$ und eine $\varrho' < \varrho$; ist c ein beliebiger Punkt des Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius ϱ', so wird die in bezug auf diesen Punkt transformierte Reihe:

$$\mathfrak{P}(x|c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c)$$

der Definition von λ gemäß einen Konvergenzradius haben, der nicht kleiner als λ, folglich größer als λ' ist; sie wird somit im ganzen Kreise um c mit dem Radius λ' mit Einschluß der Peripherie (Art. 112) stetig sein. Die Menge aller Kreise vom Radius λ', deren Mittelpunkte auf der Kreislinie ϱ' liegen, bedeckt die von den Kreisen um den Anfangspunkt mit den Radien $\varrho' - \lambda'$ und $\varrho' + \lambda'$ eingeschlossene Ringfläche. Die Werte von $\mathfrak{P}(x)$ in den inneren Punkten des Kreises $\varrho' - \lambda'$, die $\mathfrak{P}(x)$ und den verschiedenen $\mathfrak{P}(x|c)$ in der Ringfläche zwischen $\varrho' - \lambda'$ und ϱ' gemeinsamen Werte und diejenigen der verschiedenen $\mathfrak{P}(x|c)$ in der Ringfläche zwischen ϱ' und $\varrho' + \lambda'$ bilden eine in dem ganzen Kreise $\varrho' + \lambda'$ (mit Einschluß der Peripherie) endliche und stetige Funktion. Der absolute Betrag dieser Funktion ist daher (Art. 99) eine endliche und stetige Funktion, besitzt folglich (Art. 101) ein endliches Maximum M; bezeichnen wir dann mit M_c

den größten absoluten Betrag von $\mathfrak{P}(x|c)$ auf der Kreislinie um c mit dem Radius λ', so ist $M_c \leqq M$. Nun hat man (Art. 128, (3)):

$$\frac{1}{r!}|\mathfrak{P}^{(r)}(c)| \leqq \frac{M_c}{\lambda'^r};$$

daraus folgt:

$$\frac{1}{r!}|\mathfrak{P}^{(r)}(c)| \leqq \frac{M}{\lambda'^r}$$

oder:

$$\left|\sum_{h=r}^{\infty}\binom{h}{r} a_h c^{h-r}\right| \leqq \frac{M}{\lambda'^r}$$

für alle Werte c vom absoluten Betrage ϱ'. Wendet man wiederum die Formel (3) Art. 128 auf die Reihe:

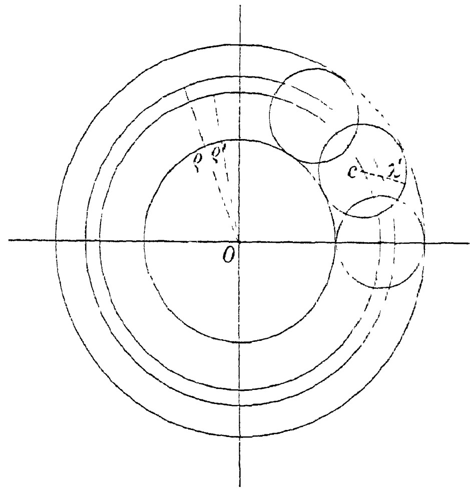

Fig 3

$$\sum_{h=r}^{\infty}\binom{h}{r} a_h x^{h-r}$$

an, so hat man:

$$\binom{h}{r}|a_h| \leqq \frac{M}{\lambda'^r \varrho'^{h-r}}$$

oder:

$$\binom{h}{r}\lambda'^r \varrho'^{h-r}|a_h| \leqq M,$$

und, wenn man für alle Werte von r von 0 bis h summiert:

$$(\varrho' + \lambda')^h |a_h| \leqq (h+1) M,$$

woraus folgt:

$$\sum_{h=0}^{\infty}|a_h|\xi^h \leqq M\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\left(\frac{\xi}{\varrho'+\lambda'}\right)^h.$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist bekanntlich (vgl. Art. 134) konvergent für:

$$\frac{\xi}{\varrho'+\lambda'} < 1;$$

daraus folgt, daß $\mathfrak{P}(x)$ absolut konvergent ist für jedes x von kleinerem absoluten Betrage als $\varrho' + \lambda'$. Ist nun λ' festbestimmt, so läßt sich ϱ' stets so wählen, daß $\varrho' + \lambda' > \varrho$ ist; man kommt somit zu

dem Schlusse, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ in Punkten konvergent ist, die außerhalb ihres Konvergenzkreises liegen, was absurd ist.

Folglich ist $\lambda = 0$, und der Satz ist bewiesen.

155. Betrachtet man den Konvergenzradius ϱ_c der in bezug auf c transformierten Reihe als eine reelle, innerhalb des ganzen Kreises ϱ definierte Funktion von c, so hat diese Funktion (Art. 154) zur unteren Grenze Null. Folglich gibt es (Art. 97) einen Punkt p der Art, daß in jeder Umgebung desselben die untere Grenze der Funktion ϱ_c gleichfalls Null ist.

Dieser Punkt kann nicht innerhalb des Kreises ϱ liegen. Nehmen wir nämlich an, er liege innerhalb desselben, d. h. es sei:

$$|p| = \pi < \varrho,$$

so wird, wenn man um p einen Kreis mit einem Radius:

$$\delta < \varrho - \pi$$

beschreibt, ϱ_c für alle Punkte innerhalb dieses Kreises einen größeren Wert als $\varrho - \pi - \delta$ haben (Art. 152), so daß seine untere Grenze innerhalb des Kreises selbst nicht Null sein kann.

Folglich liegt der Punkt p auf der Kreislinie ϱ.

Ein Punkt von der Beschaffenheit, daß in jeder Umgebung desselben die untere Grenze der Werte von ϱ_c Null ist, heißt ein *singulärer Punkt*. Das gewonnene Ergebnis läßt sich demnach folgendermaßen ausdrücken:

Auf dem Umfange des Konvergenzkreises liegt mindestens ein singulärer Punkt.

156. *Ein singulärer Punkt kann nicht innerhalb des Konvergenzkreises einer der transformierten Reihen liegen.*

Wir nehmen an, der dem Umfange des Konvergenzkreises (o) einer Potenzreihe angehörige singuläre Punkt p liege innerhalb des Konvergenzkreises (b) der mittelbar oder unmittelbar in bezug auf einen Punkt b transformierten Reihe. Man beschreibe um p einen Kreis (p), der ganz innerhalb (b) falle. Die Kreise (p) und (o) haben notwendig ein gemeinsames Gebiet; nennen wir irgend einen Punkt desselben c, so wird ϱ_c sicher größer sein als die kleinste Entfernung zwischen den Kreisen (b), (p), folglich kann seine untere Grenze nicht Null sein. Mithin kann p nicht innerhalb eines Konvergenzkreises liegen.

Analytische Funktionen.

157. Es sei $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius. Der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x)$ und die Konvergenzkreise aller unmittelbar oder mittelbar aus $\mathfrak{P}(x)$ transformierten Potenzreihen bedecken einmal, mehrmals oder unendlich oft einen Teil C der Ebene, der aus einem einzigen Stück besteht, d. h. zusammenhängend ist (vgl. Art. 102, Anm.) und der in besonderen Fällen auch die ganze Ebene umfassen kann. Ist c irgend ein innerer Punkt von C, so gibt es unendlich viele Arten, eine in bezug auf diesen Punkt transformierte Reihe zu gewinnen, da wir zwischen den Anfangspunkt und den Punkt c unendlich viele Folgen von Zwischenpunkten einschalten können. Liegen nun sowohl c als auch die Zwischenpunkte innerhalb des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(x)$, so sind (Art. 150) alle entsprechenden transformierten Reihen identisch; sind hingegen beide Bedingungen nicht zugleich erfüllt, so kann man für ein und denselben Punkt zu mehreren, ja sogar unendlich vielen verschiedenen transformierten Reihen gelangen. Erhält man aber, wie man auch den Punkt c wählen und wie man auch verfahren möge, für ein und denselben Punkt stets ein und dieselbe Potenzreihe, so bestimmt die Gesamtheit der betrachteten Potenzreihen für jeden Punkt innerhalb C einen einzigen Wert, und zwar ist dies der gemeinsame Wert (Art. 150), den in jenem Punkte alle Potenzreihen besitzen, innerhalb deren Konvergenzbereich er liegt. Wir erhalten so eine Funktion der Punkte des Bereiches C (Art. 95), die wir eine eindeutige analytische Funktion oder einfacher eine analytische Funktion nennen wollen[1]). Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, wie auch jede der transformierten Reihen, wird als ein Element der Funktion bezeichnet.

Da sich jede der transformierten Reihen (Art. 151) als ursprüngliche Potenzreihe ansehen läßt, so können wir sagen: Eine analytische Funktion ist durch ein beliebiges ihrer Elemente vollständig bestimmt.

Die Gesamtheit der innerhalb des Bereiches C gelegenen Punkte bildet den Existenzbereich der Funktion.

158. Man sagt, eine analytische Funktion verhalte sich regulär oder sei regulär in allen Punkten innerhalb ihres Existenzbereiches oder in allen Punkten, denen Elemente der Funktion entsprechen. Die Punkte, in welchen die Funktion nicht regulär ist, werden singuläre Punkte derselben genannt.

---

1) Was man gewöhnlich eine nichteindeutige oder auch eine mehrdeutige Funktion nennt, ist nach unserer Auffassung keine Funktion, sondern der Inbegriff von mehreren, bezw. unendlich vielen Funktionen.

Singuläre Punkte einer analytischen Funktion sind insbesondere die singulären Punkte aller ihrer Elemente (Art. 155), da ja diese Punkte (Art 156) innerhalb keines der Konvergenzkreise der verschiedenen Elemente liegen. Sie befinden sich offenbar auf der Umgrenzung des Existenzbereiches der Funktion.

Die Gesamtheit der singulären Punkte einer analytischen Funktion bildet eine abgeschlossene Menge. — Wäre nämlich ein Grenzpunkt p dieser Menge nicht singulär, so würde das entsprechende Element einen bestimmten Konvergenzkreis haben, dessen sämtlichen inneren Punkten transformierte Elemente entsprechen würden, was unmöglich ist.

159. Die Grenzpunkte der Menge der Punkte, in denen eine analytische Funktion denselben Wert annimmt, sind singuläre Punkte.

Es sei I die betrachtete Menge, c einer ihrer Grenzpunkte. Wäre c nicht ein singulärer Punkt, gehörte er also dem Existenzbereiche C der Funktion $f(x)$ an, so ließe sich (Art. 121) eine Umgebung des Punktes c angeben, innerhalb welcher das dem Punkte c entsprechende Element, also auch die Funktion selbst, an keiner Stelle, höchstens den Punkt c selbst ausgeschlossen, den betrachteten Wert annehmen würde, was unmöglich ist

Beachtet man, daß die Punkte von I sämtlich dem Bereiche C angehören, so ersieht man, daß kein Grenzpunkt von I mit einem Punkte von I zusammenfallen kann. M. a. W.:

Die Punkte des Existenzbereichs einer analytischen Funktion, in denen sie denselben Wert annimmt, bilden eine isolierte Menge[1]).

Ist C' ein innerhalb C liegender Bereich, so hat I auf C' keinen Grenzpunkt, folglich (Art. 5) ist die Anzahl der in C' liegenden Punkte von I endlich. D. h.:

In jedem **innerhalb** des Existenzbereiches einer analytischen Funktion liegenden Bereiche nimmt die Funktion denselben Wert nur eine endliche Anzahl von Malen an.

160. Aus dem in der Anmerkung zu Art. 121 erwiesenen Satze folgt:

Ist eine analytische Funktion in einem innerhalb ihres Existenzbereiches liegenden Bereiche entweder beständig

1) Insbesondere kann eine Funktion nicht in allen Punkten einer Linie ein und denselben Wert annehmen.

reell oder beständig rein imaginär, so ist sie notwendig eine Konstante.

Daraus ergibt sich als Corollar:

Ist der reelle Bestandteil einer analytischen Funktion (als reelle Funktion des reellen und des imaginären Bestandteiles der komplexen Variablen) gegeben, so ist bis auf eine additive Konstante auch ihr imaginärer Bestandteil gegeben, und umgekehrt.

Sind nämlich $f(x)$, $f_1(x)$ zwei analytische Funktionen mit demselben reellen Bestandteile $U(u, v)$ (wo $x = u + iv$), ist also:

$$f(x) = U(u, v) + iV(u, v),$$
$$f_1(x) = U(u, v) + iV_1(u, v),$$

so folgt daraus:

$$f(x) - f_1(x) = i[V(u, v) - V_1(u, v)].$$

Da nun die Differenz $f(x) - f_1(x)$, die (s. unten Art. 163) eine analytische Funktion ist, beständig rein imaginär ist, so muß sie sich auf eine Konstante reduzieren. Damit ist die Behauptung bewiesen.

161. Ist c ein Punkt innerhalb des Existenzbereiches einer analytischen Funktion, so hat ihr dem Punkte c entsprechendes Element zum Konvergenzkreise den größten Kreis mit dem Mittelpunkt c, der im Existenzbereiche der Funktion enthalten ist.

In der Tat hat die Peripherie dieses Kreises, weil sie mindestens einen singulären Punkt enthalten muß (Art. 155), notwendigerweise irgend einen Punkt mit der Grenze gemein.

Daraus folgt:

Die untere Grenze der Konvergenzradien der Elemente einer analytischen Funktion, die den Punkten eines **innerhalb** des Existenzbereiches der Funktion liegenden Bereiches entsprechen, ist von Null verschieden.

162. Sind mehrere analytische Funktionen:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_r(x)$$

gegeben, deren Existenzbereiche ein zusammenhängendes Gebiet C gemeinsam haben mögen, und besteht zwischen ihren demselben Punkte c des letzteren entsprechenden Elementen $\mathfrak{P}_1(x - c)$, $\mathfrak{P}_2(x - c)$, $\cdots$, $\mathfrak{P}_r(x - c)$ eine ganze rationale Beziehung:

$$F(\mathfrak{P}_1(x - c),\ \mathfrak{P}_2(x - c),\ \cdots,\ \mathfrak{P}_r(x - c)) = 0,$$

so besteht dieselbe Beziehung zwischen den Elementen, die irgend einem andren Punkte des Bereiches C entsprechen **(Satz von der Permanenz der analytischen Beziehungen).**

Es sei ϱ der Radius des größten, in dem Bereiche C enthaltenen Kreises mit dem Mittelpunkt c, d ein beliebiger Punkt innerhalb des Kreises ϱ, ϱ_1 der Radius des größten, im Bereiche C enthaltenen Kreises mit dem Mittelpunkt d. Dann ist für alle den Kreisen ϱ, ϱ_1 gemeinsamen Punkte x (Art 150):

$$\mathfrak{P}_h(x - c \,|\, d - c) = \mathfrak{P}_h(x - c) \qquad (h = 1, 2, \cdots, r),$$

und daher:

$$F(\mathfrak{P}_1(x - c \,|\, d - c), \mathfrak{P}_2(x - c \,|\, d - c), \cdots, \mathfrak{P}_r(x - c \,|\, d - c)) = 0.$$

Derselbe Beweis gilt für alle Punkte des Bereiches C, da man ja von c aus zu irgend einem dieser Punkte mittelst einer endlichen Folge von Transformationen gelangen kann. Folglich darf man für alle Punkte von C schreiben:

$$F(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x)) = 0.$$

163. Es seien zwei analytische Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ gegeben, deren Existenzbereiche einen zusammenhängenden Teil C gemeinsam haben mögen. Der Einfachheit der Schreibweise halber setzen wir voraus, dieser enthalte den Anfangspunkt. Sind nun $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ die dem Anfangspunkte entsprechenden Elemente der beiden Funktionen, so wird die Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}_1(x) + \mathfrak{P}_2(x) = \mathfrak{P}(x)$$

eine analytische Funktion $f(x)$ erzeugen, deren Existenzbereich sicher den Bereich C enthält (Art. 118). Das irgend einem Punkte von C entsprechende Element dieser Funktion ist (Art. 162) die Summe der demselben Punkte entsprechenden Elemente von $f_1(x)$, $f_2(x)$; man kann also schreiben:

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

und die Funktion $f(x)$ als Summe der beiden analytischen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ bezeichnen.

Es wird also diejenige Funktion als Summe zweier (oder mehrerer) analytischen Funktionen definiert, bei der ein Element die Summe von zwei (oder mehreren) auf dieselbe Stelle bezüglichen Elementen der Summanden ist.

Eine ganz analoge Definition läßt sich für das Produkt zweier oder mehrerer analytischen Funktionen aufstellen.

164. Es sei nun eine analytische Funktion $f(x)$ gegeben, die in dem Anfangspunkte, der, wie man unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen darf, ihrem Existenzbereiche angehören möge, einen von Null verschiedenen Wert habe. Ist:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

das dem Anfangspunkte entsprechende Element, so muß also $a_0 \neq 0$ sein. Man darf demnach für alle Punkte im Innern des Konvergenzkreises ϱ von $\mathfrak{P}(x)$ schreiben:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h} = \frac{1}{a_0\left[1 + \frac{\theta}{a_0}\right]},$$

wo:

$$\theta = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h.$$

Nun ist bekanntlich für $|k| < 1$:

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - \cdots = \sum_{h=0}^{\infty} (-k)^h,$$

also wird:

$$(1) \qquad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}\left[1 - \frac{\theta}{a_0} + \frac{\theta^2}{a_0^2} - \cdots\right]$$

für alle Punkte x, für welche:

$$|\theta| = |f(x) - f(0)| < |a_0|.$$

Nach einer bereits gemachten Bemerkung (Art. 120) gibt es stets eine Umgebung des Anfangspunktes, die wir als kreisförmig mit einem Radius $\varrho' < \varrho$ voraussetzen dürfen, in der diese Bedingung verwirklicht ist; innerhalb des Kreises ϱ' wird also die Gleichung (1) gelten. Nimmt man nun eine Kreislinie vom Radius $\bar{\varrho} < \varrho'$ und nennt man M das Maximum des absoluten Wertes von θ längs derselben, so hat man für jeden Punkt der Peripherie von $\bar{\varrho}$ und jedes beliebige n:

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\left(-\frac{\theta}{a_0}\right)^h\right| \leqq \sum_{h=n+1}^{\infty}\left(\frac{M}{|a_0|}\right)^h;$$

da aber die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty}\left(\frac{M}{|a_0|}\right)^h$ konvergiert, so ist die auf der rechten

Seite von (1) stehende Reihe für die Kreisfläche $\bar{\varrho}$ gleichmäßig konvergent. Man kann also den Weierstraßschen Hilfssatz (Art. 132) in Anwendung bringen und diese Reihe in eine Potenzreihe von x umformen; dadurch erhält man innerhalb des Kreises ϱ':

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = \mathfrak{P}_1(x).$$

Die Reihen $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ sind durch die Beziehung:

$$\mathfrak{P}(x)\,\mathfrak{P}_1(x) = 1$$

verknüpft; man hat also (Art. 162), wenn man die durch $\mathfrak{P}_1(x)$ bestimmte analytische Funktion mit $f_1(x)$ bezeichnet:

$$f(x) f_1(x) = 1,$$

oder:

$$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Die Funktion $f_1(x)$ heißt die zu $f(x)$ reziproke Funktion; ihr Existenzbereich ist im allgemeinen von dem der Funktion $f(x)$ verschieden.

Als Quotienten zweier analytischen Funktionen definiert man demnach das Produkt der ersten mit der reziproken der zweiten.

165. Es bezeichne $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe, welche die analytische Funktion $f(x)$ erzeuge. Die Reihe $\mathfrak{P}'(x)$ hat denselben Konvergenzradius wie $\mathfrak{P}(x)$ (Art. 134); ist c ein Punkt innerhalb ihres gemeinsamen Konvergenzkreises, so ist die aus $\mathfrak{P}'(x)$ in bezug auf diesen Punkt transformierte Reihe die Ableitung der aus $\mathfrak{P}(x)$ in bezug auf denselben Punkt transformierten Reihe (Art. 153). Setzt man das Schlußverfahren in derselben Weise fort, so erkennt man, daß $\mathfrak{P}'(x)$ eine analytische Funktion $\varphi(x)$ erzeugt, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Sie hat denselben Existenzbereich wie $f(x)$;

b) Dasjenige ihrer Elemente, welches irgend einem Punkte dieses Bereiches entspricht, ist die Ableitung des Elementes der Funktion $f(x)$, das demselben Punkte entspricht.

Wir werden $\varphi(x)$ die Ableitung von $f(x)$ nennen und mit $f'(x)$ bezeichnen.

Die Eigenschaft a) kann auch durch den Satz ausgedrückt werden:

Eine Funktion hat dieselben singulären Punkte wie ihre Ableitung.

166. Erzeugen die Reihen $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ und:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x) + \mathfrak{P}_2(x)$$

beziehentlich die analytischen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$, wobei (Art. 163):

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

ist, so hat man (Art. 137) in den den Existenzbereichen von $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ gemeinschaftlichen Punkten:

(1) $$\mathfrak{P}'(x) = \mathfrak{P}_1'(x) + \mathfrak{P}_2'(x);$$

nun erzeugen $\mathfrak{P}_1'(x)$, $\mathfrak{P}_2'(x)$, $\mathfrak{P}'(x)$ (Art. 165) die analytischen Funktionen $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, $f'(x)$; also folgt aus (1) (Art. 163):

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

167. Durch ein ganz analoges Verfahren beweist man, daß, wenn:

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

ist, man erhält (vgl. Art. 139):

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_n(x) \\ &+ f_1(x) f_2'(x) f_3(x) \cdots f_n(x) + \cdots \\ &+ f_1(x) f_2(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n'(x) \\ &= f(x) \sum_{r=1}^{n} \frac{f_r'(x)}{f_r(x)}. \end{aligned}$$

168. Ist (Art. 164):

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

so ist diese Beziehung gleichbedeutend mit der andern:

$$f_1(x) = f(x) f_2(x).$$

Daraus folgt (Art. 167):

$$f_1'(x) = f'(x) f_2(x) + f(x) f_2'(x),$$

woraus sich ergibt:

$$f'(x) = \frac{f_2(x) f_1'(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^{\,2}(x)}.$$

169. Es seien, wie in Art 141, $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(z)$ zwei Potenzreihen von x, bezw. z, und alle dort gestellten Bedingungen und Bezeichnungen mögen festgehalten werden; dann kann $\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(x))$ auf die Form einer Potenzreihe von x:

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(x)) = \mathfrak{R}(x)$$

gebracht werden.

Ist c ein Punkt innerhalb des mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises, und bildet man die transformierte Reihe $\mathfrak{P}(x|c)$, so ist in jedem Punkte des um c beschriebenen, den Kreis ϱ von innen berührenden Kreises ϱ' (Art. 150):

$$\mathfrak{P}(x|c) = \mathfrak{P}(x),$$

und folglich:

$$|\mathfrak{P}(x|c)| < \sigma'.$$

Wir dürfen also (Art. 132) die Reihe:

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(x|c)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[\mathfrak{P}(x|c)]^n$$

in eine Potenzreihe von $x - c$ umwandeln, die wir mit $\mathfrak{S}(x - c)$ bezeichnen wollen, so daß:

$$\mathfrak{S}(x - c) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[\mathfrak{P}(x|c)]^n.$$

Andrerseits hat man innerhalb des Kreises ϱ':

$$\mathfrak{R}(x|c) = \mathfrak{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[\mathfrak{P}(x)]^n,$$

oder, da $\mathfrak{P}(x|c) = \mathfrak{P}(x)$ ist:

$$\mathfrak{R}(x|c) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n[\mathfrak{P}(x|c)]^n,$$

folglich:

$$\mathfrak{R}(x|c) = \mathfrak{S}(x - c).$$

Da diese Beziehung in allen Punkten einer gewissen Umgebung ϱ' des Punktes c gelten muß, so muß sie identisch erfüllt sein (Art. 121). Man hat also identisch:

$$\mathfrak{R}(x|c) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[\mathfrak{P}(x|c)]^n.$$

Wenn demnach $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(z)$ beziehentlich die analytischen Funktionen $f(x)$, $\varphi(z)$ erzeugen, so wird $\varphi(f(x))$ eine durch das Element $\mathfrak{R}(x)$ bestimmte analytische Funktion von x sein:

$$\varphi(f(x)) = F(x);$$

es folgt ferner aus Art. 141:

$$F'(x) = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ist im besondern:

$$F(x) = e^{f(x)},$$

so wird (Art. 143):

$$F'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Singuläre Punkte. Satz von Laurent.

170. Eine analytische Funktion[1]) kann nicht in der ganzen Ebene (mit Einschluß des unendlich fernen Punktes) regulär sein.

Die analytische Funktion $f(x)$ habe keinen singulären Punkt in endlicher Entfernung, so daß ihr dem Anfangspunkt entsprechendes Element $\mathfrak{P}(x)$ einen unendlich großen Konvergenzradius besitzt (Art. 155). Setzen wir außerdem voraus, daß der unendlich ferne Punkt für die Funktion $f(x)$ kein singulärer Punkt sei, so kann diese Funktion (Art. 122) durch eine Reihe $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ dargestellt werden, die — aus demselben Grunde wie die erste — in der ganzen Ebene konvergent ist. Wir denken uns um den Anfangspunkt einen beliebigen Kreis beschrieben und mit C, C_1 den innerhalb bezw. außerhalb desselben liegenden Teil der Ebene bezeichnet. Da $\mathfrak{P}(x)$ in C eindeutig und stetig ist, so ist es auch (Art. 99) $|\mathfrak{P}(x)|$; die letztere Funktion hat daher (Art. 101) in C ein endliches Maximum, das mit M bezeichnet werde. Entsprechend hat $\left|\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ in C_1 ein endliches Maximum M_1. Wenn $\overline{M}$ eine Größe bedeutet, die weder kleiner ist als M noch als M_1, so ist also in der ganzen Ebene:

$$|f(x)| \leqq \overline{M},$$

---

1) Man darf nicht vergessen, daß wir hier nur von eindeutigen analytischen Funktionen sprechen. Bekanntlich gibt es anderweitige Funktionen, die keinen singulären Punkt haben; dergleichen sind die Abelschen Integrale erster Gattung.

und daher hat man auf jeder beliebigen, um den Anfangspunkt beschriebenen Kreislinie:

$$|\mathfrak{P}(x)| \leqq \overline{M}.$$

Daraus folgt für jeden beliebigen Wert von ϱ und von h (Art. 128,(3)):

$$|a_h| \leqq \frac{\overline{M}}{\varrho^h},$$

und somit:

$$a_h = 0 \quad \text{für } h > 0,$$

so daß sich die Funktion auf die Konstante a_0 reduziert.

Folglich besitzt eine Funktion, die sich nicht auf eine Konstante reduziert, notwendig singuläre Punkte.

171. Es seien $f(x)$, $f_1(x)$ zwei reziproke analytische Funktionen (Art. 164), so daß:

$$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Da die Existenzbereiche der beiden Funktionen nicht notwendig identisch sind, so kann es vorkommen, daß ein für die Funktion $f(x)$ singulärer Punkt p es nicht auch für die Funktion $f_1(x)$ ist.

Die singulären Punkte einer Funktion, welche nicht zugleich für ihre reziproke singulär sind, heißen Pole oder Unendlichkeitspunkte oder außerwesentlich singuläre Punkte; die übrigen heißen wesentlich singuläre Punkte.

Ist p ein Pol der Funktion $f(x)$, so hat man, weil in ihm $f_1(x)$ regulär ist, in einer gewissen Umgebung von p:

$$f_1(x) = c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2 + \cdots = \mathfrak{P}_1(x-p).$$

Ist $c_0 \neq 0$, so läßt sich (Art. 164) eine in einer gewissen Umgebung von p konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-p)$ von der Art finden, daß in dieser ganzen Umgebung:

$$\mathfrak{P}(x-p) \cdot \mathfrak{P}_1(x-p) = 1$$

ist; die durch die Reihe:

$$\mathfrak{P}(x-p)$$

erzeugte analytische Funktion ist nichts andres als die Funktion $f(x)$, die demnach — gegen die Voraussetzung — in p regulär sein würde.

Folglich muß $c_0 = 0$ sein.

Setzen wir allgemein:

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0, \quad c_m \neq 0,$$

so haben wir:

$$\mathfrak{P}_1(x-p) = (x-p)^m[c_m + c_{m+1}(x-p) + c_{m+2}(x-p)^2 + \cdots] = \\ = (x-p)^m \mathfrak{Q}_1(x-p),$$

wo $\mathfrak{Q}_1(x-p)$ eine Potenzreihe von $x-p$ ist, deren konstantes Glied nicht Null ist. Man kann mittels des eben auseinandergesetzten Verfahrens eine Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x-p)$ von der Art finden, daß in einer gewissen Umgebung von p:

$$\mathfrak{Q}(x-p) \cdot \mathfrak{Q}_1(x-p) = 1$$

ist. Die durch $\mathfrak{Q}_1(x-p)$ bestimmte analytische Funktion $\varphi_1(x)$ ist:

$$\varphi_1(x) = \frac{f_1(x)}{(x-p)^m} = \frac{1}{(x-p)^m f(x)};$$

folglich ist die durch $\mathfrak{Q}(x-p)$ bestimmte analytische Funktion $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} = (x-p)^m f(x).$$

Man gelangt daher zu dem Schlusse: Ist p ein Pol der Funktion $f(x)$, so gibt es stets eine ganze und positive Zahl m von der Art, daß $(x-p)^m f(x)$ im Punkte p regulär ist.

Offenbar ist, wenn $m' > m$, auch $(x-p)^{m'} f(x)$ im Punkte p regulär. Ist m die kleinste ganze positive Zahl, für welche $(x-p)^m f(x)$ im Punkte p regulär ist, so heißt p ein Pol m-ter Ordnung oder ein m-facher Pol der Funktion $f(x)$; $(x-p)^m f(x)$ ist im Punkte p von Null verschieden.

Setzt man:

$$\mathfrak{Q}(x-p) = d_0 + d_1(x-p) + d_2(x-p)^2 + \cdots,$$

wo $d_0 \neq 0$, so hat man in einer gewissen Umgebung des Punktes p:

$$f(x) = \frac{d_0}{(x-p)^m} + \frac{d_1}{(x-p)^{m-1}} + \cdots + \frac{d_{m-1}}{x-p} + d_m + d_{m+1}(x-p) + \cdots.$$

D. h.: Eine analytische Funktion ist in der Umgebung eines ihrer Pole p durch eine nach positiven und negativen Potenzen von $x-p$ fortschreitende Potenzreihe darstellbar, die nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen enthält.

Die Summe der negative Potenzen enthaltenden Glieder wollen wir den zum Pole gehörenden Hauptteil nennen.

Zieht man von einer analytischen Funktion ihren Hauptteil[1]) ab, so erhält man eine im Punkte p reguläre Funktion, die keine neue Singularität besitzt.

172. Hat die Funktion $f(x)$ im Punkte p einen Pol m-ter Ordnung, so ist ihre reziproke Funktion $f_1(x)$ in p regulär, und die Potenzreihe, durch die sie in der Umgebung von p dargestellt wird, entbehrt der m ersten Glieder, ist also das Produkt von $(x-p)^m$ in eine Potenzreihe von $x-p$, deren konstantes Glied nicht Null ist. Man sagt in diesem Falle, die Funktion $f_1(x)$ habe im Punkte p eine Nullstelle m-ter Ordnung oder eine m-fache Nullstelle. — Hat umgekehrt die Funktion $f_1(x)$ eine Nullstelle m-ter Ordnung, so hat die Funktion $f(x)$ in demselben Punkte einen Pol derselben Ordnung.

173. Hat $f(x)$ in p eine m-fache Nullstelle, so hat ihre Ableitung in demselben Punkte eine $(m-1)$-fache Nullstelle.

Nach Voraussetzung hat man:

$$f(x) = (x-p)^m f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ in p regulär und von Null verschieden ist. Es ergibt sich daraus (Art. 167):

$$f'(x) = m(x-p)^{m-1} f_1(x) + (x-p)^m f_1'(x) =$$
$$= (x-p)^{m-1}[m f_1(x) + (x-p) f_1'(x)].$$

Der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern ist im Punkte p regulär und von Null verschieden, folglich hat $f'(x)$ in p eine $(m-1)$-fache Nullstelle.

174. Hat $f(x)$ in p einen m-fachen Pol, so hat ihre Ableitung in demselben Punkte einen $(m+1)$-fachen Pol.

Nach Voraussetzung hat man:

$$f(x)(x-p)^m = f_1(x),$$

1) Wir bemerken, daß der Hauptteil, da er eine ganze rationale Funktion, und folglich ein besonderer Fall einer Potenzreihe, von $\frac{1}{x-p}$ ist, eine analytische Funktion ist, die mit Ausnahme des Punktes p in der ganzen Ebene existiert und durch das einzige von dem Polynom selbst gebildete Element dargestellt wird (vgl. Art. 187).

wo $f_1(x)$ in p regulär und von Null verschieden ist Daraus ergibt sich (Art. 167):

$$f'(x)(x-p)^m + mf(x)(x-p)^{m-1} = f_1'(x),$$

oder auch:

(1) $$f'(x)(x-p)^m = f_1'(x) - mf(x)(x-p)^{m-1},$$

und, wenn man mit $(x-p)$ multipliziert:

(2) $$f'(x)(x-p)^{m+1} = f_1'(x)(x-p) - mf(x)(x-p)^m.$$

Nun ist die rechte Seite von (1) in p nicht regulär, während es die rechte Seite von (2) ist; also hat $f'(x)$ in p einen $(m+1)$-fachen Pol.

175. Die angegebenen Sätze ändern sich etwas, wenn der Punkt p im Unendlichen liegt (vgl. Art. 122).

Hat $f(x)$ im Unendlichen einen Pol, so gibt es eine positive, ganze Zahl m (die Ordnungszahl des Poles) von der Art, daß $\frac{f(x)}{x^m}$ in dem unendlich fernen Punkte regulär und von Null verschieden ist. In der Umgebung dieses Punktes gilt folgende Entwicklung (wo $d_0 \neq 0$):

$$f(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \cdots + d_{m-1}x + d_m + \frac{d_{m+1}}{x} + \frac{d_{m+2}}{x^2} + \cdots.$$

Hat $f(x)$ im Unendlichen eine m-fache Nullstelle, so hat ihre Ableitung im Unendlichen eine $(m+1)$-fache Nullstelle. — Da $f(x)x^m$ im Unendlichen nach Voraussetzung regulär und von Null verschieden ist, so läßt sich auf diesen Fall der Beweis des Art. 174 anwenden, wenn man darin $p = 0$ setzt.

Hat $f(x)$ im Unendlichen einen m-fachen Pol, so hat ihre Ableitung im Unendlichen einen $(m-1)$-fachen Pol. — Da $\frac{f(x)}{x^m}$ im Unendlichen nach Voraussetzung regulär und von Null verschieden ist, so läßt sich auf diesen Fall der Beweis des Art. 173 anwenden, wenn man darin $p = 0$ setzt.

176. Ist p ein Pol einer analytischen Funktion $f(x)$, so läßt sich eine Umgebung des Punktes p angeben, in deren sämtlichen Punkten, p selbst ausgenommen, $f(x)$ regulär ist.

Die reziproke Funktion $f_1(x)$ ist regulär und verschwindet im Punkte p, daher läßt sich (Art. 159) eine Umgebung von p angeben, in der sie regulär ist und niemals außer in p selbst Null wird. In allen Punkten dieser Umgebung, ausgenommen p, ist dann $f(x)$ regulär.

Der Satz läßt sich auch so aussprechen: **Ein Pol einer Funktion kann nicht Grenzpunkt der Menge ihrer singulären Punkte sein.** — Man kann also, wenn man sich erinnert, daß diese Menge abgeschlossen ist (Art. 158), folgern: **Jeder Grenzpunkt einer Menge singulärer Punkte ist ein wesentlich singulärer Punkt.**

177. **Ist p ein Pol einer analytischen Funktion $f(x)$, so läßt sich nach Annahme eines beliebig großen A eine Umgebung von p finden, in deren sämtlichen Punkten $|f(x)|>A$ ist.** — Eben aus diesem Grunde werden die Pole auch **Unendlichkeitspunkte** der analytischen Funktion genannt.

Es ist für eine bestimmte Umgebung des Punktes p (Art. 171):

$$\varphi(x) = (x-p)^m f(x) = d_0 + d_1(x-p) + d_2(x-p)^2 + \cdots.$$

Da $\varphi(x)$ eine stetige Funktion ist, so läßt sich eine Umgebung des Punktes p, die wir als kreisförmig um p mit dem Radius ϱ' annehmen können, angeben, in deren sämtlichen Punkten gilt:

$$|\varphi(x) - \varphi(p)| = |\varphi(x) - d_0| < \frac{|d_0|}{2},$$

oder:

$$\frac{|d_0|}{2} < |\varphi(x)| < \frac{3}{2}|d_0|.$$

Andrerseits kann man eine positive Größe ϱ'' von der Art wählen, daß:

$$\varrho''^m < \frac{|d_0|}{2A}$$

ist. Bezeichnet man daher mit ϱ eine positive Größe, die kleiner ist als ϱ' und ϱ'', so hat man innerhalb des Kreises um p mit dem Radius ϱ:

$$|x-p| < \varrho,$$

folglich:

$$|f(x)| = \frac{|\varphi(x)|}{|x-p|^m} > \frac{|d_0|}{2\varrho^m} > \frac{|d_0|}{2\varrho''^m} > A,$$

was zu beweisen war.

178. Es möge nun der folgende Hilfssatz aufgestellt werden[1]):

Ist $f(x)$ eine in einem Bereiche C reguläre analytische Funktion, so läßt sich nach Annahme einer willkürlichen Größe σ eine Größe h der Art finden, daß, wenn a, b, c drei

1) S. Pringsheim 407, 412.

beliebige Punkte eines innerhalb C gelegenen Bereiches D sind, welche den Bedingungen:

$$|b-a|<h, \quad |c-a|<h$$

genügen, dann die Beziehung:

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|<\sigma$$

gilt.

Die Konvergenzradien der Elemente der Funktion, welche den Punkten des Bereiches D entsprechen, besitzen (Art. 161) eine von Null verschiedene untere Grenze, die wir mit k bezeichnen wollen. Nimmt man also eine Größe $k'<k$ an, so wird für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches D die Funktion $f(x+k')$, und folglich (Art. 165) auch die Funktion $f''(x+k')$, regulär sein; der absolute Betrag von $f''(x+k')$ wird demnach (Art. 101) in dem Bereiche D ein endliches Maximum besitzen, das wir mit M bezeichnen wollen. Wir wählen nun eine Größe h kleiner als k' und kleiner als $\frac{\sigma}{2M}$:

$$h<k'<k, \quad h<\frac{\sigma}{2M}.$$

Ist a ein Punkt des Bereiches D, b ein zweiter Punkt desselben Bereiches, der von a um weniger als h entfernt ist, so hat man die konvergente Entwicklung:

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\\
&= d_0+d_1(b-a)+d_2(b-a)^2+\cdots\\
&= \sum_{r=0}^{\infty} d_r(b-a)^r;
\end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned}
f''(b) &= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)d_r(b-a)^{r-2}\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}(r+2)(r+1)d_{r+2}(b-a)^r.
\end{aligned}$$

Wenden wir auf diese Reihe die Ungleichung (3) Art. 128 an, so ergibt sich:

$$(r+2)(r+1)|d_{r+2}|\leqq\frac{M}{h^r},$$

mithin:

$$\begin{aligned}|d_{r+2}(b-a)^{r+2}| &\leqq \frac{1}{(r+2)(r+1)} \frac{M}{h^r} |b-a|^{r+2} \\ &< \frac{1}{(r+2)(r+1)} M |b-a|^2 \\ &< \frac{1}{(r+2)(r+1)} Mh |b-a|;\end{aligned}$$

daraus folgt durch Summierung von $r = 0$ bis $r = \infty$:

$$\sum_{r=0}^{\infty} |d_{r+2}(b-a)^{r+2}| < Mh|b-a| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+2)(r+1)},$$

oder, da die Reihe auf der rechten Seite bekanntlich den Wert 1 hat[1]):

$$\sum_{r=0}^{\infty} |d_{r+2}(b-a)^{r+2}| < Mh|b-a|$$

und um so mehr:

$$\left|\sum_{r=0}^{\infty} d_{r+2}(b-a)^{r+2}\right| < Mh|b-a|.$$

Nun ist:

$$\sum_{r=0}^{\infty} d_{r+2}(b-a)^{r+2} = \sum_{r=2}^{\infty} d_r(b-a)^r = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a);$$

folglich ergibt sich aus der obigen Beziehung:

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)\right| < Mh < \frac{\sigma}{2}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für $|c-a| < h$:

$$\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a} - f'(a)\right| < \frac{\sigma}{2}.$$

Folglich ist:

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right| < \sigma.$$

179. Ist eine analytische Funktion $f(x)$ in einem Kreisringe regulär, so ist ihr Mittelwert auf einer beliebigen, mit dem Ringe konzentrischen und in ihm enthaltenen Kreislinie unabhängig von der Wahl dieser letzteren.

---

1) S. z. B Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 145—146.

Es seien ϱ_1 und $\varrho_2 < \varrho_1$ die Radien der beiden Kreise, die den Ring begrenzen, dessen Mittelpunkt wir der Einfachheit wegen im Anfangspunkte annehmen wollen; wir wählen zwischen ϱ_1 und ϱ_2 zwei beliebige Radien ϱ und $\bar{\varrho} > \varrho$. Nach Annahme einer beliebig kleinen Größe σ und nachdem h derart bestimmt ist, daß der zwischen den Kreisen $\bar{\varrho}$, ϱ enthaltene Ring dem vorhergehenden Hilfssatze genügt, wählen wir eine positive ganze Zahl m so, daß:

$$\frac{\bar{\varrho} - \varrho}{m} = \delta < h,$$

und eine zweite n der Art, daß:

$$\varrho_1 |1 - \alpha_n| < h$$

ist, wo:

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$$

gesetzt ist.

Setzen wir $\varrho + \delta = \varrho'$ und außerdem:

$$\alpha_n^r \varrho = a, \quad \alpha_n^r \varrho' = b, \quad \alpha_n^{r+1} \varrho = c,$$

so ist für jede beliebige Zahl r:

$$\begin{aligned} |b - a| &= |\alpha_n^r \varrho' - \alpha_n^r \varrho| = \varrho' - \varrho = \delta < h, \\ |c - a| &= |\alpha_n^{r+1} \varrho - \alpha_n^r \varrho| \\ &= \varrho |1 - \alpha_n| < \varrho_1 |1 - \alpha_n| < h, \end{aligned}$$

und folglich (Art. 178):

$$\left| \frac{f(\alpha_n^r \varrho') - f(\alpha_n^r \varrho)}{\alpha_n^r (\varrho' - \varrho)} - \frac{f(\alpha_n^{r+1} \varrho) - f(\alpha_n^r \varrho)}{(\alpha_n^{r+1} - \alpha_n^r)\varrho} \right| < \sigma,$$

oder, wenn wir mit $|\alpha_n^r(\varrho' - \varrho)| = \delta$ multiplizieren:

$$\left| f(\alpha_n^r \varrho') - f(\alpha_n^r \varrho) - \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho(\alpha_n - 1)} [f(\alpha_n^{r+1} \varrho) - f(\alpha_n^r \varrho)] \right| < \sigma\delta.$$

Summieren wir von $r = 0$ bis $r = 2^n - 1$, ersetzen wir die Summe der absoluten Beträge durch den absoluten Betrag der Summe und beachten wir, daß:

$$\sum_{r=0}^{2^n - 1} (f(\alpha_n^{r+1} \varrho) - f(\alpha_n^r \varrho)) = 0$$

ist, so haben wir:

$$\left|\sum_{r=0}^{2^n-1} f(\alpha_n^r \varrho') - \sum_{r=0}^{2^n-1} f(\alpha_n^r \varrho)\right| < 2^n \sigma \delta,$$

also:

$$|\mathfrak{M}_n f(\varrho') - \mathfrak{M}_n f(\varrho)| < \sigma\delta,$$

woraus folgt:

$$|\mathfrak{M} f(\varrho') - \mathfrak{M} f(\varrho)| \leqq \sigma\delta.$$

Setzt man:

$$\varrho' + \delta = \varrho'', \quad \varrho'' + \delta = \varrho''', \cdots, \varrho^{(m-2)} + \delta = \varrho^{(m-1)},$$

woraus:

$$\varrho^{(m-1)} + \delta = \bar{\varrho}$$

folgt, so hat man analog:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{M} f(\varrho'') - \mathfrak{M} f(\varrho')| &\leqq \sigma\delta, \\
|\mathfrak{M} f(\varrho''') - \mathfrak{M} f(\varrho'')| &\leqq \sigma\delta, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|\mathfrak{M} f(\bar{\varrho}) - \mathfrak{M} f(\varrho^{(m-1)})| &\leqq \sigma\delta;
\end{aligned}$$

durch Summierung und Ersatz der Summe der absoluten Beträge durch den absoluten Betrag der Summe ergibt sich daraus:

$$|\mathfrak{M} f(\bar{\varrho}) - \mathfrak{M} f(\varrho)| \leqq m\sigma\delta = \sigma(\bar{\varrho} - \varrho) < \sigma(\varrho_1 - \varrho_2).$$

Nun ist aber σ eine beliebig kleine Größe, folglich ist:

$$\mathfrak{M} f(\bar{\varrho}) = \mathfrak{M} f(\varrho).$$

180. Eine analytische Funktion, die sich an allen Stellen eines Kreisringes mit dem Mittelpunkt p regulär verhält, ist für alle Punkte der Ringfläche mittels einer nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $x-p$ fortschreitenden Potenzreihe darstellbar **(Satz von Laurent)**[1].

Es seien $f(x)$ die gegebene Funktion, ϱ_1 und $\varrho_2 < \varrho_1$ die Radien der Kreise, die den betrachteten Kreisring C begrenzen, dessen Mittelpunkt wir vorläufig im Anfangspunkte annehmen wollen. Bezeichnen wir mit x_0 einen innerhalb des Ringes gelegenen Punkt, so ist die Funktion:

$$\varphi(x) = \frac{x[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}$$

in dem ganzen Ringe regulär. In der Tat sind:

1) C. R. Ac. sc. Paris 17 (1843) 938.

$$x, \quad [f(x) - f(x_0)], \quad \frac{1}{x - x_0}$$

analytische Funktionen, deren Existenzbereiche beziehentlich die ganze Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes, der Bereich C (oder ein ihn enthaltender Bereich) und die ganze Ebene mit Ausschluß des Punktes x_0 sind; folglich ist (Art. 163) $\varphi(x)$ eine analytische Funktion, die in dem ganzen Bereiche C mit Ausschluß höchstens des Punktes x_0 regulär ist. Es läßt sich indessen beweisen, daß sie auch in x_0 regulär ist. Für ein x_0 hinreichend nahes x hat man (Art. 147):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x) + \cdots,$$

woraus folgt:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\mathfrak{Q}(x - x_0),$$

wo $\mathfrak{Q}(x - x_0)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe bezeichnet; ferner ist:

$$x = x_0 + (x - x_0);$$

daraus folgt:

$$\varphi(x) = [x_0 + (x - x_0)]\mathfrak{Q}(x - x_0).$$

Damit ist die Behauptung erwiesen.

Dies vorausgeschickt, ergibt sich für $\varrho_2 < \varrho_2' < |x_0| < \varrho_1' < \varrho_1$ (Art. 179):

$$\mathfrak{M}\,\varphi(\varrho_1') = \mathfrak{M}\,\varphi(\varrho_2'),$$

oder:

$$\mathfrak{M}\,\frac{\varrho_1'[f(\varrho_1') - f(x_0)]}{\varrho_1' - x_0} = \mathfrak{M}\,\frac{\varrho_2'[f(\varrho_2') - f(x_0)]}{\varrho_2' - x_0},$$

oder auch (Art. 125):

$$\mathfrak{M}\,\frac{\varrho_1' f(\varrho_1')}{\varrho_1' - x_0} - f(x_0)\,\mathfrak{M}\,\frac{\varrho_1'}{\varrho_1' - x_0} = \mathfrak{M}\,\frac{\varrho_2' f(\varrho_2')}{\varrho_2' - x_0} - f(x_0)\,\mathfrak{M}\,\frac{\varrho_2'}{\varrho_2' - x_0}.$$

Es folgt hieraus, wegen (1), (2), (4) des Art. 131:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_0^h\,\mathfrak{M}\,\frac{f(\varrho_1')}{\varrho_1'^h} - f(x_0) = -\sum_{h=1}^{\infty} x_0^{-h}\,\mathfrak{M}[\varrho_2'^h f(\varrho_2')].$$

Nun ist die Funktion $x^h f(x)$ für jeden ganzen positiven oder negativen Wert von h (einschließlich Null) in dem Ringe C regulär, folglich hat man (Art. 179), wenn man mit ϱ eine beliebige Größe zwischen ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet:

$$\mathfrak{M}[\varrho_1'^h f(\varrho_1')] = \mathfrak{M}[\varrho_2'^h f(\varrho_2')] = \mathfrak{M}[\varrho^h f(\varrho)];$$

somit ergibt sich aus der obigen Gleichung, wenn wir x statt x_0 schreiben:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x^h \mathfrak{M}[\varrho^{-h} f(\varrho)],$$

oder auch, wenn wir die konstante Größe $\mathfrak{M}[\varrho^{-h} f(\varrho)]$ mit a_h bezeichnen:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h x^h.$$

Hat der Kreisring anstatt des Anfangspunktes einen Punkt p zum Mittelpunkt, so nimmt die Entwicklung folgende Gestalt an:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h (x-p)^h.$$

Diese Formel kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(2) \qquad f(x) = \mathfrak{P}_1(x-p) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-p}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen von $x-p$, bezw. $\frac{1}{x-p}$ sind und $\mathfrak{P}_2$ kein konstantes Glied enthält.

181. Angenommen, eine analytische Funktion $f(x)$ besitze einen isolierten singulären Punkt p, d. h. einen singulären Punkt von der Art, daß sich um p als Mittelpunkt ein Kreis beschreiben läßt, in dessen sämtlichen Punkten, p selbst ausgenommen, $f(x)$ regulär ist. Dergleichen Punkte sind z. B. die Pole (Art. 176). — Nennen wir ϱ_1 den Radius dieses Kreises und beschreiben wir mit dem Radius ϱ_2, der nur kleiner als ϱ_1 sein muß, sonst aber willkürlich ist, um p einen zweiten Kreis, so verhält sich $f(x)$ in dem so bestimmten Ringe regulär und kann folglich in allen Punkten dieses Gebietes mittels des Ausdrucks (2) des vorigen Artikels dargestellt werden. Je nachdem p ein Pol oder ein wesentlich singulärer Punkt ist, bricht $\mathfrak{P}_2$ ab (vgl. Art. 171) oder ist eine unendliche Reihe. In jedem Falle bezeichnet man $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-p}\right)$ als den zum singulären Punkte p gehörigen Hauptteil; er hat die Eigenschaft, daß die Differenz zwischen ihm und der betrachteten Funktion im Punkte p keine Singularität mehr hat[1]).

---

1) D'Arcais (7) hat den Laurentschen Satz folgendermaßen verallgemeinert: Wenn wir mit I die Menge der singulären Punkte von $f(x)$ bezeichnen, die (Art. 158) abgeschlossen ist, und wenn p ein Punkt von I

182. Hat eine Funktion $f(x)$ in p eine wesentliche Singularität, so trifft dasselbe für $f'(x)$ zu[1]).

Nach Art. 165 ist p jedenfalls ein singulärer Punkt von $f'(x)$.

Ist p Grenzpunkt der Menge der wesentlich singulären Punkte von $f(x)$, so ist er auch Grenzpunkt der Menge der singulären Punkte von $f'(x)$ und somit (Art. 176) ein wesentlich singulärer Punkt von $f'(x)$.

Im entgegengesetzten Falle hat man in der Umgebung von p (Art. 181):

$$f(x) = \mathfrak{P}_1(x-p) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-p}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-p}\right)$ eine unendliche Reihe ist. Beachtet man, daß die Ableitung von $\frac{1}{x-p}$ (Art. 168) gleich $-\frac{1}{(x-p)^2}$ ist, so erhält man daraus unter Anwendung des Satzes in Art. 169:

$$f'(x) = \mathfrak{P}_1'(x-p) - \frac{1}{(x-p)^2}\mathfrak{P}_2'\left(\frac{1}{x-p}\right);$$

da aber $\mathfrak{P}_2'\left(\frac{1}{x-p}\right)$ eine unendliche Reihe ist, so ist p ein wesentlich singulärer Punkt von $f'(x)$.

183. Ist p ein wesentlich singulärer Punkt, der nicht Grenzpunkt der Menge der wesentlich singulären Punkte der Funktion ist, so kann er Grenzpunkt der Menge der Pole sein oder auch nicht.

Im ersten Falle gibt es in jeder Umgebung von ihm Pole und folglich auch (Art. 177) Punkte, in welchen die Funktion absolut größer ist als eine beliebige Größe A.

Im zweiten Falle läßt sich (Art. 181) die Funktion $f(x)$ mittels der Formeln (1), (2) des Art. 180 darstellen. Wäre nun die Funktion $f(x)$ in allen Punkten des Kreises ϱ_1 (mit Ausschluß des Punktes p)

---

ist, der I', aber nicht I'' angehört, so läßt sich die Funktion in einer bestimmten kreisförmigen Umgebung ε von p, den Punkt selbst ausgenommen, mittels einer Reihe von positiven und negativen Potenzen von $x-p$ darstellen, deren Koeffizienten sich aber jedesmal ändern, wenn die Umgrenzung von ε, deren Radius als veränderlich vorausgesetzt wird, über einen Punkt von I hinausgeht.

1) Der Satz ist für nicht eindeutige Funktionen nicht immer richtig. So hat $\lg x$ im Anfangspunkte einen wesentlich singulären Punkt, während die Ableitung $\frac{1}{x}$ in diesem Punkte einen Pol hat.

absolut kleiner als eine endliche Größe M, so würde man durch Anwendung der Formel Art. 128 (3) für jeden Wert von r haben:

$$|a_r| \leqq \frac{M}{\varrho_2^r}.$$

Da aber ϱ_2 beliebig klein ist, so müßte a_r für jedes negative r Null sein; $f(x)$ würde sich dann auf eine Reihe positiver Potenzen von $x - p$ reduzieren und deshalb in p regulär sein. Folglich muß es, wie man auch die endliche Größe A wähle, auch in diesem Falle in jeder Umgebung von p Punkte geben, in denen $|f(x)| > A$ ist.

Nun besitzt[1] auch die Funktion $f(x) - l$, wo l eine beliebige Konstante ist, in p eine wesentliche Singularität, also läßt sich das Vorstehende wegen der Definition der wesentlich singulären Punkte (Art. 171) auch von der Funktion $\frac{1}{f(x) - l}$ sagen; mithin werden in jeder Umgebung von p Punkte vorhanden sein, in denen diese Funktion ihrem absoluten Betrage nach beliebig groß ist oder in denen $f(x)$ sich l beliebig nähert.

Zusammenfassend können wir sagen:

Ist p der singuläre Punkt, und nimmt man willkürlich drei Größen ϱ, σ, l an, von denen die beiden ersten reell und positiv sind, die dritte völlig willkürlich ist, so gibt es innerhalb des Kreises um p mit dem Radius ϱ sicher Punkte x, für welche die Beziehung:

$$|f(x) - l| < \sigma,$$

und Punkte x, für welche die Beziehung:

$$\frac{1}{|f(x)|} < \sigma$$

besteht. Kürzer:

In jeder Umgebung eines wesentlich singulären Punktes, der nicht Grenzpunkt der Menge der wesentlich singulären Punkte ist, nähert sich die Funktion unbeschränkt jedem beliebigen vorgegebenen Werte **(Satz von Casorati)**[2].

---

1) Es folgt nämlich aus Art. 180 (2):

$$f(x) - l = \mathfrak{P}_1(x-p) - l + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-p}\right) = \overline{\mathfrak{P}}_1(x-p) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-p}\right),$$

wo gesetzt ist:

$$\overline{\mathfrak{P}}_1(x-p) = \mathfrak{P}_1(x-p) - l.$$

2) Es ist nicht gerecht, diesen Satz, wie manche Autoren tun, als Weierstraßschen Satz zu bezeichnen, da ihn Casorati zuerst bewiesen hat (Teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia 1868, § 88; Un teorema fondamen-

Es ist von Wichtigkeit, den Unterschied hervorzuheben, der zwischen dem Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Poles und in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes statthat. Nähert sich die Funktion einem Pole, so hat sie als einzige Grenze ∞; nähert sie sich einem wesentlich singulären Punkte, so hat sie alle reellen und komplexen Größen zu Grenzen oder ist vollständig unbestimmt.

184. Der Satz des vorigen Artikels setzt zwei Bedingungen voraus: die eine deutlich ausgesprochene, daß der betrachtete Punkt nicht Grenzpunkt der Menge der wesentlich singulären Punkte sei; die andere stillschweigende, daß die Funktion eindeutig sei.

Daß das Fehlen der ersten Bedingung die Gültigkeit des Satzes beeinträchtigt, hat Pringsheim an Beispielen gezeigt, die wir weiter unten kennen lernen werden; daß auch die zweite wesentlich ist, geht aus folgendem Beispiel hervor, das man Hölder[1]) verdankt.

Die nicht eindeutige Funktion $f(x) = \lg x$ hat im Punkte $x = 0$ eine wesentliche Singularität. Setzt man $x = re^{i\varphi}$, so hat man:

$$f(x) = \lg x = \lg r + i\varphi.$$

Nimmt man also, wie im vorigen Artikel, ϱ und σ willkürlich an, so kann A nicht durchaus beliebig gewählt werden, sondern unterliegt der Bedingung, daß sein reeller Teil algebraisch kleiner sei als $\lg \varrho$.

185. Eine andre Gestalt, die man dem Satze des Art. 183 zu geben pflegt, ist folgende: Die Grenze, welcher die Funktion zustrebt, wenn sich die Variable einem wesentlich singulären Punkte nähert, hängt von der Richtung ab, in welcher sie sich nach diesem Punkte hin bewegt.

So ausgesprochen, ist der Satz gleichwohl nicht genau, weil es ja vorkommen kann, daß, während die Bewegung nach einem singulären Punkte hin in ein und derselben Richtung, d. h. auf Kurven erfolgt, welche in diesem Punkte die Tangente gemein haben, die Grenzen, welchen die Funktion zustrebt, der verschiedenen Krümmung der Kurven in demselben Punkte entsprechend verschieden sind[2]).

---

tale nella teorica delle discontinuità delle funzioni, Rend. Ist. Lomb. (2) **1** (1868) 123—125). Vgl. Bertini, Commemorazione del Comm. Prof. Felice Casorati, Rend. Ist. Lomb. (2) 25 (1892) 1206—1236.

1) Hölder 207, wo er einen neuen Beweis für den Satz des Art. 183 gibt. — Siehe auch Painlevé 355.

2) Vivanti 500.

Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, die im Anfangspunkte einen wesentlich singulären Punkt hat. Setzen wir $x = u + iv$, wo u und v reell sind, so finden wir[1]):

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{u}{u^2+v^2}}\left[\cos\frac{v}{u^2+v^2} - i\sin\frac{v}{u^2+v^2}\right].$$

Findet die Bewegung nach dem Anfangspunkte hin längs der positiven reellen Achse ($u > 0$, $v = 0$) statt, so strebt die Funktion der Grenze ∞ zu; folgt sie umgekehrt der negativen reellen Achse ($u < 0$, $v = 0$), so hat die Funktion die Null zur Grenze.

Die Bewegung finde jetzt nach dem Anfangspunkte hin längs einer Geraden statt, deren Gleichung $v = hu$ sei. Für einen Punkt dieser Geraden hat man:

$$f(x) = f(u(1+ih)) = e^{\frac{1}{u(1+h^2)}}\left[\cos\frac{h}{u(1+h^2)} - i\sin\frac{h}{u(1+h^2)}\right].$$

Während u der Null zustrebt, strebt der absolute Betrag der Funktion der Grenze ∞ zu, wenn die Gerade im 1. oder 4. Quadranten ($u > 0$), der Grenze 0 aber, wenn sie im 2. oder 3. ($u < 0$) liegt; ihr Argument wächst unbegrenzt in positivem oder negativem Sinne, je nachdem die Gerade im 3. oder 4. Quadranten ($v < 0$) oder aber im 1. oder 2. ($v > 0$) liegt.

Folgt die Bewegung endlich der positiven oder negativen imaginären Achse, so wächst das Argument unbegrenzt in negativem oder positivem Sinne, während der absolute Betrag beständig gleich 1 bleibt.

Wir nehmen jetzt eine Bewegung nach dem Anfangspunkte hin längs eines Kreises an, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse im Abstande a vom Anfangspunkte liegt, und der folglich die imaginäre Achse berührt. Die Gleichung dieses Kreises ist:

$$u^2 + v^2 - 2au = 0,$$

und man hat für einen beliebigen seiner Punkte:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2a}}\left[\cos\frac{v}{2au} - i\sin\frac{v}{2au}\right],$$

woraus man ersieht, daß der absolute Betrag der Funktion längs dieses Kreises konstant und zwar gleich $e^{\frac{1}{2a}}$ bleibt.

1) Da es sich hier nur um ein Beispiel handelt, bedienen wir uns der bekannten Eulerschen Formel, obgleich von ihr bisher noch nicht die Rede war.

Der konstante Wert dieses absoluten Betrages der Funktion ist auf den verschiedenen, die imaginäre Achse im Anfangspunkte berührenden Kreisen verschieden und nimmt alle von 0 bis ∞ möglichen Werte an, wenn man alle derartigen, ebenso rechts wie links von jener Achse liegenden Kreise in Betracht zieht.

Die rationalen Funktionen, als analytische Funktionen betrachtet. Die arithmetischen Ausdrücke.

186. Die anscheinend ziemlich künstliche Definition der analytischen Funktion legt den Wunsch nahe zuzusehen, ob und inwieweit der neue Begriff der Funktion mit demjenigen übereinstimmt, der in der algebraischen Analysis gang und gäbe ist.

Die eindeutigen Funktionen, welche uns in der Algebra begegnen, sind in der Hauptsache die rationalen Funktionen und die Summen unendlich vieler rationaler Funktionen. Auf diese also werden wir nun unsere Aufmerksamkeit richten müssen, um zu sehen, ob und unter welchen Bedingungen sie als analytische Funktionen betrachtet werden können.

187. Eine ganze rationale Funktion:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

ist ein besonderer Fall einer Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius und erzeugt daher eine analytische Funktion, die vollständig durch das erzeugende Element dargestellt wird. Eine solche Funktion hat in endlicher Entfernung keine Singularität, folglich ist für sie (Art. 170) — wenn sie sich nicht auf eine Konstante reduziert — der unendlich ferne Punkt ein singulärer Punkt. Da aber dann:

$$\frac{1}{x^m} f(x) = \frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x} + a_m$$

keine positiven Potenzen von x enthält und folglich im Unendlichen regulär ist, so ist (Art. 175) dieser Punkt für die Funktion $f(x)$ ein Pol m-ter Ordnung.

Also: Ein Polynom m-ten Grades ist eine analytische Funktion, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes regulär ist, der für sie einen Pol m-ter Ordnung bildet.

188. Hieraus ergibt sich ein sehr einfacher Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra (**Satz von Gauß**).

Gegeben sei die algebraische Gleichung:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0.$$

Da die analytische Funktion $f(x)$ im Unendlichen einen Pol besitzt, so ist ihre reziproke Funktion $\frac{1}{f(x)}$ in diesem Punkte regulär. Sie muß folglich (Art. 170) mindestens einen singulären Punkt c in endlicher Entfernung haben, dieser kann aber, weil die Funktion $f(x)$ in ihm regulär ist, nur ein Pol sein. Daraus folgt (Art. 172), daß $f(x)$ in c Null wird.

Die Funktion $f(x)$ hat mithin sicher eine Nullstelle, d. h. die algebraische Gleichung $f(x) = 0$ besitzt sicher eine Wurzel.

Daraus wird in bekannter Weise der Satz hergeleitet, daß $f(x)$ in m lineare Faktoren zerfällt.

189. Eine gebrochene rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynome:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n},$$

den wir immer als auf die kleinste Benennung gebracht voraussetzen dürfen, und wobei $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ ist.

Wir setzen (Art. 188):

$$\psi(x) = b_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r},$$

wo:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n;$$

da die analytische Funktion $\psi(x)$ in der ganzen Ebene regulär ist, den unendlich fernen Punkt ausgenommen, in dem sie einen Pol n-ter Ordnung hat, und da lediglich die Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ihre Nullstellen sind, deren Ordnung beziehentlich $k_1, k_2, \ldots, k_r$ ist, so verhält sich ihre reziproke Funktion $\frac{1}{\psi(x)}$ überall regulär außer in den Punkten $c_1, c_2, \ldots, c_r$, welche für sie Pole von beziehentlich k_1-ter, k_2-ter, $\ldots$, k_r-ter Ordnung sind (Art. 172). Mit andern Worten, $\frac{1}{\psi(x)}$ ist überall regulär außer in den Punkten c_h, aber $\frac{(x - c_h)^{k_h}}{\psi(x)}$ ist auch in c_h regulär (Art. 171) und wird in diesem Punkte nicht Null. Da ferner $\varphi(x)$ in jedem im Endlichen liegenden Punkte regulär ist und in keinem der Punkte c_h verschwindet, so ist das Produkt $\varphi(x)\frac{1}{\psi(x)}$ in jedem im Endlichen gelegenen Punkte, die Punkte c_h ausgenommen, regulär, das Produkt $\varphi(x)\frac{(x - c_h)^{k_h}}{\psi(x)}$ aber ist in c_h regulär und wird

dort nicht Null; oder auch: $f(x)$ ist eine analytische Funktion, die in jedem im Endlichen liegenden Punkte regulär ist, die Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ausgenommen, die für sie Pole von beziehentlich k_1-ter, k_2-ter, ..., k_r-ter Ordnung sind.

Um zu untersuchen, wie sich die Funktion im Unendlichen verhält, nehmen wir die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ vor; wir erhalten dann:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x'} + \frac{a_2}{x'^2} + \cdots + \frac{a_m}{x'^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x'} + \frac{b_2}{x'^2} + \cdots + \frac{b_n}{x'^n}}$$

$$= x'^{n-m} \frac{a_m + a_{m-1}x' + \cdots + a_1 x'^{m-1} + a_0 x'^m}{b_n + b_{n-1}x' + \cdots + b_1 x'^{n-1} + b_0 x'^n}.$$

Da weder der Zähler noch der Nenner des letzteren Bruches für $x' = 0$ verschwindet, so schließt man wie oben, daß der Quotient für $x' = 0$ regulär und von Null verschieden ist. Daraus folgt, daß $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ für $n - m \geqq 0$ in dem Punkte $x' = 0$ regulär ist und daselbst, wenn $n > m$, eine Nullstelle $(n-m)$-ter Ordnung hat; für $n - m < 0$ hat $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ in diesem Punkte einen Pol $(m-n)$-ter Ordnung. Folglich ist $f(x)$ in dem unendlich fernen Punkte regulär, wenn $m \leqq n$, und hat in ihm, falls $m < n$, eine Nullstelle $(n-m)$-ter Ordnung; dagegen hat $f(x)$ in diesem Punkte einen Pol $(m-n)$-ter Ordnung, wenn $m > n$ ist.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß, wenn man eine s-fache Nullstelle oder einen s-fachen Pol für s Nullstellen oder s Pole rechnet, in dem Falle $m \leqq n$ die Gesamtzahl der Nullstellen der Funktion $f(x)$ gleich n (nämlich die m Nullstellen von $\varphi(x)$ und, für $m < n$, eine Nullstelle $(n-m)$-ter Ordnung im unendlich fernen Punkte), die Gesamtzahl ihrer Pole aber gleich $k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ oder n ist; im Falle $m > n$ ist die Gesamtzahl der Nullstellen m, nämlich die Nullstellen von $\varphi(x)$, die der Pole ebenfalls m, nämlich:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r + (m - n).$$

Auch in dem einfacheren Falle eines Polynoms vom Grade m (Art. 187, 188) hat man einen m-fachen Pol und m Nullstellen.

Wir können demnach zusammenfassend sagen:

Die (ganzen oder gebrochenen) rationalen Funktionen haben keine andern Singularitäten als Pole; die Anzahl ihrer Pole,

eventuell mit Einschluß des unendlich fernen Punktes, ist endlich und gleich derjenigen ihrer Nullstellen (wobei die Ordnung der Vielfachheit der einen und der andern in Betracht kommt)[1].

190. Umgekehrt: Eine analytische Funktion, die keine andern Singularitäten hat als Pole, ist eine rationale Funktion; im besondern ist eine analytische Funktion, die einen Pol im Unendlichen hat und sonst überall regulär ist, eine ganze rationale Funktion.

Wir beweisen zunächst den zweiten Teil der Behauptung. Ist der im Unendlichen liegende Pol der in jedem andern Punkte regulären Funktion $f(x)$ von der m-ten Ordnung, so hat man (Art. 175) in der Umgebung des unendlich fernen Punktes:

$$f(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \cdots + d_{m-1} x + d_m + \frac{d_{m+1}}{x} + \frac{d_{m+2}}{x^2} + \cdots.$$

Die Differenz:

$$f(x) - (d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \cdots + d_{m-1} x)$$

ist in dem unendlich fernen Punkte regulär und hat keine weiteren Singularitäten, folglich reduziert sie sich (Art. 170) auf eine Konstante, die nichts andres ist als d_m. Man hat also:

$$f(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \cdots + d_{m-1} x + d_m.$$

Die Funktion besitze nun irgendwelche Pole. Diese werden in endlicher Anzahl vorhanden sein, da sie sonst (Art. 5) mindestens eine Grenzstelle besitzen würden, die (Art. 176) ein wesentlich singulärer Punkt sein müßte. Es mögen demnach $c_1, c_2, \ldots, c_r$ die Pole, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ ihre bezüglichen Ordnungszahlen sein; außerdem sei, um den allgemeineren Fall anzunehmen, ein Pol s-ter Ordnung im Unendlichen vorhanden.

Die Funktion $f(x)(x-c_1)^{k_1}$ ist dann (Art. 171) im Punkte c_1 regulär; da außerdem (Art. 187) $(x-c_1)^{k_1}$ keine andern Singularitäten hat als einen Pol k_1-ter Ordnung im Unendlichen und außer in c_1 in keinem Punkte verschwindet, so besitzt die Funktion $f(x)(x-c_1)^{k_1}$ keine andern Singularitäten als einen Pol $(s+k_1)$-ter Ordnung im Unendlichen[2] und Pole k_2-ter, k_3-ter, ..., k_r-ter Ordnung in den

1) In bezug auf die sogenannte Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen sei z. B auf Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 388 verwiesen.

2) Ist $f(x)$ im Unendlichen regulär, so ist diese Ordnung $\leqq k_1$, und analog die Ordnung der Funktion (1) $\leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_r$.

Punkten $c_2, c_3, \ldots, c_r$. Wiederholt man dieses Schlußverfahren, so kommt man zu dem Ergebnis, daß die Funktion:

$$f(x)(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_r)^{k_r} \tag{1}$$

keine andern Singularitäten hat als einen Pol von der Ordnung:

$$s+k_1+k_2+\cdots+k_r$$

im Unendlichen. Sie ist also nach dem, was soeben dargelegt worden, eine ganze rationale Funktion oder ein Polynom $\varphi(x)$, und man hat:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_r)^{k_r}}.$$

191. Eine Summe unendlich vieler rationaler Funktionen wollen wir einen *arithmetischen Ausdruck* nennen und den Inbegriff der Punkte, in denen sie konvergent ist, als dessen *Konvergenzbereich* bezeichnen.

Es ist von Wichtigkeit darauf hinzuweisen, daß der Konvergenzbereich eines arithmetischen Ausdruckes *nicht zusammenhängend* sein, d. h. daß er aus mehreren getrennten Gebieten bestehen kann; z. B. für den arithmetischen Ausdruck:

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{x^h+x^{-h}}$$

besteht, wie man leicht zeigen kann, der Konvergenzbereich aus dem Teile der Ebene, der innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt liegt, und aus demjenigen, der außerhalb desselben Kreises liegt, so daß beide Teile durch die Peripherie dieses Kreises getrennt werden.

192. Es sei ein arithmetischer Ausdruck:

$$F(x)=\sum_{h=1}^{\infty}\varphi_h(x) \tag{1}$$

gegeben, der innerhalb eines Kreises vom Radius ϱ um einen Punkt c gleichmäßig konvergent sei. Innerhalb dieses Bereiches können die rationalen Funktionen $\varphi_h(x)$, jedenfalls von einem bestimmten Index h an, keine Pole besitzen, daher läßt sich jede von ihnen in eine innerhalb des Kreises ϱ konvergente Potenzreihe von $x-c$ entwickeln:

$$\varphi_h(x)=\mathfrak{P}_h(x-c);$$

ferner läßt sich (Art. 132) die Reihe:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathfrak{P}_h(x-c)$$

auf die Form einer Potenzreihe:

$$(2) \qquad F(x) = \mathfrak{P}(x-c)$$

bringen, die innerhalb des Kreises ϱ konvergent ist. Verfahren wir ebenso in bezug auf einen Punkt d innerhalb des Kreises ϱ, so erhalten wir für alle Punkte x einer bestimmten Umgebung ϱ_1 von d:

$$(3) \qquad F(x) = \mathfrak{Q}(x-d),$$

wo $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe bezeichnet. Für einen den Kreisen ϱ, ϱ_1 gemeinsamen Punkt werden (2), (3) gleichzeitig gelten, so daß man erhält:

$$\mathfrak{P}(x-c) = \mathfrak{Q}(x-d).$$

Nun ist andrerseits:

$$\mathfrak{P}(x-c) = \mathfrak{P}(x-c \,|\, d-c),$$

folglich ist:

$$\mathfrak{P}(x-c \,|\, d-c) = \mathfrak{Q}(x-d).$$

Beide Seiten sind Potenzreihen von $x-d$, und die Gleichheit muß in einer gewissen Umgebung von d gelten, folglich ist (Art. 121):

$$\mathfrak{P}(x-c \,|\, d-c) \equiv \mathfrak{Q}(x-d).$$

Setzt man das Schlußverfahren in derselben Weise fort, so erhält man offenbar folgende Sätze:

a) Für jeden Punkt c, in dessen Umgebung der arithmetische Ausdruck gleichmäßig konvergent ist, läßt sich eine Potenzreihe finden, die in allen Punkten einer Umgebung von c denselben Wert hat wie jener Ausdruck.

b) Ist C ein **zusammenhängender**, den Punkt c enthaltender Bereich, und ist innerhalb dieses Bereiches der arithmetische Ausdruck gleichmäßig konvergent, so gehen die Potenzreihen, die den Ausdruck in den verschiedenen Punkten von C darstellen, durch Transformation aus derjenigen hervor, die ihn in der Umgebung von c darstellt, d. h. sie sind Elemente einer und derselben analytischen Funktion.

Kürzer: Ist ein arithmetischer Ausdruck $F(x)$ innerhalb eines **zusammenhängenden** Bereiches C **gleichmäßig** konvergent, so läßt sich eine analytische Funktion $f(x)$ angeben, die ihn innerhalb dieses ganzen Bereiches darstellt.

193. Hier erhebt sich eine wichtige Frage. Es kann nämlich vorkommen, daß der arithmetische Ausdruck $F(x)$ außer in dem Bereiche C noch in einem andern von C getrennten Bereiche $\overline{C}$ gleichmäßig konvergent ist. Geht man von einem Punkte $\bar{c}$ des Bereiches $\overline{C}$ aus, so läßt sich eine analytische Funktion $\bar{f}(x)$ finden, durch die $F(x)$ in dem Bereiche $\overline{C}$ ebenso dargestellt wird, wie durch $f(x)$ in dem Bereiche C. Besteht nun zwischen den beiden analytischen Funktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ eine notwendige Beziehung? Sind im besondern, wenn der Existenzbereich der analytischen Funktion $f(x)$ außer C auch $\overline{C}$ enthält, die beiden Funktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ notwendigerweise miteinander identisch?

194. Um auf die zweite dieser Fragen zu antworten, schicken wir folgenden Satz[1]) aus der Theorie der Reihen voraus:

Ist $u_1, u_2, \cdots$ eine Folge von reellen oder komplexen Größen von der Art, daß die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} u_h$ konvergent oder divergent (aber nicht unbestimmt) ist, bedeutet $n_1, n_2, \cdots$ eine Folge von wachsenden positiven ganzen Zahlen und setzt man $\sum\limits_{h=1}^{m} u_h = S_m$, so ist die Reihe:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{u_{n_h+1} + u_{n_h+2} + \cdots + u_{n_{h+1}}}{S_{n_h} S_{n_{h+1}}}$$

stets konvergent; ihr Wert ist $\frac{1}{S_{n_1}}$, wenn die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} u_h$ divergiert, $\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S}$, wenn sie konvergiert und die Summe S hat.

Die Reihe (1) läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{S_{n_h}} - \frac{1}{S_{n_{h+1}}}\right] = \left[\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S_{n_2}}\right] + \left[\frac{1}{S_{n_2}} - \frac{1}{S_{n_3}}\right] + \cdots = \frac{1}{S_{n_1}} - \lim_{r=\infty} \frac{1}{S_{n_{r+1}}}.$$

Nun ist $\lim\limits_{r=\infty} n_{r+1} = \infty$, folglich:

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{S_{n_{r+1}}} = \lim_{m=\infty} \frac{1}{S_m},$$

und diese Grenze ist 0 oder $\frac{1}{S}$, je nachdem die Reihe:

1) D'Arcais 6.

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h$$

divergiert oder aber konvergiert und die Summe S hat; somit hat (1) in den beiden Fällen beziehentlich den Wert $\frac{1}{S_{n_1}}$ oder $\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S}$.

195. Es ist zu bemerken, daß die Reihe (1) des vorigen Artikels auch dann noch konvergiert und die Summe $\frac{1}{S_{n_1}}$ hat, wenn für den Fall, daß die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ unbestimmt ist:

(1) $$\lim_{m=\infty} |S_m| = \infty$$

ist.

Dies findet im besondern jedesmal statt, wenn das allgemeine Glied der Reihe seinem absoluten Werte nach unbegrenzt wächst, d. h. wenn:

(2) $$\lim_{m=\infty} |u_m| = \infty.$$

In der Tat läßt sich (2) folgendermaßen schreiben:

$$\lim_{m=\infty} |S_m - S_{m-1}| = \infty;$$

nun ist:

$$|S_m - S_{m-1}| \leqq |S_m| + |S_{m-1}|;$$

somit hat man:

$$\lim_{m=\infty} [|S_m| + |S_{m-1}|] = \infty,$$

oder auch:

$$2 \lim_{m=\infty} |S_m| = \infty,$$

was mit (1) gleichbedeutend ist.

196. Es sei nunmehr der arithmetische Ausdruck:

(1) $$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(x)$$

gegeben; er konvergiere in einem Bereiche C, divergiere in einem zweiten Bereiche D oder sei daselbst zwar unbestimmt, aber doch so, daß:

$$\lim_{m=\infty} \left| \sum_{h=1}^{m} \varphi_h(x) \right| = \infty.$$

Der arithmetische Ausdruck:

$$G(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(x), \tag{2}$$

wo:

$$\psi_r(x) = \frac{\varphi_{n_r+1}(x) + \varphi_{n_r+2}(x) + \cdots + \varphi_{n_{r+1}}(x)}{S_{n_r}(x)\, S_{n_{r+1}}(x)} = \frac{1}{S_{n_r}(x)} - \frac{1}{S_{n_{r+1}}(x)},$$

$$S_m(x) = \sum_{h=1}^{m} \varphi_h(x)$$

und die n_r den ihnen in Art. 194 zugewiesenen Sinn haben, wird nach dem obigen Satze in allen Punkten des Bereiches C denselben Wert haben wie:

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)} - \frac{1}{F(x)},$$

in allen Punkten des Bereiches D denselben Wert wie:

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)}.$$

Beachtet man, daß $\frac{1}{S_{n_1}(x)}$ als rationale Funktion eine analytische Funktion ist, welche die ganze Ebene mit Ausschluß einer endlichen Anzahl von Punkten (Art. 189) zum Existenzbereich hat, so erkennt man, daß $G(x)$ ein in den getrennten Bereichen C und D konvergenter arithmetischer Ausdruck ist, der in dem Bereiche D durch die analytische Funktion $\frac{1}{S_{n_1}(x)}$ dargestellt wird, während er in dem Bereiche C nicht durch dieselbe analytische Funktion dargestellt wird[1]), obschon der Existenzbereich dieser letzteren auch den Bereich D, höchstens mit Ausschluß einer endlichen Anzahl von Punkten, einschließt.

Ist im besondern die Reihe (1) in dem Bereiche C gleichmäßig konvergent, so gewinnen wir außer dem eben dargelegten negativen Ergebnis auch noch das positive, die beiden analytischen Funktionen bestimmt zu haben, welche $G(x)$ beziehentlich in den Bereichen D und C darstellen; denn wenn wir die analytische Funktion, welche den arithmetischen Ausdruck $F(x)$ in dem Bereiche C dar-

1) Man hat nämlich, da $F(x)$ im ganzen Bereiche C endlich ist, für alle Punkte dieses Bereiches:

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)} - \frac{1}{F(x)} \neq \frac{1}{S_{n_1}(x)}.$$

stellt, $f(x)$ nennen, so ist diejenige, welche in demselben Bereiche $G(x)$ darstellt:

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)} - \frac{1}{f(x)}.$$

197. Man nehme z. B.:

$$\varphi_h(x) = x^{h-1},$$

folglich:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{h-1}.$$

Diese Reihe konvergiert innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt; in den Punkten außerhalb dieses Kreises ist sie nicht konvergent, und der absolute Betrag ihres allgemeinen Gliedes wächst unbegrenzt. Folglich dürfen wir das Innengebiet des Kreises mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt als Bereich C, das Außengebiet desselben Kreises als Bereich D annehmen. Im Bereiche C hat man bekanntlich:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}, \quad S_{n_r} = \frac{1-x^{n_r}}{1-x}.$$

Dann wird nach dem bewiesenen Satze der arithmetische Ausdruck:

$$G(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1-x}{1-x^{n_r}} - \frac{1-x}{1-x^{n_{r+1}}}\right] = (1-x) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{n_r}\left(1-x^{n_{r+1}-n_r}\right)}{\left(1-x^{n_r}\right)\left(1-x^{n_{r+1}}\right)}$$

ebenso in C konvergieren wie in D, und sein Wert wird

$$\text{in } C\colon \frac{1-x}{1-x^{n_1}} - (1-x) \text{ oder } \frac{x^{n_1}(1-x)}{1-x^{n_1}},$$

$$\text{in } D\colon \frac{1-x}{1-x^{n_1}}$$

sein. Es folgt hieraus, daß der Wert von:

$$H(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{n_r}\left(1-x^{n_{r+1}-n_r}\right)}{\left(1-x^{n_r}\right)\left(1-x^{n_{r+1}}\right)}$$

in C gleich $\dfrac{x^{n_1}}{1-x^{n_1}}$ und in D gleich $\dfrac{1}{1-x^{n_1}}$ ist.

Nehmen wir im besondern $n_r = 2^{r-1}$, so erhalten wir den arithmetischen Ausdruck:

$$H(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2^{r-1}}}{1 - x^{2^r}},$$

dessen Wert $\frac{x}{1-x}$ in C und $\frac{1}{1-x}$ in D ist. Daraus folgt, daß der arithmetische Ausdruck:

$$K(x) = \frac{1+x}{1-x} - 2H(x) = \frac{1+x}{1-x} - 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2^{r-1}}}{1 - x^{2^r}} =$$

$$= \frac{1+x}{1-x} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1+x^{2^r}}{1-x^{2^r}} - \frac{1+x^{2^{r-1}}}{1-x^{2^{r-1}}}\right]$$

in C den Wert $+1$ und in D den Wert -1 hat[1]).

198. Es bleibt noch die erste der in Art. 193 aufgeworfenen Fragen zu entscheiden. Zu diesem Zwecke müssen wir folgenden Satz[2]) heranziehen:

Ist ein Kreis in der Ebene der komplexen Veränderlichen x und ein zweiter Kreis in der Ebene der komplexen Veränderlichen x' gegeben, so ist es stets möglich, eine lineare (ganze oder gebrochene) Substitution zu finden, welche den ersten Kreis in den zweiten und das Innengebiet des einen in das Innengebiet des andern transformiert.

Einer der beiden Kreise, ja sogar beide zugleich, können im besondern einen unendlichen Radius haben, d. h. in gerade Linien übergehen.

Es seien demnach n Kreise $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ gegeben, welche zu je zwei keinen gemeinschaftlichen Teil haben mögen; mit C_0 werde der Teil der Ebene bezeichnet, der außerhalb aller dieser Kreise liegt. Sind außerdem nach Belieben $n+1$ arithmetische Ausdrücke $F_0(x)$, $F_1(x), \cdots, F_n(x)$ von der Art gegeben, daß $F_r(x)\,(r = 0, 1, \cdots, n)$ in dem Bereiche C_r gleichmäßig konvergent ist, so lassen sich $n+1$

1) Die Reihe $K(x)$ wurde 1881 Weierstraß von J. Tannery mitgeteilt (s. Weierstraß 517). Die Reihe $H(x)$ war schon 1876 von E. Schröder untersucht worden (Weierstraß ebenda). S. auch Pringsheim 410. Es gibt noch frühere Beispiele, die allerdings anders gebildet sind, bei: Seidel, J. r. u. ang. Math 73 (1871) 297 und Schlömilch, Arch. Math Phys. 10 (1847) 45.

2) Wegen des Beweises s. G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1882, S. 61 ff.

analytische Funktionen $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x)$ von der Beschaffenheit finden, daß:

$$f_r(x) \qquad (r = 0, 1, \cdots, n)$$

den Ausdruck $F_r(x)$ in dem Bereiche C_r darstellt; es lassen sich ferner r lineare Substitutionen derart bestimmen, daß:

$$x' = \frac{a_r x + b_r}{c_r x + d_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

den Kreis C_r in den in der Ebene x' liegenden Kreis mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt und das Innengebiet des ersten in das des zweiten transformiert. Dann hat der arithmetische Ausdruck:

$$K\left(\frac{a_r x + b_r}{c_r x + d_r}\right) \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

innerhalb des Kreises C_r den Wert $+1$, außerhalb desselben aber den Wert -1; der arithmetische Ausdruck:

$$F_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \left[1 + K\left(\frac{a_r x + b_r}{c_r x + d_r}\right)\right] [F_r(x) - F_0(x)]$$

ist im Bereiche $C_r (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$ gleich $F_r(x)$ und wird folglich daselbst durch die analytische Funktion $f_r(x)$ dargestellt.

Es läßt sich also stets ein arithmetischer Ausdruck bilden, der in getrennten Teilen seines Konvergenzbereichs durch willkürlich gewählte analytische Funktionen dargestellt wird. Zwischen den analytischen Funktionen, welche einen und denselben arithmetischen Ausdruck in getrennten Teilen seines Konvergenzbereichs darstellen, besteht demnach keine notwendige Beziehung.

199. Zu analogen Ergebnissen gelangt man, wenn man eine weit weniger geläufige Form arithmetischer Ausdrücke, nämlich die aus rationalen Funktionen gebildeten Kettenbrüche in Betracht zieht[1]).

Betrachten wir den Kettenbruch:

$$\alpha = p + q - \cfrac{pq}{p + q - \cfrac{pq}{p + q - \cdots}}. \tag{1}$$

---

1) Lerch 254.

Er konvergiert, welches auch die Größen p, q sind, vorausgesetzt nur, daß ihre absoluten Beträge verschieden sind. Bezeichnen wir nämlich mit α_n den n-ten Näherungsbruch, so haben wir:

$$\alpha_n = p + q - \frac{pq}{\alpha_{n-1}};$$

daraus ergibt sich:

$$\alpha_n - p = \frac{q}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1} - p),$$

$$\alpha_n - q = \frac{p}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1} - q);$$

folglich ist:

$$\frac{\alpha_n - p}{\alpha_n - q} = \frac{q}{p}\,\frac{\alpha_{n-1} - p}{\alpha_{n-1} - q}.$$

Beachtet man, daß $\alpha_1 = p + q$, so folgt daraus:

$$\frac{\alpha_n - p}{\alpha_n - q} = \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Wächst n über alle Grenzen, so nähert sich die rechte Seite der Null oder dem Unendlichen, je nachdem $|p| > |q|$ oder $|p| < |q|$ ist. Im ersten Falle hat man demnach:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n = p,$$

im zweiten:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n = q.$$

Setzt man nun in (1):

$$p = \varphi(x), \qquad q = \psi(x),$$

wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei rationale Funktionen sind, so wird (1) ein arithmetischer Ausdruck:

$$(2) \qquad F(x) = \varphi(x) + \psi(x) - \cfrac{\varphi(x)\,\psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) - \cfrac{\varphi(x)\,\psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) - \cdots}}.$$

Die Gleichung:

$$(3) \qquad |\varphi(x)| = |\psi(x)|$$

stellt eine Kurve oder ein System von Kurven[1]) dar, welche die

1) Es sei $\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, $\psi(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}$, wo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ Polynome bedeuten; die Brüche selbst werden als irreduzibel vorausgesetzt.

Ebene in zwei oder mehrere getrennte Bereiche teilen; in einigen von diesen ist $|\varphi(x)| > |\psi(x)|$, während in den übrigen $|\varphi(x)| < |\psi(x)|$ ist. Wir wollen die ersteren mit C, die letzteren mit D bezeichnen. In den Bereichen C hat man $F(x) = \varphi(x)$, in den Bereichen D dagegen $F(x) = \psi(x)$.

Setzen wir z. B.:

$$\varphi(x) = x - 1, \quad \psi(x) = x + 1,$$

so stellt die Gleichung (3) den Ort der von den Punkten $+1$ und -1 gleich weit entfernten Punkte, d. h. die imaginäre Achse dar. Das Gebiet C ist die Menge der Punkte, welche von $+1$ weiter entfernt sind als von -1, d. h. der Teil der Ebene, der links von der imaginären Achse liegt; das Gebiet D ist der Teil rechts von ihr. Durch den arithmetischen Ausdruck:

$$F(x) = 2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \cdots}}$$

wird also auf der linken Seite der imaginären Achse $x - 1$, auf der rechten $x + 1$ dargestellt.

Nehmen wir dagegen:

$$\varphi(x) = x^2 - 1, \quad \psi(x) = a^2,$$

wo a eine reelle Konstante ist, so stellt (3) eine Cassinische Kurve dar, deren Brennpunkte die Punkte ± 1 sind. Innerhalb der Kurve hat man $|x^2 - 1| < a^2$, außerhalb $|x^2 - 1| > a^2$; folglich wird durch den arithmetischen Ausdruck:

$$F(x) = x^2 - 1 + a^2 - \cfrac{a^2(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + a^2 - \cfrac{a^2(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + a^2 - \cdots}}$$

innerhalb der Kurve a^2, außerhalb $x^2 - 1$ dargestellt.

Die Formel (3) lautet dann nach Beseitigung der Nenner:

$$(\alpha) \qquad |\varphi_1(x)\,\psi_2(x)| = |\varphi_2(x)\,\psi_1(x)|.$$

Setzen wir wie immer $x = u + iv$ und trennen in den auf beiden Seiten auftretenden Produkten die reellen und imaginären Bestandteile:

$$\varphi_1(x)\,\psi_2(x) = \mu(u, v) + i\nu(u, v), \qquad \varphi_2(x)\,\psi_1(x) = \varrho(u, v) + i\sigma(u, v),$$

so geht (α) in:

$$\mu^2(u, v) + \nu^2(u, v) - \varrho^2(u, v) - \sigma^2(u, v) = 0$$

über; dies ist die Gleichung der Kurven in kartesischen Koordinaten.

Allgemeine Bemerkungen über die systematische Behandlung der analytischen Funktionen.

Grundeigenschaften der ganzen transzendenten Funktionen.

200. Das für die rationalen Funktionen gewonnene Ergebnis (Art. 187, 189, 190), daß sie die einzigen eindeutigen Funktionen sind, die nur polare Singularitäten haben, zeigt uns, welchen Einfluß Natur und Anzahl der singulären Punkte einer Funktion auf ihre analytische Form ausüben; dies veranlaßt uns, Natur und Anzahl ihrer Singularitäten zur Grundlage einer systematischen Einteilung der eindeutigen analytischen Funktionen zu machen. Eine solche Klassifikation ließe sich in folgende Übersicht zusammenfassen:

A) Funktionen ohne Singularität.
B) Funktionen, die nur Pole besitzen:
  1. Funktionen mit nur einem Pole:
    a) im Unendlichen;
    b) in endlicher Entfernung.
  2. Funktionen mit einer endlichen Anzahl von Polen.
  3. Funktionen mit unendlich vielen Polen.
C) Funktionen mit wesentlichen Singularitäten:
  1. Funktionen mit nur einem singulären Punkte:
    a) im Unendlichen;
    b) in endlicher Entfernung.
  2. Funktionen mit einer endlichen Anzahl von singulären Punkten.
  3. Funktionen mit unendlich vielen singulären Punkten:
    a) Funktionen mit unendlich vielen Polen und einem wesentlich singulären Punkte;
    b) Funktionen mit unendlich vielen Polen und einer endlichen Anzahl wesentlich singulärer Punkte;
    c) Funktionen mit unendlich vielen beliebigen singulären Punkten.

Die Funktionen A reduzieren sich auf Konstanten (Art. 170). Die Funktionen B1a sind die ganzen rationalen Funktionen (Polynome); die Funktionen B1b sind die Funktionen von der Form $f\left(\frac{1}{x-c}\right)$, wo f ein Polynom bezeichnet und c der Pol ist; die Funktionen B2 sind die gebrochenen rationalen Funktionen; Funktionen der Art B3 gibt es nicht (vgl. Art. 190). Die systematische Behandlung der analytischen Funktionen, die wir hier uns vornehmen, ist demnach,

sozusagen unbewußt, bereits auf den vorangehenden Seiten ins Werk gesetzt worden, und wir müssen sie daher an dem Punkte wieder aufnehmen, an dem sie unterbrochen wurde, indem wir damit beginnen, die Funktionen C zu betrachten, und zwar unter ihnen die Funktionen C 1a, also Funktionen, die einen einzigen wesentlich singulären Punkt im Unendlichen besitzen.

Diese Funktionen bieten sich uns als nächstliegende Verallgemeinerung der ganzen rationalen Funktionen dar, da sie sich ja auf solche Funktionen reduzieren, wenn ihre Singularität eine polare wird; es bildet aber auch andrerseits ihre allgemeine analytische Form die nächste Verallgemeinerung der Polynome, da sie sich (vgl. den folgenden Art.) in der ganzen Ebene durch eine beständig konvergente Potenzreihe darstellen lassen: was von dem zwischen der analytischen Form und den Singularitäten einer Funktion stattfindenden Zusammenhange noch einmal zeugt.

Die Funktionen, die einen einzigen wesentlich singulären Punkt im Unendlichen haben, werden holomorphe oder ganze transzendente Funktionen genannt. Als ganze Funktion schlechtweg werden wir eine ganze rationale oder transzendente Funktion bezeichnen.

201. Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion, $\mathfrak{P}(x)$ das dem Anfangspunkt entsprechende Element derselben. Die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ hat (vgl. Art. 170) einen unendlichen Konvergenzradius, folglich stellt sie die Funktion $f(x)$ in der ganzen Ebene dar. Es gilt also der Satz:

Eine ganze Funktion wird in der ganzen Ebene durch eine einzige, beständig konvergente Potenzreihe dargestellt.

Reduziert sich die Potenzreihe auf eine endliche Anzahl von Gliedern, so wird die Funktion eine ganze rationale Funktion (ein Polynom), und der unendlich ferne Punkt ein Pol, und umgekehrt.

Summe und Produkt mehrerer ganzer Funktionen sind ganze Funktionen.

Die Ableitung und das Integral einer ganzen Funktion sind ganze Funktionen (Art. 133, 165).

202. Aus dem in Art. 170 geführten Beweise ergibt sich: Der absolute Betrag einer ganzen Funktion wächst unbegrenzt, wenn der absolute Betrag der Veränderlichen unbegrenzt wächst. Genauer: Sind zwei reelle und positive Werte ϱ, s gegeben, so läßt sich stets ein Wert x von größerem absolutem Betrage als ϱ finden der Art, daß für ihn der absolute Betrag der Funktion $> s$ ist.

Man kann hinzufügen, daß ebenso der reelle wie der imaginäre Bestandteil einer ganzen Funktion seinem absoluten Werte nach unbegrenzt wächst, wenn x unbegrenzt wächst. Das ergibt sich, indem man die Schlußweise des eben angeführten Artikels, von den Formeln (1), (2) des Art. 129 ausgehend, wiederholt.

203. Die große Analogie, die zwischen den ganzen rationalen und den ganzen transzendenten Funktionen besteht, erweckt den Gedanken, zu untersuchen, welche von den Grundeigenschaften jener auch für diese Geltung haben.

Es gibt im wesentlichen zwei (Art. 188) Grundeigenschaften der ganzen rationalen Funktionen, von denen die zweite eine Folge der ersten ist:

a) das Vorhandensein einer Nullstelle (Gaußscher Satz);

b) die Zerlegbarkeit in lineare Faktoren und die daraus folgende Möglichkeit, eine ganze rationale Funktion zu bilden, deren Nullstellen gegeben sind.

Was den Gaußschen Satz betrifft, so kann man sich leicht durch ein Beispiel vergewissern, daß er für ganze transzendente Funktionen nicht immer gilt. Die Funktion e^x (Art. 142), die durch eine in der ganzen Ebene konvergente Reihe dargestellt wird, wird niemals Null. In der Tat kann sie für keinen reellen und positiven Wert von x verschwinden, wie aus der Form ihrer Entwicklung erhellt; wäre sie aber für $x = x_1$ Null, so würde sie auch, da:

$$e^{x_1} e^{x - x_1} = e^x$$

und $e^{x - x_1}$ endlich ist, von selbst für jeden beliebigen Wert von x verschwinden, was nach dem soeben Gesagten unmöglich ist.

Daraus entspringt von selbst die Frage, welches die allgemeinste Form der ganzen transzendenten Funktionen ohne Nullstellen ist.

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion, die keine Nullstelle besitze. Ihre reziproke Funktion $\frac{1}{f(x)}$ hat keinen Pol (Art. 172), und da sie keine im Endlichen liegenden wesentlich singulären Punkte haben kann, weil diese zugleich für $f(x)$ wesentliche Singularitäten bilden würden, so ist $\frac{1}{f(x)}$ eine ganze Funktion. Da (Art. 201) auch $f'(x)$ ganz ist, so ist es auch (ebenda) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sowie (ebenda) das Integral dieses Bruches; d. h., wenn man:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)$$

setzt, so ist $g(x)$ eine ganze Funktion. Setzen wir dann:

$$e^{g(x)} = h(x),$$

so läßt sich $h(x)$ (vgl. Art. 143) in eine in der ganzen Ebene konvergente Potenzreihe transformieren, ist also eine ganze transzendente Funktion. Demnach hat man (ebenda):

$$h'(x) = h(x) g'(x),$$

folglich:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)},$$

oder:

$$f(x) h'(x) - h(x) f'(x) = 0.$$

Multiplizieren wir mit der ganzen Funktion $\frac{1}{f^2(x)}$, so erhalten wir:

$$\frac{f(x) h'(x) - h(x) f'(x)}{f^2(x)} = 0.$$

Nun ist (Art. 168) die linke Seite die Ableitung von $\frac{h(x)}{f(x)}$, woraus folgt (Art. 136), daß sich dieser Bruch auf eine Konstante reduziert:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = C.$$

Man hat mithin:

$$f(x) = \frac{1}{C} h(x) = \frac{1}{C} e^{g(x)},$$

oder auch, indem man den Faktor $\frac{1}{C}$ wegläßt und $g(x)$ durch eine andre Funktion $G(x)$ ersetzt, die sich von ihr nur um eine additive Konstante unterscheidet:

$$f(x) = e^{G(x)} \text{ [1]}.$$

D. h.: Jede ganze Funktion, die keine Nullstellen besitzt, ist eine Exponentialfunktion, deren Exponent eine ganze Funktion ist.

---

1) Das dargelegte Verfahren findet ohne irgendwelche Änderung auf eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ Anwendung, die in einem Kreise C um den Anfangspunkt konvergent ist, aber innerhalb desselben keine Nullstellen besitzt. Setzt man $\frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)} = \mathfrak{Q}'(x)$, so ist auch $\mathfrak{Q}'(x)$, folglich auch $\mathfrak{Q}(x)$ innerhalb C konvergent, und man hat für jeden inneren Punkt von C bis auf einen konstanten Faktor:

$$\mathfrak{P}(x) = e^{\mathfrak{Q}(x)}.$$

204. Nachdem wir das Vorhandensein und den allgemeinsten Ausdruck ganzer transzendenter Funktionen ohne Nullstellen festgestellt haben, müssen wir diejenigen untersuchen, welche Nullstellen besitzen, und prüfen, ob und inwieweit die Kenntnis der Nullstellen einer Funktion gestattet, ihre analytische Form anzugeben.

Eine ganze rationale Funktion, deren Nullstellen gegeben sind, ist bekanntlich bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Betreffs der ganzen transzendenten Funktionen können wir vorläufig nur sagen, daß die Unbestimmtheit eine weit größere ist, da ja alle ganzen Funktionen, die sich durch einen Exponentialfaktor (so wollen wir einen Ausdruck von der Form $e^{g(x)}$ nennen, in welchem $g(x)$ eine ganze Funktion ist) unterscheiden, dieselben Nullstellen haben. Wir werden aber auch sehen, daß sich die Unbestimmtheit hierauf beschränkt, daß also eine ganze Funktion, deren Nullstellen gegeben sind, bis auf höchstens einen Exponentialfaktor bestimmt ist.

205. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, in welchem die Anzahl der Nullstellen endlich ist. Seien diese $c_1, c_2, \ldots, c_n$, und es möge in dieser Reihe jede so oft vorkommen, als ihre Ordnung beträgt, so daß die c nicht notwendig sämtlich verschieden sind.

Ist $f(x)$ die gesuchte Funktion, und setzt man:

$$\varphi(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

so ist der Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Zunächst nämlich ist $f(x)$ in einer von den Punkten $c_1, c_2, \ldots$ verschiedenen Stelle d verschieden von Null, und $\frac{1}{\varphi(x)}$ ist regulär und verschieden von Null, so daß auch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ regulär und von Null verschieden ist. Es sei nun c_1 eine Nullstelle r-ter Ordnung, so daß $c_1 = c_2 = \cdots = c_r$; dann hat man:

$$\varphi(x) = (x - c_1)^r (x - c_{r+1})(x - c_{r+2}) \cdots (x - c_n) = (x - c_1)^r \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ ein Polynom ist, das in c_1 nicht verschwindet; außerdem ist in der Umgebung von c_1 (Art. 172):

$$f(x) = (x - c_1)^r \mathfrak{P}(x - c_1),$$

wo $\mathfrak{P}(x - c_1)$ eine in der ganzen Ebene konvergente Potenzreihe von $x - c_1$ ist, die im Punkte c_1 nicht Null wird. Daraus folgt:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathfrak{P}(x - c_1) \frac{1}{\psi(x)};$$

die rechte Seite ist regulär und wird im Punkte c_1 nicht Null. Analog verhält es sich mit den übrigen Punkten c.

Man hat daher (Art. 203):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = e^{g(x)},$$

wo $g(x)$ eine ganze, aber sonst beliebige Funktion bezeichnet, und folglich:

$$f(x) = e^{g(x)}\varphi(x) = e^{g(x)}(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

oder auch, indem man $g(x)$ um eine additive Konstante ändert:

$$f(x) = e^{g(x)}\left(1 - \frac{x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{x}{c_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{c_n}\right)^{1)}.$$

206. Die ganze Funktion $f(x)$ habe jetzt unendlich viele Nullstellen. Diese werden eine isolierte (Art. 159), folglich abzählbare (Art. 50) Menge bilden, die als einzigen Grenzpunkt den unendlich fernen Punkt (Art. 159) besitzt, und deshalb wird jeder endliche Bereich nur eine endliche Anzahl von ihnen enthalten (Art. 5). Wir können daher die Nullstellen folgendermaßen in eine einfache Reihe ordnen: Wir greifen eine Folge von positiven, unbegrenzt wachsenden Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ heraus. Es wird eine endliche Anzahl von Nullstellen von einem absoluten Betrag $\leqq \varrho_1$ geben; wir ordnen sie nach zunehmenden absoluten Beträgen, indem wir die gegenseitige Anordnung derer, die gleichen absoluten Betrag haben, willkürlich festsetzen. Diese Nullstellen nennen wir $c_1, c_2, \ldots, c_{r_1}$. Es wird dann weiterhin eine endliche Anzahl von Nullstellen von einem absoluten Betrage $> \varrho_1$ und $\leqq \varrho_2$ geben: wir ordnen sie wie die vorigen und wollen sie mit $c_{r_1+1}, c_{r_1+2}, \ldots, c_{r_2}$ bezeichnen usf. Die auf diese Weise geordneten Nullstellen:

$$c_1, c_2, \ldots,$$

wobei wir annehmen wollen, daß jede Nullstelle so oft wiederholt wird, als ihre Ordnung beträgt, genügen den Bedingungen:

$$|c_1| \leqq |c_2| \leqq \cdots; \lim_{h=\infty} |c_h| = \infty.$$

1) Der Faktor $e^{g(x)}$ spielt hier dieselbe Rolle wie ein unbestimmter konstanter Faktor in dem allgemeinen Ausdruck einer ganzen rationalen Funktion, deren Nullstellen gegeben sind.

207. Wir fragen uns nach dieser Vorbemerkung: Ist es möglich, auch in dem vorliegenden Falle die in Art. 205 entwickelte Methode zu befolgen?

Wenn dies der Fall wäre, so würde die Lösung unserer Aufgabe durch folgende Formel gegeben sein:

$$(1) \qquad f(x) = e^{g(x)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

Allein es erhebt sich sogleich eine ernstliche Schwierigkeit: Das unendliche Produkt auf der rechten Seite ist im allgemeinen nicht konvergent.

Das Mittel, diese Schwierigkeit zu heben, wurde Weierstraß[1] durch die Untersuchung einer besonderen ganzen Funktion, der reziproken Funktion des Eulerschen Integrals zweiter Art, an die Hand gegeben. Die Betrachtung der Gaußschen Formel[2]:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{h}\right) \left(\frac{h}{h+1}\right)^{x} = x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{h}\right) e^{-x \lg \frac{h-1}{h}}$$

führte ihn zu der Bemerkung, daß das unendliche Produkt:

$$\prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right),$$

das anscheinend die Funktion würde darstellen können, da jeder seiner Faktoren an einer ihrer Nullstellen verschwindet, allerdings unbrauchbar ist, weil es für alle Werte von x divergiert, daß es aber dennoch in ein für alle Werte von x konvergentes Produkt dadurch umgeformt werden kann, daß man jeden Faktor mit einer Exponentialgröße multipliziert, die eine lineare Funktion zum Exponenten hat. Dadurch wurde Weierstraß veranlaßt sich zu fragen, ob das in (1) auftretende unendliche Produkt, das im allgemeinen nicht konvergent ist, nicht in allen Fällen konvergent gemacht werden könne, indem man seine Faktoren mit zweckmäßig gewählten Exponentialgrößen multipliziert; und es glückte ihm zu beweisen[3], daß dies in Wirklichkeit stets möglich ist.

---

1) Über die Theorie der analytischen Facultäten, Journ. für die reine und angew. Math., Bd. 51, S 1—60 (1856); Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, S. 183—260; Werke, Bd. I, S. 153—221.

2) Gauß, Werke, Bd. III, S. 146 (1812).

3) Weierstraß 518 (1876).

Es muß indessen bemerkt werden, daß 1860 Betti[1]) in zwei besonderen, sehr wichtigen Fällen, von denen wir weiter unten (Art. 211, 212) Beispiele entwickeln werden[2]), zu demselben Ergebnis gelangt war, und daß sich, wie Dini[3]) gezeigt hat, die von ihm befolgte Methode ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausdehnen läßt.

208. Das im vorigen Art. angedeutete fundamentale Ergebnis läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Ist eine abzählbare Menge von Punkten $c_1, c_2, \ldots$ gegeben, denen der Anfangspunkt nicht angehört und die nicht sämtlich voneinander verschieden zu sein brauchen, und zwar von der Art, daß:

$$|c_1| \leqq |c_2| \leqq \cdots, \lim_{h=\infty} |c_h| = \infty,$$

so läßt sich auf unendlich viele Weisen eine Folge ganzer, positiver, nicht abnehmender Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ finden, so daß:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \left|\frac{x}{c_h}\right|^{r_h+1}$$

für jeden endlichen Wert von x konvergiert; und die allgemeinste ganze Funktion, welche in den Punkten $c_1, c_2, \ldots$

1) Betti 32.

2) Die beiden von Betti in Betracht gezogenen Fälle sind:

Erstens derjenige, in welchem die Nullpunkte sämtlich auf einer Geraden liegen, ihre gegenseitigen Entfernungen aber nicht unter eine endliche, bestimmte Größe hinabsinken; in diesem Falle ist der Rang (siehe Art. 209) $\leqq 1$;

Zweitens derjenige, in welchem die Nullpunkte willkürlich in der Ebene liegen, ihre gegenseitigen Entfernungen aber nicht unter eine endliche, bestimmte Größe hinabsinken; in diesem Falle ist der Rang $\leqq 2$.

Dem ersten Typus gehört die Funktion $\sin x$, dem zweiten die Funktion σx an.

Cauchy ist hier nicht anzuführen, weil er die Eulerschen Formeln:

$$(\alpha) \qquad \sin x = u\left(1-\frac{u}{\pi}\right)\left(1+\frac{u}{\pi}\right)\left(1-\frac{u}{2\pi}\right)\left(1+\frac{u}{2\pi}\right)\cdots,$$

$$\sin x = u\left(1-\frac{u^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{u^2}{4\pi}\right)\cdots$$

(wo das erste Produkt bedingt konvergiert) nur auf einem anderen Wege abgeleitet hat.

Das Eigentümliche an der Bettischen Entwicklung ist:

Erstens, daß er durch Einführung der Exponentialfaktoren das Produkt (α) in ein unbedingt konvergierendes Produkt verwandelt;

Zweitens, daß er die Sinusformel als besonderen Fall eines weit allgemeineren Funktionentypus erhält.

3) Dini 138.

verschwindet und sonst nur eine Nullstelle m-ter Ordnung im Anfangspunkte hat, ist durch folgende Formel gegeben:

$$(2) \qquad f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

wo $g(x)$ eine beliebige ganze Funktion ist (**Satz von Weierstraß**).

Wählt man $r_h = h - 1$, so wird aus der Reihe (1):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left|\frac{x}{c_h}\right|^h;$$

und diese ist konvergent, weil sich für ein beliebiges x die h-te Wurzel aus ihrem h-ten Gliede der Null nähert, wenn h über alle Grenzen wächst. Die Folge der Konvergenzzahlen r_h kann ferner auf unendlich viele Arten verändert werden, sei es, daß man irgendwie den Wert einer endlichen Anzahl ihrer Elemente ändert, sei es, daß man den Wert einer endlichen oder unendlichen Anzahl von ihnen erhöht.

Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir die ganze Funktion:

$$\mathfrak{P}(x) = 1 - x,$$

die innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt keine Nullstellen besitzt. Es ist:

$$\mathfrak{P}'(x) = -1,$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)} = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1},$$

und daraus ergibt sich (Art. 203, Anm.) für $|x| < 1$ bis auf einen konstanten Faktor, der sich sofort der Einheit gleich erweist:

$$(3) \qquad 1 - x = \mathfrak{P}(x) = e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}.$$

Setzen wir dann:

$$(4) \qquad E_h(x) = \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

so erhalten wir aus (3) für $|x| < |c_h|$:

$$E_h(x) = e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}} e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}} = e^{-\sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}}.$$

Betrachten wir nun die Doppelsumme:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty}\sum_{k=r_h+1}^{\infty}\frac{x^k}{k c_h^k},$$

wo n eine beliebige Zahl ist.

Für $\frac{x}{c_h} < \lambda < 1$ hat man:

$$\sum_{k=r_h+1}^{\infty}\left(\frac{x}{c_h}\right)^k = \frac{\left(\frac{x}{c_h}\right)^{r_h+1}}{1-\frac{x}{c_h}} < \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{x}{c_h}\right)^{r_h+1},$$

folglich um so mehr:

$$\sum_{k=r_h+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{c_h}\right)^k < \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{x}{c_h}\right)^{r_h+1},$$

also für $\frac{x}{c_{n+1}} < \lambda < 1$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty}\sum_{k=r_h+1}^{\infty}\frac{x^k}{k c_h^k} < \frac{1}{1-\lambda}\sum_{h=n+1}^{\infty}\left(\frac{x}{c_h}\right)^{r_h+1},$$

und hieraus ergibt sich:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty}\sum_{k=r_h+1}^{\infty}\frac{x^k}{k c_h^k} < \frac{1}{1-\lambda}\sum_{h=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{c_h}\right|^{r_h+1}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert für jeden endlichen Wert von x und ist daher in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig konvergent; dasselbe folgt also von der links auftretenden Reihe von Potenzreihen, die sich deshalb (Art. 132) in eine für $|x| < |c_{n+1}|$ konvergente Potenzreihe transformieren läßt. Bezeichnen wir diese Potenzreihe mit $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$, so haben wir:

$$(5)\qquad \prod_{h=n+1}^{\infty} E_h(x) = e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)}$$

und folglich:

$$(6)\qquad e^{-\mathfrak{P}_1(x)} = e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)}\prod_{h=1}^{n} E_h(x).$$

Nun sind die Funktionen $E_h(x)$, wie aus (4) hervorgeht, ganze Funktionen, und $e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)}$ ist, wie $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$, für $|x| < |c_{n+1}|$ kon-

vergent; daraus folgt, daß $e^{-\mathfrak{P}_h(x)}$ konvergent ist für $x < c_{h+1}$. Es läßt sich aber nach Wahl eines beliebigen Wertes von x stets eine Zahl n von der Art finden, daß:

$$x < c_{n+1}$$

ist; daraus folgt, daß $e^{-\mathfrak{P}_1(x)}$ eine ganze Funktion ist. Sie hat für $x < c_{n+1}$ keine andern Nullstellen als die Punkte $c_1, c_2, \cdots, c_n$; das ergibt sich aus (6), wenn man beachtet, daß $E_h(x)$ in dem einzigen Punkte c_h verschwindet und daß $e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)}$ für $x < c_{n+1}$ niemals Null wird. Daraus folgt, daß die ganze Funktion in den Punkten $c_1, c_2, \cdots$ und nur in diesen Punkten verschwindet. Will man eine Funktion bilden, die außerdem im Anfangspunkte eine Nullstelle m-ter Ordnung besitzt, so muß man mit x^m multiplizieren; will man endlich die allgemeinste Funktion mit den vorgegebenen Nullstellen haben, so muß (Art. 204) ein Exponentialfaktor hinzugefügt werden. Mit Rücksicht darauf, daß (s. Gl. (5)):

$$\prod_{h=1}^{\infty} E_h(x) = e^{-\mathfrak{P}_1(x)}$$

ist, hat man daher schließlich für die gesuchte Funktion:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} E_h(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}};$$

das ist aber die Gleichung (2).

Die Faktoren $E_h(x)$ werden **Primfaktoren** genannt.

209. Die Nullstellen $c_1, c_2, \cdots$ einer ganzen Funktion können so beschaffen sein, daß es, um die Reihe (1) des Art. 208 konvergent zu machen, unnötig ist, unbegrenzt wachsende Zahlen als Konvergenzzahlen anzunehmen; das geschieht stets und nur dann, wenn es eine ganze nicht negative Zahl p gibt, für welche $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \left|\frac{x}{c_h}\right|^{p+1}$, oder auch $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^{p+1}}$, konvergiert. In diesem Falle nennen wir die kleinste Zahl p, welche der angegebenen Bedingung genügt, den **Rang**[1]) der

1) Höhe (v. Schaper, Pringsheim) = genre (Laguerre, Poincaré Borel). — Einfache Funktionen = primitive Funktionen (Pringsheim) = fonctions canoniques (Lindelöf). — Funktionen von endlicher

Funktion, und die Funktion selbst heißt eine Funktion erster Klasse, während sie zweiter Klasse heißt, wenn es keine Zahl von der erwähnten Eigenschaft gibt.

Eine Funktion erster Klasse vom Range p hat die Form:

$$(1) \qquad f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}}.$$

Der Faktor $e^{g(x)}$ heißt der äußere Exponentialfaktor. Fehlt er, so heißt die Funktion einfach. Ist $g(x)$ ein Polynom vom Grade q, so bezeichnet man als Höhe der Funktion die größere der beiden Zahlen p, q. Ist $q \leqq p$, so heißt die Funktion normal.

Einer normalen Funktion von der Höhe p kann man stets den Anschein einer normalen Funktion von größerer Höhe als p geben. Nimmt man nämlich an, daß in (1) $g(x)$ ein Polynom von nicht höherem Grade als p ist, so kann man schreiben:

$$f(x) = e^{g(x) - \sum\limits_{h=1}^{\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{p+r} \frac{x^k}{k c_h^k}} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p+r} \frac{x^k}{k c_h^k}}$$

$$= e^{g(x) - \sum\limits_{k=p+1}^{p+r} \left[\frac{x^k}{k} \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^k}\right]} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p+r} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

wo der äußere Exponent ein Polynom vom Grade $p + r$ ist.

210. Bevor wir die gefundene Grundformel auf einige besondere Fälle anwenden, wollen wir aus derselben noch einige andre ableiten, die uns im folgenden von Nutzen sein werden.

Setzt man:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{\infty} E_h(x),$$

so läßt sich für ein beliebiges n schreiben:

Höhe = Hadamardsche Funktionen (v. Schaper). — Puzyna (421) bezeichnet als Rang einer Funktion $f(x)$ die kleinste ganze Zahl t, welche der Bedingung:

$$\lim_{x=0} \frac{f'(x)}{x^{t+1} f'(x)} = \infty$$

genügt.

(1)
$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{n} E_h(x) \cdot e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)},$$

wo $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$ (Art. 208) die Potenzreihe ist, die durch Anwendung des Weierstraßschen Hilfssatzes auf die Doppelsumme:

(2)
$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}$$

hervorgeht.

Es sei nun:

$$\mathfrak{P}_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \frac{x^k}{k}\ [1].$$

Wiederholen wir für die Doppelreihe:

(3)
$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{c_h^k}$$

das auf (2) angewendete Verfahren, so sehen wir, daß der Weierstraßsche Hilfssatz auch auf sie anwendbar ist, und daß weiterhin ihr Ausdruck durch Potenzreihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} x^{k-1}$$

oder $\mathfrak{P}'_{n+1}(x)$ ist. Nun ist die Doppelreihe (3) nichts anderes als $-\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)}$; man hat somit:

(4)
$$-\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)} = \mathfrak{P}'_{n+1}(x).$$

Andrerseits folgt aus (1) (Art. 167, 169):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)} - \mathfrak{P}'_{n+1}(x),$$

mithin wegen (4):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)}.$$

---

1) Freilich ist $r_h + 1$ der kleinste Wert von k; aber wir dürfen als kleinsten Wert einfach $k = 1$ schreiben, sobald wir nicht ausschließen, daß einige der A_{nk} Null sein können.

In unserem Falle hat demnach die Ableitung denselben Ausdruck, wie wenn die Zahl der Faktoren endlich wäre.

Es ist ferner:

$$(5)\qquad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=r_l+1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{c_l^k} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{r_l}}{c_l^{r_l}(x-c_l)}.$$

Durch wiederholte Anwendung des Weierstraßschen Hilfssatzes läßt sich leicht nachweisen, daß der vorstehende Ausdruck so oft gliedweise differentiiert werden kann als man will.

211. Wir wollen jetzt eine erste Anwendung der Weierstraßschen Darstellung der ganzen Funktionen machen, indem wir die Entwicklung der Funktion $\sin x$ in ein unendliches Produkt aufstellen, eine Entwicklung, die man Euler[1] verdankt, der sie allerdings mittels einer nicht vollkommen strengen Methode erhielt.

Die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, wo x eine reelle Größe bezeichnet, lassen sich bekanntlich[2] durch die folgenden für alle endlichen Werte von x konvergierenden Reihen ausdrücken:

$$(1)\qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!},$$

$$(2)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\frac{x^{2h}}{(2h)!}.$$

Die Fundamentaleigenschaften der Funktion $\sin x$ sind die folgenden:

a) Sie ist eine ungerade Funktion:

$$(3)\qquad \sin(-x) = -\sin x;$$

b) Sie verschwindet für $x = k\pi$, wenn k eine beliebige ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet:

$$(4)\qquad \sin k\pi = 0;$$

c) Sie ist periodisch und zwar mit der Periode 2π:

$$(5)\qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

---

1) Introductio in analysin infinitorum, T. I, § 158.
2) S. z. B. Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 268.

Dagegen ist $\cos x$ eine gerade Funktion; sie verschwindet für $x = (k + \frac{1}{2})\pi$:

$$(6) \qquad \cos(k + \tfrac{1}{2})\pi = 0$$

und hat gleichfalls die Periode 2π.

Ferner ist:

$$(7) \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Bedeutet nun x eine komplexe Variable, so werden wir die Reihen (1), (2), die auch für jeden komplexen Wert von x absolut konvergent sind, als Definition zweier ganzer Funktionen annehmen, die gleichfalls mit $\sin x$, $\cos x$ bezeichnet werden mögen.

Aus der Betrachtung der beiden Reihen und ihrer Vergleichung untereinander und mit derjenigen, die e^x darstellt, ergibt sich unmittelbar:

daß $\cos x$ die Ableitung von $\sin x$ ist;

daß $-\sin x$ die Ableitung von $\cos x$ ist;

daß für ein reelles x auch $\sin x$ und $\cos x$ reell sind, für ein rein imaginäres x aber $\sin x$ rein imaginär, $\cos x$ dagegen reell ist;

daß:

$$(8) \qquad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x. \quad \textbf{(Eulersche Formel)}.$$

Daraus folgt (Art. 142):

$$\cos(x \pm y) + i \sin(x \pm y) = e^{i(x \pm y)}$$

$$= e^{ix} e^{\pm iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y \pm i \sin y)$$

$$= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y + i(\sin x \cos y \pm \cos x \sin y)$$

und analog:

$$\cos(x \pm y) - i \sin(x \pm y) =$$

$$= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y - i(\sin x \cos y \pm \cos x \sin y);$$

daraus ergibt sich durch Subtraktion und Addition:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \end{cases}$$

Wir nehmen in (9) zunächst das obere Zeichen, ersetzen x durch $-x$ und wählen $y = \frac{\pi}{2}$. Mit Rücksicht auf (6), (7) haben wir dann:

$$(10) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Setzen wir dagegen in der ersten der Formeln (9) $y = \frac{\pi}{2} - x$ und nehmen wir abermals das obere Zeichen, so folgt mit Rücksicht auf (10):

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin^2 x + \cos^2 x$$

oder, wegen (7):

(11) $$1 = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Demnach ergibt sich aus (8) für ein reelles v:

$$|e^{vi}| = 1$$

und folglich für reelle u, v:

(12) $$|e^{u+vi}| = e^u.$$

Die ganze Funktion $\sin x$ besitzt die Eigenschaften a), b), c); es bleibt nur noch zu untersuchen, ob sie für irgend einen komplexen Wert von x verschwindet.

Vor allem kann $\sin x$ für keinen rein imaginären Wert von x Null werden: setzt man nämlich $x = it$, wo t eine reelle Größe bezeichnet, so hat man:

$$\sin it = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h i^{2h+1} \frac{t^{2h+1}}{(2h+1)!} = it \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h}}{(2h+1)!};$$

die letzte Reihe aber hat einen wesentlich positiven Wert. Eine analoge Rechnung zeigt, daß auch $\cos it$ nicht Null sein kann.

Wir nehmen jetzt an, daß:

$$\sin(u + iv) = 0$$

sei, wo u und v reell, v aber $\neq 0$ ist. Nach der ersten der Formeln (9) läßt sich dann schreiben:

$$\sin u \cos iv + \cos u \sin iv = 0;$$

nun sind $\sin u$, $\cos u$ und $\cos iv$ reell, $\sin iv$ aber ist rein imaginär, folglich muß:

$$\sin u \cos iv = 0, \quad \cos u \sin iv = 0$$

sein; daraus folgt, da $\sin iv \neq 0$, $\cos iv \neq 0$ ist:

$$\sin u = \cos u = 0,$$

was mit (11) in Widerspruch steht.

Die Nullstellen der Funktion $\sin x$ sind daher:

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots,$$

und die steigend geordnete Folge der absoluten Beträge der von 0 verschiedenen Wurzeln ist:

$$\pi, \pi, 2\pi, 2\pi, 3\pi, 3\pi, \cdots.$$

Wir untersuchen nun, ob die in Frage stehende Funktion erster Klasse ist, d. h. ob es eine Zahl p von der Art gibt, daß:

$$\frac{1}{\pi^{p+1}} + \frac{1}{\pi^{p+1}} + \frac{1}{(2\pi)^{p+1}} + \frac{1}{(2\pi)^{p+1}} + \cdots$$

konvergiert. Diese Reihe läßt sich auch schreiben:

$$\frac{2}{\pi^{p+1}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}.$$

Nun ist die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}$ für $p=0$ divergent, für $p>0$ konvergent[1]; der kleinste ganze Wert von p, der sie konvergent macht, ist demnach 1; wir können daher sagen, daß $\sin x$ eine ganze Funktion erster Klasse und vom Range Eins ist. Ihr Ausdruck ist also durch folgende Formel gegeben:

$$\sin x = e^{g(x)}\, x \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}}, \tag{13}$$

wo $g(x)$ eine zu bestimmende ganze Funktion ist und der dem Zeichen Π hinzugefügte Strich anzeigt, daß in dem Produkte der $h=0$ entsprechende Faktor fehlen soll. Da das Produkt rechts absolut konvergent ist, so können wir die Faktoren in beliebiger Weise ordnen: im besondern können wir diejenigen paarweise vereinigen und miteinander multiplizieren, die gleichen und entgegengesetzten Werten von h entsprechen. Wir erhalten dann:

$$\sin x = e^{g(x)}\, x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 h^2}\right). \tag{14}$$

Es bleibt nur noch die Funktion $g(x)$ zu bestimmen. Man bilde zu diesem Zwecke aus (13) mittelst (5) des vorigen Artikels:

---

1) Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 120 u. 139.

$$(15)\qquad \frac{\cos x}{\sin x} = g'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{x}{\pi h(x-\pi h)}$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x-\pi h} + \frac{1}{\pi h}\right],$$

wo der Strich dieselbe Bedeutung hat wie vorher; oder auch:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = g'(x) + \frac{1}{x} + \frac{x}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x-\pi h)} + \frac{1}{-h(x+\pi h)}\right]$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + \frac{x}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2\pi h}{h(x^2-\pi^2 h^2)}$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + 2x \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-\pi^2 h^2},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = g'(x) + \frac{1}{x} + x \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{x^2-\pi^2 h^2},$$

oder, indem man das Glied $\frac{1}{x}$ unter das Summenzeichen nimmt und demnach den Strich fortläßt:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = g'(x) + x \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-\pi^2 h^2};$$

daraus ergibt sich:

$$(16)\qquad g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - x \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-\pi^2 h^2}.$$

Bedenkt man, daß $\sin x$ eine ungerade, $\cos x$ eine gerade Funktion ist, so folgt daraus unmittelbar:

$$g'(-x) = -g'(x),$$

folglich $g'(0) = 0$; somit ist $g'(x)$ das Produkt aus x und einer ganzen Funktion $k(x)$:

$$g'(x) = xk(x).$$

Aus (15), (16) gehen also folgende Formeln hervor:

$$(17)\qquad \xi(x) = \frac{\cos x}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} - \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\pi h(x-\pi h)}$$

$$= \frac{\cos x}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{h(x-\pi h)} - \frac{1}{h(x+\pi h)}\right]$$

$$= \frac{\cos x}{x \sin x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-\pi^2 h^2}.$$

Setzen wir $x = u + iv$ und lassen wir v durch positive Werte unendlich werden, so erhalten wir (s. Gl. 12)):

$$\lim_{v=+\infty} \frac{\cos(u+iv)}{\sin(u+iv)} = \lim_{v=+\infty} \frac{i(e^{iu-v}+e^{-iu+v})}{e^{iu-v}-e^{-iu+v}} = -i.$$

Lassen wir dagegen v durch negative Werte unendlich werden, so erhalten wir:

$$\lim_{v=-\infty} \frac{\cos(u+iv)}{\sin(u+iv)} = i.$$

Man hat also in beiden Fällen:

$$(18)\qquad \lim_{v=\pm\infty} \frac{\cos(u+iv)}{(u+iv)\sin(u+iv)} = 0.$$

Andrerseits ist:

$$\left|\frac{1}{h(u+iv-\pi h)}\right| = \frac{1}{h\sqrt{(\pi h-u)^2+v^2}};$$

da nun für zwei beliebige reelle Größen a, b die Beziehung gilt:

$$a^2+b^2 \geqq 2ab,$$

so folgt daraus:

$$\left|\frac{1}{h(u+iv-\pi h)}\right| \leqq \frac{1}{h\sqrt{2|v|(\pi h-u)}}.$$

Nun ist aber, wenn $u<0$ ist, $\pi h - u > \pi h > h$; ist dagegen $u>0$, so kann man h stets so groß nehmen, daß $\pi h - u > h$ wird. Daraus ergibt sich für jedes h, das größer ist als eine bestimmte endliche Zahl n:

$$\left|\frac{1}{h(u+iv-\pi h)}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{2|v|}\,h^{\frac{3}{2}}}.$$

Analog ist:

$$\left|\frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{2v}\, h^{\frac{3}{2}}},$$

folglich:

$$\left|\frac{1}{h(u+iv-\pi h)} - \frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}\, h^{\frac{3}{2}}},$$

woraus sich ergibt:

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{h(u+iv-\pi h)} - \frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right]\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}} \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist aber (s. oben) konvergent, mithin ist:

$$\lim_{v=\pm\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{h(u+iv-\pi h)} - \frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right] = 0. \tag{19}$$

Es ist ferner klar, daß sich auch die n ersten Glieder der Summe der Null nähern.

Demnach folgt aus (17) in Verbindung mit (18), (19):

$$\lim_{v=\pm\infty} k(u+iv) = 0. \tag{20}$$

Wir schreiben nun (15) in folgender Form:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = g'(x) + \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x-\pi h} + \theta_h\right],$$

wo $\theta_h = \frac{1}{\pi h}$ für $h \neq 0$ und $\theta_h = 0$ für $h = 0$. Ersetzen wir x durch $x + 2\pi$, so gewinnen wir folgende Formel:

$$g'(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)} - \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x+2\pi-\pi h} + \theta_h\right],$$

oder, indem wir h mit $h+2$ vertauschen und beachten, daß $\sin x$ und $\cos x$ die Periode 2π haben:

$$g'(x+2\pi) = \frac{\cos x}{\sin x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x-\pi h} + \theta_{h+2}\right].$$

Das Summenglied läßt sich auch:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x-\pi h} + \theta_h\right]$$

schreiben, weil ja damit nichts weiter geschieht, als daß die unendlich vielen Größen $\frac{1}{x - \pi h}$ mit den unendlich vielen Größen θ_h auf eine verschiedene Weise vereinigt werden, ohne daß der Wert dieser letzteren verändert oder eine von ihnen weggenommen oder hinzugefügt wird. Man hat daher:

$$g'(x + 2\pi) = g'(x),$$

oder:

$$(x + 2\pi)k(x + 2\pi) = xk(x),$$

oder auch:

$$(21) \qquad k(x \pm 2\pi) = \frac{x}{x \pm 2\pi} k(x).$$

Setzt man also in (20) $|x| < 2\pi$ voraus, so ergibt sich aus Formel (21), daß sie für $|x| < 4\pi$, $|x| < 6\pi$ usw. gültig ist. Man darf also schreiben:

$$\lim_{x = \infty} k(x) = 0,$$

und daraus läßt sich in der Weise des Art. 170 ableiten, daß $k(x)$ eine Konstante ist, die notwendig Null ist. Daraus folgt, daß $g'(x)$ ebenfalls Null ist, und daß mithin $g(x)$ und folglich auch $e^{g(x)}$ konstant ist. Bezeichnet man diesen Wert von $e^{g(x)}$ mit C, so erhält man aus (13):

$$\frac{\sin x}{x} = C \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}},$$

mithin:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = C.$$

Nun folgt aber endlich aus (1), daß diese Grenze 1 ist; mithin ist $C = 1$ und:

$$\sin x = x \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}} = x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 h^2}\right).$$

212. Als zweites Beispiel wollen wir die ganze Funktion σx[1] bilden, welche Weierstraß zur Grundlage der Theorie der elliptischen Funktionen gemacht hat. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

---

1) Gegen den allgemeinen Gebrauch, nach dem die Argumente der Funktionen in Klammern eingeschlossen werden, wollen wir σx, ζx, $\wp x$ schreiben.

a) Sie ist ungerade;
b) Sie hat die einfachen Nullstellen:

$$2m\omega_1 + 2n\omega_2,$$

wo m und n alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ zu $+\infty$ unabhängig voneinander durchlaufen und ω_1, ω_2 Größen sind, deren Verhältnis nicht reell ist;

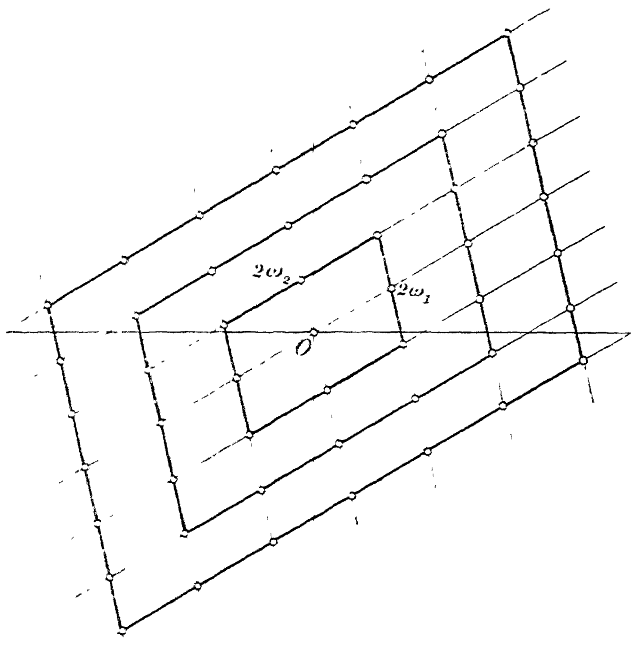

Fig. 4.

c) Ihre erste Ableitung hat im Anfangspunkt den Wert 1, ihre dritte Ableitung wird in demselben Punkte Null[1]);

d) Sie genügt, wenn η_1, η_2 zwei von ω_1, ω_2 abhängige Konstanten sind, identisch den folgenden Beziehungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(x+2\omega_1) = -e^{2\eta_1 x}\sigma x, \\ \sigma(x+2\omega_2) = -e^{2\eta_2 x}\sigma x. \end{cases}$$

Sehen wir vor allem zu, ob σx eine Funktion erster Klasse ist.

1) Es ist fast überflüssig, daran zu erinnern, daß alle Ableitungen gerader Ordnung der Funktion σx, als ungerade Funktionen, im Anfangspunkte verschwinden.

Zeichnen wir die Parallelogramme, welche beziehentlich die Ecken $\pm 2\omega_1 \pm 2\omega_2$, $\pm 4\omega_1 \pm 4\omega_2$, $\pm 6\omega_1 \pm 6\omega_2$ usw. haben, so werden sich alle von 0 verschiedenen Nullstellen von σx auf den Umfängen dieser Parallelogramme befinden, und zwar genau 8 auf demjenigen des ersten, 16 auf dem des zweiten, 24 auf dem des dritten usw. Wir wollen die ersteren mit $a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,8}$, die zweiten mit $a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{2,16}$, die dritten mit $a_{3,1}, a_{3,2}, \cdots, a_{3,24}$ usw. bezeichnen. Nennen wir noch M den größten, m den kleinsten Abstand des Anfangspunktes vom Umfang des ersten Parallelogramms, so haben wir für alle Werte, die r in den einzelnen Formeln annehmen kann:

$$\begin{aligned} M &\geqq |a_{1,r}| \geqq m, \\ 2M &\geqq |a_{2,r}| \geqq 2m, \\ 3M &\geqq |a_{3,r}| \geqq 3m, \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

folglich allgemein, wenn wir mit α irgend eine positive Zahl, mit k irgend eine positive ganze Zahl bezeichnen:

$$\frac{1}{k^\alpha M^\alpha} \leqq \frac{1}{|a_{k,r}|^\alpha} \leqq \frac{1}{k^\alpha m^\alpha}$$

und, indem wir von $r = 1$ bis $r = 8k$ summieren:

$$\frac{8k}{k^\alpha M^\alpha} \leqq \sum_{r=1}^{8k} \frac{1}{|a_{k,r}|^\alpha} \leqq \frac{8k}{k^\alpha m^\alpha}$$

oder auch:

$$\frac{8}{M^\alpha}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \leqq \sum_{r=1}^{8k} \frac{1}{|a_{k,r}|^\alpha} \leqq \frac{8}{m^\alpha}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Lassen wir k von 1 bis ∞ variieren und summieren wir die entsprechenden Ungleichungen, so erhalten wir als mittelsten Ausdruck die Summe der reziproken α-ten Potenzen der absoluten Beträge der Nullstellen, eine Summe, die wir in üblicher Bezeichnung $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^\alpha}$ schreiben können. Wir erhalten demnach:

$$\frac{8}{M^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leqq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^\alpha} \leqq \frac{8}{m^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Nun ist, wie im vorigen Artikel erwähnt, $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ immer und nur dann konvergent, wenn $\alpha - 1 > 1$, d. h. wenn $\alpha > 2$ ist; man wird

dasselbe mithin von $\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{c_\lambda^2}$ sagen können. Folglich ist 2 die kleinste ganze Zahl μ, welche $\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{c_\lambda^{\mu+1}}$ konvergent macht, d. h. σx ist eine Funktion erster Klasse und vom Range Zwei.

Setzt man zur Abkürzung:

$$2m\omega_1 + 2n\omega_2 = c_{mn},$$

so hat man demnach:

$$(2)\qquad \sigma x = e^{g(x)}\, x \prod{}'\left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2c_{mn}^2}},$$

wo $g(x)$ eine zu bestimmende ganze Funktion ist und der dem Zeichen Π beigegebene Strich anzeigt, daß m, n alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, mit Ausschluß des Wertepaares $m = 0$, $n = 0$, annehmen können.

Bevor wir zur Bestimmung von $g(x)$ schreiten, möge noch eine Bemerkung Platz finden. Setzen wir:

$$\frac{\sigma' x}{\sigma x} = \zeta x, \quad -\zeta' x = \wp x \;[1],$$

so erhält man aus (1) durch Differentiation und Division mit (1):

$$(3)\qquad \zeta(x + 2\omega_h) = \zeta x + 2\eta_h \qquad (h = 1, 2),$$

und daraus durch nochmalige Differentiation:

$$(4)\qquad \wp(x + 2\omega_h) = \wp x, \quad \wp'(x + 2\omega_h) = \wp' x \qquad (h = 1, 2).$$

Außerdem sieht man leicht, daß ζx und $\wp' x$ ungerade Funktionen sind, $\wp x$ aber eine gerade Funktion ist.

Man hat demnach aus (2) (vgl. Art. 210):

$$(5)\qquad \zeta x = g'(x) + \frac{1}{x} + \sum{}'\left[\frac{1}{x - c_{mn}} + \frac{1}{c_{mn}} + \frac{x}{c_{mn}^2}\right],$$

$$(6)\qquad -\wp x = g''(x) - \frac{1}{x^2} + \sum{}'\left[-\frac{1}{(x - c_{mn})^2} + \frac{1}{c_{mn}^2}\right],$$

$$(7)\qquad -\wp' x = g'''(x) + \frac{2}{x^3} + \sum{}'\frac{2}{(x - c_{mn})^3} = g'''(x) + 2\sum\frac{1}{(x - c_{mn})^3},$$

1. Es sei darauf hingewiesen, daß ζx und $\wp x$ keine ganzen Funktionen sind. Es sind meromorphe Funktionen (s. weiter unten Art. 248), d. h. solche, die in endlicher Entfernung keine andern Singularitäten haben als Pole.

indem in der letzten Summe zugleich das dem Wertepaare $m = n = 0$ entsprechende Glied $\frac{2}{x^3}$ einbegriffen und demnach der Strich weggelassen worden ist. Bezeichnen wir diese Summe mit $S(x)$, so überzeugen wir uns leicht, daß:

$$S(x + 2\omega_h) = S(x) \qquad (h = 1, 2).$$

Es ist nämlich:

$$S(x + 2\omega_1) = \sum \frac{1}{(x + 2\omega_1 - c_{mn})^3} = \sum \frac{1}{[x - (2(m-1)\omega_1 - 2n\omega_2)]^3};$$

nun variiert aber, wenn m von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, auch $m - 1$ zwischen denselben Grenzen, folglich kann man schreiben:

$$S(x + 2\omega_1) = \sum \frac{1}{[x - (2m\omega_1 + 2n\omega_2)]^3} = S(x).$$

Analog beweist man, daß $S(x + 2\omega_2) = S(x)$ ist.

Aus (7) folgt mithin mit Rücksicht auf die zweite der Formeln (4):

$$g'''(x + 2\omega_h) = g'''(x) \qquad (h = 1, 2).$$

Diese Gleichung besagt, daß $g'''(x)$ in den entsprechenden Punkten der verschiedenen Parallelogramme des in Fig. 4 dargestellten, sich über die ganze Ebene erstreckenden Netzes, dessen Knoten sämtliche Punkte c_{mn} sind, stets wieder denselben Wert annimmt. Nun besitzen aber, weil $g'''(x)$ eine ganze Funktion ist, die absoluten Beträge der Werte, die sie innerhalb eines einzelnen Parallelogramms erhält, ein endliches Maximum M; daraus kann man schließen, daß der absolute Betrag von $g'''(x)$ in jedem beliebigen endlichen Teile der Ebene den Wert M niemals übersteigt. Daraus leitet man in bekannter Weise (vgl. Art. 170) her, daß $g'''(x)$ konstant ist.

Da ferner:

$$S(-x) = \sum \frac{1}{(-x - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^3} = -\sum \frac{1}{(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^3}$$

ist und m, n durch $-m$, $-n$ ersetzt werden können (da ja, wenn m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, auch $-m$, $-n$ innerhalb derselben Grenzen variieren), so ergibt sich:

$$S(-x) = -\sum \frac{1}{(x - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^3} = -S(x);$$

beachtet man außerdem, daß $\wp'(-x) = -\wp'(x)$ ist, so folgt aus (7) $g'''(-x) = -g'''(x)$.

Nun ist aber $g'''(x)$ konstant, folglich muß es notwendigerweise Null sein, und man hat, wenn man mit A, B, C noch zu bestimmende Konstanten bezeichnet:

$$g''(x) = 2A, \quad g'(x) = 2Ax + B, \quad g(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Die Formel (5) läßt sich schreiben:

$$\zeta x = g'(x) + \frac{1}{x} + x^2 \sum{}' \frac{1}{c_{mn}^2 (x - c_{mn})}. \tag{8}$$

Ersetzt man x durch $-x$, so ersieht man durch Wiederholung des soeben angewendeten Verfahrens, daß die Reihe auf der rechten Seite das Vorzeichen wechselt; berücksichtigt man ferner, daß ζx eine ungerade Funktion ist, so folgt $g'(-x) = -g'(x)$ oder:

$$-2Ax + B = -(2Ax + B),$$

woraus sich $B = 0$ ergibt, und schließlich:

$$g'(x) = 2Ax, \quad g(x) = Ax^2 + C.$$

Die Formel (8) liefert uns sodann die weitere:

$$\frac{1}{x}\left[\zeta x - \frac{1}{x}\right] = 2A + x \sum{}' \frac{1}{c_{mn}^2 (x - c_{mn})}. \tag{9}$$

Setzen wir:

$$\frac{1}{x}\left[\zeta x - \frac{1}{x}\right] = \tau(x),$$

so ergibt sich aus (9):

$$\tau(0) = 2A. \tag{10}$$

Nun ist:

$$\wp x = -\zeta' x = -\left(\frac{\sigma' x}{\sigma x}\right)' = -\frac{\sigma x \cdot \sigma'' x - \sigma'^2 x}{\sigma^2 x}$$

$$= \zeta^2 x - \frac{\sigma'' x}{\sigma x} = \frac{1}{x^2} + 2\tau(x) + x^2 \tau^2(x) - \frac{\sigma'' x}{\sigma x},$$

folglich wegen (6):

$$\frac{\sigma'' x}{\sigma x} = 2\tau(x) + x^2\tau^2(x) + 2A + \sum{}' \left[-\frac{1}{(x - c_{mn})^2} + \frac{1}{c_{mn}^2}\right]. \tag{11}$$

Die linke Seite läßt sich schreiben (Art. 147):

$$\frac{\sigma'' 0 + \frac{x}{1!}\sigma''' 0 + \frac{x^2}{2!}\sigma^{IV} 0 + \frac{x^3}{3!}\sigma^{V} 0 + \cdots}{\sigma 0 + \frac{x}{1!}\sigma' 0 + \frac{x^2}{2!}\sigma'' 0 + \frac{x^3}{3!}\sigma''' 0 + \cdots}$$

oder auch, wenn man bedenkt, daß:

$$\sigma 0 = \sigma'' 0 = \sigma''' 0 = \sigma^{IV} 0 = 0, \quad \sigma' 0 = 1$$

ist:

$$\frac{\frac{x^3}{3!}\sigma^V 0 + \cdots}{\frac{x}{1!} + \frac{x^5}{5!}\sigma^V 0 + \cdots} = \frac{\frac{x^2}{3!}\sigma^V 0 + \cdots}{1 + \frac{x^4}{5!}\sigma^V 0 + \cdots};$$

sie verschwindet also für $x = 0$; man erhält deshalb aus (11) mit Rücksicht auf (10):

$$0 = 6A$$

oder $A = 0$, und $g(x)$, mithin auch $e^{g(x)}$, reduziert sich auf eine Konstante. Bezeichnet man den Wert von $e^{g(x)}$ mit D und beachtet man, daß (Art. 147):

$$\frac{\sigma x}{x} = \frac{\sigma 0 + \frac{x}{1!}\sigma' 0 + \frac{x^5}{5!}\sigma^V 0 + \cdots}{x} = 1 + \frac{x^4}{5!}\sigma^V 0 + \cdots$$

ist, so daß $\frac{\sigma x}{x} = 1$ wird für $x = 0$, so ergibt sich aus (2), daß $D = 1$ sein muß. Man hat demnach schließlich:

$$\sigma x = x \prod{}' \left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2c_{mn}^2}}.$$

213. Der Satz von Weierstraß ist nach verschiedenen Richtungen verallgemeinert worden. Es mögen hier einige der Untersuchungen angegeben werden, zu denen er Veranlassung gegeben hat:

Bildung einer Funktion, die als wesentlich singuläre Punkte alle Punkte einer Kreislinie besitzt und deren Nullstellen innerhalb derselben liegen[1];

Bildung einer ganzen Funktion, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annimmt[2];

Bildung einer doppeltperiodischen Funktion mit gegebenen Nullstellen, die in jedem primitiven Parallelogramme einen einzigen wesentlich singulären Punkt besitzt[3];

Bildung einer eindeutigen Funktion eines analytischen Punktes, die einen einzigen wesentlich singulären Punkt und unendlich viele gegebene Nullpunkte hat[4];

---

1) Picard 375.
2) Gazzaniga 165, Stäckel 463. Vgl. a. Schering 441.
3) Appell 5, Pascal 358, Cazzaniga 115, 117.
4) Appell 5.

Ableitung des Satzes von Weierstraß als besonderen Falles aus dem verallgemeinerten Mittag-Lefflerschen Satze (wovon weiter unten die Rede sein wird)[1].

In einem gewissen Zusammenhange mit dem Satze von Weierstraß steht folgende Aufgabe[2], die freilich keine eigentliche Verallgemeinerung desselben darstellt: Gegeben sind zwei Mengen A, B von reellen oder komplexen Werten, von denen die erste abzählbar, die zweite in der ganzen Ebene überall dicht ist; es soll eine in der ganzen Ebene existierende analytische Funktion gebildet werden, die für alle Werte der Variabeln, die der Menge A angehören, der Menge B angehörige Werte annimmt.

Bemerkenswert ist auch der folgende Satz[3]: Ist eine Menge von Größen c_i gegeben, die der Bedingung des Art. 206 genügen, so läßt sich durch geeignete Wahl von $g(x)$ (Art. 209) eine ganze Funktion, die als einzige Nullstellen die c_i besitzt, so bilden, daß die sie darstellende Potenzreihe nur komplexe rationale[4] Koeffizienten besitzt; sind ferner die Größen c_i reell oder paarweise konjugiert, so läßt sich die Funktion derart bilden, daß sie lauter reelle rationale Koeffizienten hat.

Untersuchung der ganzen Funktionen[5].

214. Unter dieser Überschrift fassen wir eine Reihe von Untersuchungen zusammen, die ihren ersten Anstoß durch Laguerre empfingen und die mehr oder weniger unmittelbar darauf abzielen zu erforschen, ob und inwieweit für die ganzen transzendenten Funktionen die bekannten Eigenschaften der Polynome Geltung behalten. Einige dieser Untersuchungen sind, außer in einzelnen der bereits S. 51 angeführten Werke, in Arbeiten von Bassi[6], Marx[7] und Pizzarello[8] systematisch dargestellt worden.

215. Eine einfache Funktion ist vollständig bestimmt, sobald ihre Nullstellen gegeben sind; folglich müssen die Koeffizienten ihrer Entwicklung in eine Potenzreihe lediglich Funktionen und zwar symmetrische (transzendente) Funktionen ihrer Nullstellen sein. Die Bestimmung der Form solcher Funktionen bietet keinerlei Schwierigkeit.

---

1) Casorati 113. 2) Stäckel 462. S. auch Niccoletti 336, Stäckel 460, 461. 3) Hurwitz 210.

4) Als komplexe rationale Zahlen bezeichnet man die Zahlen $a+bi$, wenn in ihnen a und b rational sind.

5) Bassi 17, 18, 19, Cesàro 118, 120, 121, Desaint 129, Hermite 202, Laguerre 236, 237, 238, 239, 240, Pincherle 385, De Sparre 459, Vivanti 493, 499, 504, 505, Witting 521.

6) Bassi 17. 7) Marx 299. 8) Pizzarello 394.

Setzt man in Gleichung (5) des Art. 210 $r_h = p$ und:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^k} = s_k \qquad (k > p),$$

ferner:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

so hat man:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots =$$
$$= -(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(s_{p+1} x^p + s_{p+2} x^{p+1} + s_{p+3} x^{p+2} + \cdots);$$

daraus ergibt sich:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0,$$
$$(p+1)\, a_{p+1} = -s_{p+1}, \ (p+2)\, a_{p+2} = -s_{p+2}, \cdots,$$
$$(2p+1)\, a_{2p+1} = -s_{2p+1},$$
$$(2p+2)\, a_{2p+2} = -s_{2p+2} - s_{p+1} a_{p+1},$$
$$(2p+3)\, a_{2p+3} = -s_{2p+3} - s_{p+2}\, a_{p+1} - s_{p+1}\, a_{p+2} - \cdots, \cdots,$$

Gleichungen, die sämtliche a_h der Reihe nach zu bestimmen gestatten.

216. Wird auf die komplexe Variable x eine ganze lineare Substitution:

(1) $$x = Ay + B$$

ausgeübt, so verwandelt sich jede Normalfunktion von der Höhe p in eine Funktion derselben Beschaffenheit.

Es sei:

(2) $$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}}$$

eine Normalfunktion von der Höhe p, so daß $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^{p+1}}$ konvergiert, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^p}$ divergiert, und $g(x)$ ein Polynom ist von nicht höherem Grade als p. Mittels der Substitution (1) verwandelt sich (2) in eine ganze Funktion $\varphi(y)$ von y, deren Wurzeln $\frac{c_h - B}{A}$ $(h = 1, 2, \cdots)$ und $-\frac{B}{A}$ sind, von denen die letztere m-fach ist. Es läßt sich zunächst beweisen, daß von den Reihen:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_h - B}{A}\right)^{p+1}}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_h - B}{A}\right)^{p}},$$

wo, wenn $B = c_r$ ist, das r-te Glied ausgeschlossen bleiben muß, die erste absolut konvergiert, die letzte nicht.

Offenbar können wir anstatt dieser Reihen die beiden folgenden in Betracht ziehen:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(c_h - B)^{p+1}}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(c_h - B)^{p}}.$$

Nimmt man σ willkürlich, so läßt sich stets eine Zahl n von der Art angeben, daß für jedes $h > n$:

$$\left|\frac{B}{c_h}\right| < \sigma$$

ist; man hat dann für dieselben Werte von h, wenn $\sigma < 1$ ist:

$$0 < |c_h|(1-\sigma) < |c_h| - |B| \leqq |c_h - B| \leqq |c_h| + |B| < |c_h|(1+\sigma),$$

folglich, wenn man mit q irgend eine Zahl bezeichnet, die größer als n ist:

$$\sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h|^{p+1}} > (1-\sigma)^{p+1} \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h - B|^{p+1}},$$

$$\sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h|^{p}} < (1+\sigma)^{p} \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h - B|^{p}};$$

damit ist die Behauptung erwiesen. Die Funktion $\varphi(y)$ ist demnach vom Range p; daher ist ihr Ausdruck:

$$e^{l(y)}\left(1 + \frac{Ay}{B}\right)^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{Ay}{c_h - B}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{A^k y^k}{k(c_h - B)^k}}.$$

Man hat folglich:

$$e^{g(Ay+B)}(Ay+B)^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{Ay+B}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{(Ay+B)^k}{k c_h^k}} =$$

$$= e^{l(y)}\left(1 + \frac{Ay}{B}\right)^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{Ay}{c_h - B}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{A^k y^k}{k(c_h - B)^k}},$$

und daher hat der Ausdruck:

$$B^m e^{g(Ay+B)-l(y)} \prod_{h=1}^{\infty} \frac{c_h - B}{c_h} e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left[\frac{(Ay+B)^k}{c_h^k} - \frac{A^k y^k}{(c_h - B)^k}\right]}$$

den Wert 1. Daraus folgt, daß sich $l(y)$ und:

$$(3) \qquad g(Ay+B) + \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left[\frac{(Ay+B)^k}{c_h^k} - \frac{A^k y^k}{(c_h - B)^k}\right]$$

nur um eine Konstante unterscheiden. Mithin ist $l(y)$ von nicht höherem Grade als p, also $\varphi(y)$ eine Normalfunktion von der Höhe p.

217. Ist im besondern $B = 0$, so ist:

$$\varphi(y) = e^{l(y)} y^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Ay}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{A^k y^k}{k c_h^k}},$$

und man findet unmittelbar bis auf eine additive Konstante:

$$l(y) = g(Ay).$$

Also: Die Substitution:

$$(1) \qquad x = Ay + B,$$

wo $B \neq 0$, transformiert im allgemeinen eine einfache Funktion vom Range $p > 0$ in eine nicht einfache Funktion; dagegen verwandelt die Substitution:

$$x = Ay$$

eine einfache Funktion wieder in eine einfache Funktion.

Für $p = 0$ verwandelt die Substitution (1) eine einfache Funktion wieder in eine einfache Funktion, was auch B sei.

Für $p = 1$ gibt es unendlich viele Werte von B, für die die Substitution (1) diese Eigenschaft besitzt. Setzen wir nämlich in dem Ausdruck (3) des vorigen Artikels $g(x) \equiv 0$ und $p = 1$, so finden wir, daß sich $l(y)$ und:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{Ay+B}{c_h} - \frac{Ay}{c_h - B}\right)$$

nur um eine Konstante voneinander unterscheiden. Der letztere Ausdruck kann aber auch:

$$-B\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{Ay}{c_h(c_h-B)}-\frac{1}{c_h}\right]$$

geschrieben werden; damit sich $l(y)$ auf eine Konstante reduziert, muß folglich B, das von Null verschieden vorausgesetzt ist, der Gleichung:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h(c_h-B)}=0$$

genügen, also (s. Art. 210, (5)) eine Nullstelle von $f''(x)$ sein

218. Sind bei zwei ganzen Funktionen die entsprechenden Koeffizienten ihrer Entwicklungen konjugiert, so sind auch ihre Nullstellen konjugiert.

Es sei:

$$f(x)=\sum_{h=0}^{\infty}a_h x^h$$

eine ganze Funktion, $x=\alpha+i\beta$ eine ihrer Nullstellen. Ersetzen wir x durch seinen Ausdruck und trennen wir den reellen und den imaginären Bestandteil, so haben wir:

$$0=\mathfrak{P}(\alpha,\beta)+i\mathfrak{Q}(\alpha,\beta),$$

wo $\mathfrak{P}(u,v)$, $\mathfrak{Q}(u,v)$ Potenzreihen der beiden reellen Variabeln u, v mit reellen Koeffizienten sind, die für alle endlichen Werte dieser Variablen konvergieren. Daraus folgt:

$$\mathfrak{P}(\alpha,\beta)=0,\quad \mathfrak{Q}(\alpha,\beta)=0.$$

Bezeichnen wir mit $\bar{a}_h$ die zu a_h konjugierte Größe und setzen in dem Ausdruck:

$$\bar{f}(x)=\sum_{h=0}^{\infty}\bar{a}_h x^h$$

$x=\alpha-i\beta$, so ergibt sich offenbar:

$$\bar{f}(\alpha-i\beta)=\mathfrak{P}(\alpha,\beta)-i\mathfrak{Q}(\alpha,\beta)=0,$$

was zu beweisen war.

219. Aus dem vorstehenden Satze folgt: Wenn die Entwicklung einer ganzen Funktion lauter reelle Koeffizienten

hat, so sind die Nullstellen der Funktion reell oder paarweise konjugiert.

Umgekehrt: Hat eine **einfache** Funktion erster Klasse reelle oder paarweise konjugierte Nullstellen, so sind die Koeffizienten ihrer Entwicklung reell.

Hat eine Funktion zweiter Klasse reelle oder paarweise konjugierte Nullstellen, so sind die Koeffizienten ihrer Entwicklung reell, sobald der äußere Exponent Null ist und die den konjugierten Nullstellen entsprechenden Konvergenzzahlen einander gleich sind (was man jedenfalls voraussetzen darf, da ja die Konvergenzzahlen lediglich von den absoluten Beträgen der Nullstellen abhängen und zwei konjugierte Nullstellen denselben absoluten Betrag haben).

220. Besitzt eine ganze Funktion mit reellen Koeffizienten mehr als eine reelle Nullstelle, so ist zwischen je zwei aufeinander folgenden reellen Nullstellen eine ungerade Anzahl reeller Nullstellen ihrer Ableitung enthalten **(Satz von Rolle).**

Es seien μ, $\nu > \mu$ zwei aufeinander folgende reelle Nullstellen der ganzen Funktion $f(x)$ mit reellen Koeffizienten; wir wollen sie der Allgemeinheit wegen als mehrfach und zwar beziehentlich von der Ordnung ϱ, σ voraussetzen. Wir haben dann (Art. 173):

$$f(\mu) = f'(\mu) = \cdots = f^{(\varrho-1)}(\mu) = 0,$$

$$f(\nu) = f'(\nu) = \cdots = f^{(\sigma-1)}(\nu) = 0,$$

folglich (Art. 147):

$$f(x) = (x-\mu)^\varrho \left[\frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{(\varrho+1)!} f^{(\varrho+1)}(\mu) + \cdots\right],$$

$$f(x) = (x-\nu)^\sigma \left[\frac{1}{\sigma!} f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{(\sigma+1)!} f^{(\sigma+1)}(\nu) + \cdots\right];$$

daraus ergibt sich:

$$f'(x) = (x-\mu)^{\varrho-1} \left[\frac{1}{(\varrho-1)!} f^{(\varrho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{\varrho!} f^{(\varrho+1)}(\mu) + \cdots\right],$$

$$f'(x) = (x-\nu)^{\sigma-1} \left[\frac{1}{(\sigma-1)!} f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{\sigma!} f^{(\sigma+1)}(\nu) + \cdots\right],$$

und folglich:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\mu} \frac{\frac{1}{(\varrho-1)!} f^{(\varrho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{\varrho!} f^{(\varrho+1)}(\mu) + \cdots}{\frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{(\varrho+1)!} f^{(\varrho+1)}(\mu) + \cdots}$$

$$= \frac{1}{x-\nu} \frac{\frac{1}{(\sigma-1)!} f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{\sigma!} f^{(\sigma+1)}(\nu) + \cdots}{\frac{1}{\sigma!} f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{(\sigma+1)!} f^{(\sigma+1)}(\nu) + \cdots}.$$

Man ersieht daraus, daß der Quotient $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sowohl in μ wie in ν einen einfachen Pol besitzt, während er offenbar in dem ganzen Intervalle $\mu\nu$ endlich ist. Außerdem strebt er, wenn x sich μ von rechts nähert, der Grenze $+\infty$, wenn x sich ν von links nähert, der Grenze $-\infty$ zu. Daraus folgt (Art. 102), daß er und folglich auch $f'(x)$ in dem Intervalle $\mu\nu$ eine ungerade Anzahl von Malen verschwindet.

Es ist zu bemerken, daß der Beweis für jedwede analytische Funktion $f(x)$ gilt, die in einem das Intervall $\mu\nu$ enthaltenden Bereiche regulär, in allen Punkten des Intervalles selbst aber — mit Ausnahme der Endpunkte, in denen sie Null wird — reell und von Null verschieden ist.

221. Wir führen hier eine Anwendung des Rolleschen Satzes an, die uns weiter unten förderlich sein wird.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion mit reellen Koeffizienten und sind p, q zwei reelle Werte, so ist der Ausdruck:

$$F(x) = (p-q) f(x) + (q-x) f(p) + (x-p) f(q)$$

eine ganze Funktion (Art. 201), die für $x = p$ und für $x = q$ Null wird. Es gibt demnach zwischen p und q mindestens einen Wert x_0 von x, für welchen die Ableitung verschwindet. Nun ist (Art 166, 167):

$$F'(x) = (p-q) f'(x) - f(p) + f(q),$$

mithin:

$$(p-q) f'(x_0) - f(p) + f(q) = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$f'(x_0) = \frac{f(q) - f(p)}{q-p}.$$

D. h.: S i n d i r g e n d z w e i r e e l l e W e r t e p, q g e g e b e n, s o i s t

mindestens ein Zwischenwert vorhanden, in welchem $f'(x)$ den Wert des **Zuwachsverhältnisses** $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ annimmt.

Betrachten wir noch eine Folge dieser Formel. Nehmen wir an, $f(x)$ verbleibe, während x nach positiven Werten unbeschränkt zunimmt, innerhalb endlicher Grenzen (wie es z. B. bei der Funktion $\sin x$ der Fall ist), so kann bei beliebig großem, aber festem p der Wert von q stets so groß genommen werden, daß $f'(x_0)$ beliebig klein ausfällt; ist nämlich $|f(x)| \leqq A$, und bezeichnet σ eine beliebig vorgegebene Größe, so braucht man nur: $q > p + \frac{2A}{\sigma}$ zu nehmen, damit $f'(x_0) < \sigma$ sei. Daraus folgt, daß, wenn sich $f'(x)$ überhaupt einer Grenze nähert, diese Grenze nur Null sein kann. D. h.: Verbleibt die Funktion, während die Veränderliche nach reellen positiven Werten unbeschränkt zunimmt, innerhalb endlicher Grenzen, so nähert sich ihre Ableitung entweder keiner bestimmten Grenze oder hat den Wert Null zur Grenze.

222. Hat eine beständig konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten eine endliche Anzahl r von Zeichenwechseln, so ist die Anzahl der reellen positiven Nullstellen der durch diese Reihe dargestellten ganzen Funktion entweder r oder um eine gerade Zahl kleiner als r (**Satz von Descartes**).

Der Satz gilt offenbar für $r = 0$; mithin genügt es, ihn durch vollständige Induktion zu beweisen.

Da die Anzahl der Zeichenwechsel endlich ist, so liegen sie sämtlich zwischen a_0 und einem bestimmten Koeffizienten a_l; von diesem an haben alle Koeffizienten dasselbe Vorzeichen, das wir als positiv voraussetzen dürfen. Daraus folgt, daß, wenn γ eine Zahl bedeutet, die größer ist als sämtliche positiven Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$\sum_{h=0}^{l} a_h x^h = 0,$$

$f(\gamma)$ positiv ist; die positiven Nullstellen von $f(x)$ sind mithin insgesamt kleiner als γ; ihre Anzahl wird demnach endlich sein. Bezeichnen wir diese Anzahl mit θ, so gibt es für jede beliebige ganze Zahl α nur θ positive Nullstellen der Funktion:

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha}.$$

Nach dem Satze des vorletzten Artikels muß es folglich wenigstens $\theta - 1$ positive Nullstellen der Funktion $\varphi_\alpha'(x)$ geben. Nun ist (Art. 168):

$$\varphi_\alpha'(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\left(xf'(x) - \alpha f(x)\right);$$

man darf daher behaupten, daß die ganze Funktion:

$$\psi_\alpha(x) = xf'(x) - \alpha f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h - \alpha)\, a_h x^h$$

mindestens $\theta - 1$ positive Nullstellen besitzt.

Wir nehmen nunmehr an, in der Funktion $f(x)$ finde ein Zeichenwechsel zwischen a_t und a_{t+1} statt, und vergleichen, nachdem wir $\alpha = t$ gewählt, die Reihe der Koeffizienten von $f(x)$:

$$(1) \qquad a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{t-1},\ a_t,\ a_{t+1},\ a_{t+2},\ \cdots$$

mit derjenigen der Koeffizienten von $\psi_t(x)$:

$$(2) \qquad -ta_0,\ -(t-1)\,a_1,\ \cdots,\ -a_{t-1},\ 0,\ a_{t+1},\ 2a_{t+2},\ \cdots.$$

In dem Teile der Reihe (1), der von a_0 bis a_{t-1} geht, und in dem entsprechenden der Reihe (2) gibt es eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln; ebenso in dem Teile der Reihe (1) von a_{t+1} an und in dem entsprechenden der Reihe (2). Dagegen enthält der Teil a_{t-1}, a_t, a_{t+1} der Reihe (1) zwei oder einen Zeichenwechsel, je nachdem a_{t-1} und a_{t+1} dasselbe Vorzeichen haben oder nicht; entsprechend besitzt der Teil $-a_{t-1}, 0, a_{t+1}$ der Reihe (2) einen oder gar keinen Zeichenwechsel. Die Anzahl der Zeichenwechsel von $\psi_t(x)$ beträgt daher $r - 1$; nehmen wir den Satz für $r - 1$ als bewiesen an, so ist folglich $\theta - 1 \leq r - 1$, woraus sich $\theta \leq r$ ergibt.

Die Anzahl der positiven Nullstellen von $f(x)$ kann also r nicht übersteigen.

Beachtet man, daß der Wert von $f(x)$ für $x = 0$ gleich a_0 ist, und daß, wenn x dem Werte $+\infty$ zustrebt, $f(x)$ dem Werte $\pm\infty$ zustrebt, je nachdem $a_l \gtrless 0$ ist, so schließt man leicht, daß die Anzahl der Zeichenwechsel und die der positiven Nullstellen entweder übereinstimmen oder um eine gerade Zahl sich unterscheiden müssen.

223. Der Rollesche Satz nimmt für Polynome folgende bündigere Gestalt an:

Zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit lauter reellen Wurzeln gibt es eine und nur eine Wurzel der abgeleiteten Gleichung.

Daraus folgt unmittelbar der weitere Satz:

Sind alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung reell, so gilt dasselbe für die Wurzeln der abgeleiteten Gleichung.

Für ganze transzendente Funktionen ist die zweite Eigenschaft keine notwendige Folge der ersten. Ja, noch mehr, diese Funktionen besitzen im allgemeinen weder die eine noch die andre Eigenschaft.

Was die erste Eigenschaft betrifft, so mag bemerkt werden, daß, wenn $f(x)$ eine für $x=0$ nicht verschwindende einfache Funktion vom Range $p>1$ ist, $f'(x)$ im Anfangspunkte eine mehrfache Nullstelle p-ter Ordnung hat; setzt man also die Nullstellen von $f(x)$ als reell voraus, so liegen zwischen der niedrigsten negativen und der niedrigsten positiven Nullstelle sicherlich p (zusammenfallende) Nullstellen der abgeleiteten Funktion $f'(x)$.

Was die zweite Eigenschaft anlangt, so genügt das Beispiel der Funktion:

$$f(x)=e^{x^2}\sin x,$$

die lauter reelle Nullstellen hat, während ihre Ableitung:

$$f'(x)=e^{x^2}[\cos x+2x\sin x]$$

die imaginäre Nullstelle $x=0{,}771\cdots i$ besitzt.

Es ist deshalb angezeigt zu untersuchen, in welchen Fällen die erwähnten Eigenschaften auch transzendenten Funktionen zukommen.

Wir werden diese Frage in den folgenden Artikeln behandeln.

224. Ist $f(x)$ eine einfache Funktion mit lauter reellen Nullstellen, so liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen derselben von nicht entgegengesetztem Vorzeichen[1]) **nur eine** Nullstelle von $f'(x)$.

Es sei:

$$f(x)=x^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k c_h^k}},$$

wo sämtliche c_h reell sein mögen; es folgt:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m}{x}+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{x^p}{c_h^p(x-c_h)}.$$

1) In dieser Fassung ist zugleich der Fall einbegriffen, daß eine der beiden Nullstellen Null ist.

Sind μ, ν zwei reelle Wurzeln von $f'(x)$, so ist mithin:

$$\frac{m}{\mu^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(\mu - c_h)} = 0,$$

$$\frac{m}{\nu^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(\nu - c_h)} = 0;$$

durch Addition und Subtraktion ergibt sich daraus:

$$\frac{m(\mu^{p+1} + \nu^{p+1})}{\mu^{p+1}\nu^{p+1}} + (\mu + \nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(\mu - c_h)(\nu - c_h)} - 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}(\mu - c_h)(\nu - c_h)} = 0,$$

$$\frac{m(\mu^{p+1} - \nu^{p+1})}{\mu^{p+1}\nu^{p+1}} + (\mu - \nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(\mu - c_h)(\nu - c_h)} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man:

$$(1)\quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(\mu - c_h)(\nu - c_h)} = -\frac{m}{\mu^{p+1}\nu^{p+1}}(\mu^p + \mu^{p-1}\nu + \cdots + \mu\nu^{p-1} + \nu^p)$$

und durch Einsetzung in die erstere:

$$(2)\quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}(\mu - c_h)(\nu - c_h)}$$
$$= \frac{m}{2\mu^{p+1}\nu^{p+1}}[\mu^{p+1} + \nu^{p+1} - (\mu + \nu)(\mu^p + \mu^{p-1}\nu + \cdots + \mu\nu^{p-1} + \nu^p)]$$
$$= -\frac{m}{\mu^p\nu^p}(\mu^{p-1} + \mu^{p-2}\nu + \cdots + \mu\nu^{p-2} + \nu^{p-1}).$$

Wir nehmen nun an, μ und ν fielen zwischen zwei aufeinander folgende Nullstellen von $f(x)$. Dann haben $\mu - c_h$ und $\nu - c_h$ für alle Werte von h dasselbe Vorzeichen; folglich ist die linke Seite von (1) für ein gerades p, die von (2) für ein ungerades p eine positive Größe. Andrerseits hat man, wenn $f(x)$ im Anfangspunkte nicht verschwindet, $m = 0$, folglich sind die rechten Seiten von (1) und (2) Null; wird sie dagegen im Anfangspunkte Null, so haben μ und ν notwendigerweise dasselbe Vorzeichen, folglich ist dann die rechte Seite von (1) oder (2) negativ, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Die gemachte Voraussetzung ist also widersinnig.

Aus dem obigen Beweise erhellt auch, daß, wenn $f(x)$ im Anfangspunkte nicht Null wird ($m = 0$), zwischen ihrer kleinsten negativen und ihrer kleinsten positiven Nullstelle nicht zwei von Null verschiedene Nullstellen von $f'(x)$ liegen können. Da nun $f'(x)$ in diesem Falle im Anfangspunkte eine p-fache Nullstelle besitzt, so läßt sich nach dem Rolleschen Satze (Art. 220) schließen, daß es in dem betrachteten Intervalle eine nicht verschwindende Nullstelle von $f'(x)$ gibt oder nicht gibt, je nachdem p gerade oder ungerade ist[1]).

225. Wenn eine Funktion $f(x)$ von der Höhe 0 oder 1 lauter reelle Nullstellen besitzt, und die im äußeren Exponenten vorkommenden Konstanten reell sind, so sind die Nullstellen von $f'(x)$ sämtlich reell.

Eine Funktion von der Höhe 0 oder 1 hat die Form:

$$f(x) = e^{Ax+B} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\theta_h},$$

wo $\theta_h = 0$ oder $\theta_h = \frac{x}{c_h}$ ist, je nachdem die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|}$ konvergiert oder divergiert und $A = 0$ ist, wenn $f(x)$ die Höhe 0 hat. Jedenfalls kann man schreiben (vgl. Art. 209 am Ende):

$$f(x) = e^{Cx+B} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\frac{x}{c_h}},$$

wo $C = A - \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h}$ oder $C = A$ ist, je nachdem $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|}$ konvergiert oder divergiert. Nach den Voraussetzungen des Satzes sind C und B reell.

---

1) Dieses eigenartige Verhalten der Funktion in dem den Anfangspunkt enthaltenden Intervalle darf uns nicht überraschen Während nämlich der Anfangspunkt durch keine auf ein Polynom bezügliche besondere Eigenschaft charakterisiert ist, weil er ja mittels einer linearen Substitution, die ein Polynom in ein Polynom verwandelt, auf einen beliebigen Punkt übertragen werden kann, läßt sich dasselbe nicht mit Bezug auf eine ganze einfache Funktion sagen, da diese sich im allgemeinen durch eine lineare Substitution in eine nicht einfache Funktion verwandelt (Art. 217). Dieser Unterschied verschwindet für $p = 0$ und $p = 1$, da ja eine einfache Funktion mittels einer im ersten Falle willkürlichen, im zweiten Falle zweckmäßig gewählten linearen Substitution in eine einfache Funktion transformiert werden kann. Und es liegt eben für $p = 0$ und $p = 1$ auch in dem Intervalle zwischen der kleinsten negativen und der kleinsten positiven Nullstelle von $f(x)$ eine einzige Nullstelle von $f'(x)$; diese ist für $p = 0$ verschieden von Null, für $p = 1$ Null.

Hieraus folgt:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = C + \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h(x - c_h)}.$$

Ist $x = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle von $f'(x)$, so muß sein:

$$0 = C + \frac{m}{\alpha + i\beta} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha + i\beta}{c_h(\alpha - c_h + i\beta)}$$

oder auch:

$$0 = C + \frac{m(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\alpha + i\beta)(\alpha - c_h - i\beta)}{c_h((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)},$$

und, indem man den Koeffizienten von i gleich Null setzt:

$$0 = -\frac{m\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{-\alpha\beta + (\alpha - c_h)\beta}{c_h((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} =$$

$$= \beta\left[-\frac{m}{\alpha^2 + \beta^2} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - c_h)^2 + \beta^2}\right],$$

eine Gleichung, die lediglich für $\beta = 0$ bestehen kann.

226. Besitzt eine einfache Funktion lauter reelle und **von Null verschiedene** Nullstellen, so hat auch ihre Ableitung lauter reelle Nullstellen.

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}};$$

alsdann ist:

(1) $$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^p \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (x - c_h)}.$$

Ist $x = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle von $f'(x)$, so ist:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(\alpha - c_h + i\beta)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha - c_h - i\beta}{c_h^p((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)},$$

oder auch, wenn man den reellen und den imaginären Bestandteil trennt:

$$\alpha \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0, \tag{2}$$

$$\beta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0. \tag{3}$$

Angenommen, es wäre $\beta \neq 0$, so müßte nach (3):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0 \tag{4}$$

sein, und (2) würde sich mithin reduzieren auf:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0. \tag{5}$$

Nun können aber die Gleichungen (4) und (5) nicht zugleich statthaben, weil die linke Seite der einen oder der andern, je nachdem p gerade oder ungerade ist, aus lauter positiven Summanden besteht. Folglich muß $\beta = 0$ sein.

227. Man kann hinzufügen, daß, wenn alle Nullstellen der Funktion positiv sind, dasselbe für die Nullstellen ihrer Ableitung stattfindet. — Es kann nämlich unter dieser Voraussetzung die rechte Seite von (1) für $x \leq 0$ nicht Null werden.

Für einfache Funktionen vom Range Null gilt dieser Satz, auch wenn sie die Nullstelle 0 besitzen. Aus der Gleichung:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h}$$

ersieht man nämlich, daß, wenn $c_h > 0$ für jedes h ist, $f'(x)$ für $x < 0$ nicht verschwinden kann. Mit Beachtung des Satzes Art. 225 kann man also schließen, daß, wenn keine Nullstelle einer Funktion von der Höhe 0 komplex oder negativ ist, dasselbe für ihre Ableitung statthat.

Ist dagegen der Rang p der im Anfangspunkte verschwindenden einfachen Funktion $f(x)$, deren übrige Nullstellen reell und positiv sind, eine ungerade Zahl, so hat die Ableitung notwendig negative Nullstellen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nämlich die rechte Seite der Gleichung:

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = m + x^{p+1}\sum \frac{1}{c_h^p(x-c_h)}$$

für alle negativen Werte von x endlich, sie hat ferner für $x=0$ den positiven Wert m und strebt für $\lim x = -\infty$ dem Werte $-\infty$ zu. Daraus folgt (Art. 102), daß es mindestens einen negativen Wert von x gibt, welcher die rechte Seite zu Null macht.

228. Ist die Funktion:

$$f(x) = e^{Ax^{r+1}+Bx^r} x^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k c_h^k}}$$

gegeben, wo die c_h und ebenso A und B reell sind, A aber nicht positiv[1]) ist und r die ungerade der beiden Zahlen p, $p+1$ bezeichnet, so besitzt die Funktion $f'(x)$ eine endliche Anzahl komplexer Nullstellen, und deren Argumente liegen in den Intervallen:

$$\left.\begin{array}{r} (2\lambda-1)\frac{\pi}{r} \cdots \quad 2\lambda\frac{\pi}{r} \\ -(2\lambda-1)\frac{\pi}{r} \cdots -2\lambda\frac{\pi}{r} \end{array}\right\} \left(\lambda = 1, 2, \cdots, \frac{r-1}{2}\right).$$

Mit anderen Worten: Teilt man die Ebene durch Strahlen, die vom Anfangspunkte ausgehen und von denen einer die positive reelle Achse sein mag, in $2r$ gleiche Winkelräume, und bezeichnet man, indem man von dieser Achse aus nach beiden Richtungen geht, jeden Winkelraum mit einer fortlaufenden Ordnungszahl, so können sich die komplexen Nullstellen nur in den Räumen mit gerader Zahl befinden.

Außerdem liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von $f(x)$ von nicht entgegengesetztem Vorzeichen eine einzige (reelle) Nullstelle von $f'(x)$.

Setzen wir:

$$r = p + 1 - \varepsilon,$$

wo ε entweder 0 oder 1 bedeutet, je nachdem p gerade oder ungerade ist, so haben wir:

$$\frac{f'(x)}{x^{r-1}f(x)} = (r+1)Ax + rB + \frac{m}{x^r} + x^{\varepsilon}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p(x-c_h)}.$$

---

1) Desaint (129), der einen Satz aufstellt, von dem der gegenwärtige eine Verallgemeinerung ist, sagt irrtümlich, A müsse positiv sein.

Nun ist:

$$\frac{x^{\varepsilon}}{c_h^p(x-c_h)} = \left(\frac{x}{c_h}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{c_h^{r-1}(x-c_h)},$$

ferner für beide Werte, die ε annehmen kann:

$$\left(\frac{x}{c_h}\right)^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon \frac{x-c_h}{c_h};$$

folglich ist:

$$\frac{x^{\varepsilon}}{c_h^p(x-c_h)} = \left(\frac{x}{c_h}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{c_h^{r-1}(x-c_h)} = \frac{1}{c_h^{r-1}(x-c_h)} + \varepsilon \frac{1}{c_h^r}$$

und:

$$(1) \quad \frac{f'(x)}{x^{r-1}f(x)} = (r+1)Ax + rB + \frac{m}{x^r} + \sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{c_h^{r-1}(x-c_h)} + \varepsilon\frac{1}{c_h^r}\right].$$

Ist $x = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ eine komplexe Nullstelle von $f'(x)$, so ergibt sich hieraus:

$$(r+1)A\varrho(\cos\theta + i\sin\theta) + rB + \frac{m}{\varrho^r}(\cos r\theta - i\sin r\theta) +$$

$$+\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{\varrho\cos\theta - c_h - i\varrho\sin\theta}{c_h^{r-1}((\varrho\cos\theta - c_h)^2 + \varrho^2\sin^2\theta)} + \varepsilon\frac{1}{c_h^r}\right] = 0$$

und, wenn man den Koeffizienten von i gleich Null setzt:

$$(2) \quad (r+1)A\varrho\sin\theta - \frac{m}{\varrho^r}\sin r\theta -$$

$$- \varrho\sin\theta\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho^2 + c_h^2 - 2\varrho c_h\cos\theta)} = 0;$$

daraus ergibt sich:

$$(3) \qquad \frac{\sin r\theta}{\sin\theta} = \left[(r+1)A - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho^2 + c_h^2 - 2\varrho c_h\cos\theta)}\right]\frac{\varrho^{r+1}}{m},$$

folglich mit Rücksicht darauf, daß A nicht positiv und $r-1$ gerade ist:

$$\frac{\sin r\theta}{\sin\theta} < 0.$$

Das heißt:

Wenn $0 < \theta < \pi$, so ist $(2\lambda - 1)\frac{\pi}{r} < \theta < 2\lambda\frac{\pi}{r}$;

wenn $0 > \theta > -\pi$, so ist $-(2\lambda - 1)\frac{\pi}{r} > \theta > -2\lambda\frac{\pi}{r}$,

wo λ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Der Kürze wegen schreiben wir (3) folgendermaßen:

$$\frac{\sin r\theta}{\sin\theta} = -L\frac{\varrho^{r+1}}{m},$$

wo L eine positive Größe ist; es folgt hieraus:

$$\varrho^{r+1} = -\frac{m}{L}\frac{\sin r\theta}{\sin\theta}. \tag{4}$$

Für $\varrho > 2, |c_h| > 2$ hat man:

$$\varrho + |c_h| < \varrho\,|c_h|,$$

folglich:

$$\varrho^2 + c_h^2 + 2\varrho\,|c_h| < \varrho^2 c_h^2;$$

um so mehr ist deshalb:

$$\varrho^2 + c_h^2 - 2\varrho c_h \cos\theta < \varrho^2 c_h^2$$

und:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho^2 + c_h^2 - 2\varrho c_h\cos\theta)} > \frac{1}{\varrho^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r+1}},$$

folglich:

$$L > \frac{1}{\varrho^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r+1}},$$

wo die rechts auftretende Reihe aus lauter positiven Gliedern besteht und konvergent ist.

Ferner ist:

$$|\sin r\theta| < 1, \quad |\sin\theta| \geqq \sin\frac{\pi}{r},$$

folglich erhält man aus (4):

$$\varrho^{r+1} < \frac{m\varrho^2}{\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r+1}}}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{r}}$$

oder auch:

$$\varrho^{r-1} < \frac{m}{\sin\frac{\pi}{r}\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r+1}}}.$$

Es folgt daraus für $r > 1$, daß die absoluten Beträge der komplexen Nullstellen von $f'(x)$ sämtlich kleiner sind als eine bestimmte endliche Größe, und daß mithin (Art. 206) die Anzahl dieser Nullstellen endlich ist.

Schließlich ersieht man leicht, daß, wenn x in wachsendem Sinne zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von $f(x)$ mit nicht entgegengesetztem Vorzeichen variiert, die rechte Seite von (1) beständig abnehmend von $+\infty$ nach $-\infty$ übergeht. Daraus folgt, daß in dem betreffenden Intervalle nur eine einzige Nullstelle der Ableitung liegt.

Für $r=1$ reduziert sich (2) auf:

$$\sin\theta\left[2A\varrho-\frac{m}{\varrho}-\varrho\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\varrho^2+c_h^2-2\varrho c_h\cos\theta}\right]=0,$$

eine Gleichung, die, da $A<0$ ist, nur durch $\sin\theta=0$ befriedigt werden kann. Ist also $p=0$ oder $p=1$, so hat die Ableitung keine komplexen Nullstellen (vgl. Art. 225).

Ein zweiter Fall, in welchem die Nullstellen der Ableitung sämtlich reell sind, tritt ein, wenn $m=0$ ist. In der Tat reduziert sich dann die linke Seite von (2) auf:

$$\varrho\sin\theta\left[(r+1)A-\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho^2+c_h^2-2\varrho c_h\cos\theta)}\right],$$

ein Ausdruck, der für $\varrho \neq 0$ nur Null sein kann, wenn $\sin\theta=0$ ist.

229. Der eben bewiesene Satz stellt nur eine Beschränkung hinsichtlich der Anzahl und der Argumente der komplexen Nullstellen der Ableitung fest; er gibt uns daher keine Gewißheit darüber, ob es auch Funktionen von der betreffenden Beschaffenheit gibt, deren Ableitung wirklich komplexe Nullstellen besitzt. Das folgende Beispiel möge dazu dienen, die Existenz solcher Funktionen außer Zweifel zu setzen.

Es sei $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ eine unbegrenzt zunehmende Folge positiver Zahlen von der Art, daß $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^s}$ nur für $s\geqq 3$ konvergiert. Wir bilden die einfache Funktion vom Range 2 mit der Doppelnullstelle 0 und den einfachen Nullstellen $\pm\gamma_1, \pm\gamma_2, \cdots$:

$$f(x)=x^2\prod_{h=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{\gamma_h}\right)e^{\frac{x}{\gamma_h}+\frac{x^2}{2\gamma_h^2}}\left(1+\frac{x}{\gamma_h}\right)e^{-\frac{x}{\gamma_h}+\frac{x^2}{2\gamma_h^2}}\right]$$

$$=x^2\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\gamma_h^2}\right)e^{\frac{x^2}{\gamma_h^2}}.$$

Setzen wir $x^2 = y$, $\gamma_h^2 = \delta_h$, so ist:

$$f(x) = \varphi(y) = y \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{\delta_h}\right) e^{\frac{y}{\delta_h}},$$

woraus (Art. 169) folgt:

$$f'(x) = 2x\varphi'(y).$$

Da $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^t}$ nur für $t \geqq \frac{3}{2}$ konvergiert, so ist $\varphi(y)$ eine einfache Funktion vom Range 1, die außer der Nullstelle 0 lauter reelle und positive Nullstellen besitzt. Daraus folgt (Art. 227), daß $\varphi'(y)$ negative, also $f'(x)$ rein imaginäre Nullstellen besitzt.

230. Die Sätze der vorhergehenden Artikel sind verschiedener Verallgemeinerungen fähig. Einige davon ergeben sich von selbst, wenn man beachtet (Art. 216, 217):

daß eine Substitution von der Form $x = Ay + B$ (Transformation der reellen Achse in eine beliebige Gerade der Ebene) eine einfache Funktion vom Range 0 in eine Funktion von derselben Natur überführt;

daß dasselbe für eine Funktion vom Range 1 gilt, sobald B (der neue Anfangspunkt) Nullstelle ihrer Ableitung ist;

daß eine Substitution von der Form $x = Ay$ (Drehung der reellen Achse um den Anfangspunkt) eine einfache Funktion vom Range p in eine Funktion von derselben Beschaffenheit überführt.

Dementsprechend erhält man folgende Sätze:

Liegen die Nullstellen einer einfachen Funktion vom Range 0 auf einer beliebigen Geraden, so liegen die Nullstellen ihrer Ableitung auf derselben Geraden.

Liegen die Nullstellen einer einfachen Funktion vom Range 1 auf einer Geraden, die eine Nullstelle der Ableitung enthält, so liegen alle übrigen Nullstellen der Ableitung auf derselben Geraden.

Sind die Nullstellen einer einfachen Funktion, deren Rang > 1 ist, von Null verschieden und liegen sie auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, so liegen die Nullstellen ihrer Ableitung auf derselben Geraden.

231. Liegen die Nullstellen einer einfachen Funktion vom Range 1 sämtlich auf einer Geraden, so liegen die Nullstellen ihrer Ableitung sämtlich auf derjenigen Seite dieser Geraden, auf der der Anfangspunkt liegt.

Wir dürfen die Gerade als parallel zur Achse der imaginären Größen voraussetzen, da wir ja, wenn sie es nicht wäre, mittels einer passenden Substitution von der Form $x = Ay$ auf diesen Fall zurückgehen könnten.

Es sei also $c_h = \mu + i\nu_h$, und $x = \alpha + i\beta$ bedeute eine Nullstelle der Ableitung. Dann muß sein:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h(x - c_h)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{[\mu + i\nu_h][(\alpha - \mu) + i(\beta - \nu_h)]};$$

daraus folgt, wenn man:

$$(\mu^2 + \nu_h^2)[(\alpha - \mu)^2 + (\beta - \nu_h)^2] = \delta_h^2$$

setzt:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\mu - i\nu_h)[(\alpha - \mu) - i(\beta - \nu_h)]}{\delta_h^2},$$

und durch Sonderung des reellen und des imaginären Bestandteiles:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu(\alpha - \mu)S_0 - \beta S_1 + S_2 = 0, \\ -\beta\mu S_0 + (2\mu - \alpha)S_1 = 0, \end{cases}$$

wo:

$$S_0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2}, \quad S_1 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta_h^2}, \quad S_2 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h^2}{\delta_h^2}.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung (1) mit α^2, die zweite mit $-\alpha\beta$, so erhalten wir durch Summierung:

$$[\mu(\alpha - \mu)\alpha^2 + \mu\alpha\beta^2]S_0 + [-\alpha^2\beta - \alpha\beta(2\mu - \alpha)]S_1 + \alpha^2 S_2 = 0,$$

oder auch:

$$\mu(\alpha - \mu)(\alpha^2 + \beta^2)S_0 + \mu^2\beta^2 S_0 - 2\mu\alpha\beta S_1 + \alpha^2 S_2 = 0,$$

oder endlich:

$$\mu(\alpha - \mu)(\alpha^2 + \beta^2)S_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\mu\beta - \nu_h\alpha)^2}{\delta_h^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$\mu(\alpha - \mu) < 0,$$

eine Ungleichung, durch die der obige Satz bewiesen wird.

232. Liegen die Nullstellen einer einfachen Funktion 0-ten Ranges auf zwei parallelen Geraden, so liegen diejenigen ihrer Ableitung sämtlich zwischen den beiden Geraden.

Durch eine lineare Substitution läßt sich bewerkstelligen, daß die Geraden der y-Achse parallel werden und von ihr gleichen Abstand haben; man hat dann $c_h = \varepsilon_h \mu + i\nu_h$, wo:

$$\varepsilon_h = \pm 1.$$

Ist $x = \alpha + i\beta$ eine Nullstelle der Ableitung, so muß sein:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - \varepsilon_h \mu) + i(\beta - \nu_h)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\alpha - \varepsilon_h \mu) - i(\beta - \nu_h)}{(\alpha - \varepsilon_h \mu)^2 + (\beta - \nu_h)^2};$$

setzt man $(\alpha - \varepsilon_h \mu)^2 + (\beta - \nu_h)^2 = \delta_h^2$, so folgt daraus:

$$\alpha \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2} - \mu \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{\delta_h^2} = 0, \quad \beta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta_h^2} = 0.$$

Mit Rücksicht darauf, daß:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{\delta_h^2} \right| < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2},$$

folgt aus der ersten dieser Gleichungen $\left| \frac{\alpha}{\mu} \right| < 1$, womit der Satz bewiesen ist.

233. Liegen die Nullstellen einer einfachen Funktion 0-ten Ranges sämtlich auf derselben Seite einer bestimmten Geraden, so findet dasselbe für die Nullstellen ihrer Ableitung statt.

Nehmen wir als jene Gerade die reelle Achse, was stets möglich ist, und setzen wir $c_h = \mu_h + i\nu_h$, so haben alle ν_h dasselbe Vorzeichen, z. B. das positive. Sodann ist, wenn wir mit $x = \alpha + i\beta$ eine Nullstelle der Ableitung bezeichnen:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha - \mu_h + i(\beta - \nu_h)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha - \mu_h - i(\beta - \nu_h)}{(\alpha - \mu_h)^2 + (\beta - \nu_h)^2};$$

setzt man $(\alpha - \mu_h)^2 + (\beta - \nu_h)^2 = \delta_h^2$, so folgt:

$$(1) \qquad \alpha \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h}{\delta_h^2}, \quad \beta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta_h^2}.$$

Man ersieht daraus, daß auch β positiv sein muß.

234. Liegen die Nullstellen einer einfachen Funktion 0-ten Ranges sämtlich innerhalb eines spitzen Winkels, so liegen die Nullstellen ihrer Ableitung innerhalb desselben Winkels.

Wir dürfen voraussetzen, der Scheitel des Winkels sei der Anfangspunkt, der eine seiner Schenkel sei die reelle Achse, der andre aber falle in den ersten Quadranten; dann ist nach den Bezeichnungen des vorigen Artikels $\mu_h > 0$, $\nu_h > 0$, und außerdem ist das Verhältnis $\frac{\nu_h}{\mu_h}$ zwischen 0 und einer bestimmten endlichen positiven Größe l (Richtungskoeffizient des zweiten Schenkels) enthalten. Folglich hat man:

$$0 < \frac{\frac{\nu_h}{\delta_h^2}}{\frac{\mu_h}{\delta_h^2}} < l,$$

und infolgedessen:

$$0 < \frac{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta_h^2}}{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h}{\delta_h^2}} < l,$$

oder auch wegen Gleichung (1) des vorigen Artikels:

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} < l.$$

235. Bevor wir die wenigen bekannten Sätze, welche die Bestimmung des Ranges einer ganzen Funktion betreffen, darlegen, wollen wir folgenden Hilfssatz beweisen:

Sind $c_1, c_2, \cdots$ die Nullstellen einer ganzen Funktion, $r_1, r_2, \cdots$ die entsprechenden Konvergenzzahlen, so ist die Reihe:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h}(x - c_h)}$$

in jedem endlichen, keinen der Punkte c_h enthaltenden Bereiche gleichmäßig konvergent.

Sei C der betrachtete Bereich; wir können dann um den Anfangspunkt einen Kreis beschreiben, der in seinem Innern den Bereich C enthält und durch keinen Punkt c_h hindurchgeht. Ist ϱ der Radius dieses Kreises und:

$$|c_q| < \varrho < |c_{q+1}|,$$

so können wir eine Größe σ von der Art angeben, daß die mit dem Halbmesser σ um die Punkte $c_1, c_2, \cdots, c_q$ beschriebenen Kreise sämtlich außerhalb C, aber innerhalb des Kreises ϱ liegen. Dann ist der Bereich C in dem zwischen dem Kreise ϱ und den Kreisen σ liegenden Bereiche D enthalten, und es genügt somit zu beweisen, daß die Reihe (1), deren sämtliche Glieder in allen Punkten von D endlich sind, in D gleichmäßig konvergent ist.

Bezeichnen wir mit m irgend eine Zahl, die größer als q ist, so haben wir für $|x| < \varrho$:

$$\left|\sum_{h=m}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h}(x-c_h)}\right| \leqq \sum_{h=m}^{\infty} \frac{\varrho^{r_h}}{|c_h|^{r_h+1}\left|1-\frac{x}{c_h}\right|};$$

es ist aber:

$$\left|1-\frac{x}{c_h}\right| \geqq 1-\left|\frac{x}{c_h}\right| \geqq 1-\frac{\varrho}{|c_{q+1}|},$$

folglich ist:

$$\left|\sum_{h=m}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h}(x-c_h)}\right| \leqq \frac{1}{1-\frac{\varrho}{|c_{q+1}|}} \sum_{h=m}^{\infty} \frac{\varrho^{r_h}}{|c_h|^{r_h+1}}$$

Nun ist die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h+1}}$ für alle endlichen Werte von x, im besondern also auch für $x=\varrho$ unbedingt konvergent; nach Annahme einer willkürlichen Größe τ läßt sich also eine Zahl n von der Art bestimmen, das für jedes $m > n$ gilt:

$$\sum_{h=m}^{\infty} \frac{\varrho^{r_h}}{|c_h|^{r_h+1}} < \tau\left(1-\frac{\varrho}{|c_{q+1}|}\right).$$

Daraus folgt, daß sich bei beliebigem τ eine Zahl n von der Art angeben läßt, daß für jedes m, das größer ist als n und q, und für $|x| < \varrho$:

$$\left|\sum_{h=m}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h}(x-c_h)}\right| < \tau,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

236. Sind $c_1, c_2, \cdots$ die Nullstellen einer ganzen Funktion und ist, wenn $|c_h| = \gamma_h$ gesetzt wird:

$$\lim_{h=\infty} \gamma_h^{p-1}(\gamma_{h+1}-\gamma_h) = \lambda,$$

wo p eine nicht negative ganze Zahl, λ eine endliche positive Größe bedeutet, so ist die Funktion vom Range p **(Satz von De Sparre).**

Nimmt man eine positive Größe $\theta < \lambda$ an, so läßt sich eine Zahl m von der Art angeben, daß für jedes $h \geqq m$:

$$\gamma_h^{p-1}(\gamma_{h+1} - \gamma_h) > \theta$$

ist. Man hat also:

$$\gamma_m^{p-1}(\gamma_{m+1} - \gamma_m) > \theta,$$
$$\gamma_{m+1}^{p-1}(\gamma_{m+2} - \gamma_{m+1}) > \theta,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

oder auch:

(1) $$\gamma_{m+1} > \gamma_m + \frac{\theta}{\gamma_m^{p-1}}, \quad \gamma_{m+2} > \gamma_{m+1} + \frac{\theta}{\gamma_{m+1}^{p-1}}, \cdots.$$

Setzen wir zunächst $p > 0$ voraus, und erheben wir die Ungleichungen (1) in die p-te Potenz, so erhalten wir:

$$\gamma_{m+1}^p > \gamma_m^p + p\theta + \cdots, \quad \gamma_{m+2}^p > \gamma_{m+1}^p + p\theta + \cdots, \cdots;$$

daraus ergibt sich:

$$\gamma_{m+1}^p > \gamma_m^p + p\theta, \quad \gamma_{m+2}^p > \gamma_m^p + 2p\theta, \cdots,$$

und um so mehr:

$$\gamma_{m+1}^p > p\theta, \quad \gamma_{m+2}^p > 2p\theta, \cdots.$$

Es folgt hieraus:

$$\frac{1}{\gamma_{m+1}^p} < \frac{1}{p\theta}, \quad \frac{1}{\gamma_{m+2}^p} < \frac{1}{2p\theta}, \cdots,$$

und durch Erhebung in die $\frac{p+1}{p}$-te Potenz und Summierung:

$$\frac{1}{\gamma_{m+1}^{p+1}} + \frac{1}{\gamma_{m+2}^{p+1}} + \cdots < \frac{1}{(p\theta)^{\frac{p+1}{p}}}\left[\frac{1}{1^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{1}{2^{\frac{p+1}{p}}} + \cdots\right];$$

nun ist die Reihe auf der rechten Seite bekanntlich konvergent, folglich konvergiert auch die auf der linken Seite, und die Funktion ist höchstens vom Range p.

Nimmt man andrerseits eine Größe $\varkappa > \lambda$ an, so läßt sich eine Zahl n von der Art angeben, daß für jedes $h \geqq n$:

$$\gamma_h^{p-1}(\gamma_{h+1} - \gamma_h) < \varkappa.$$

Es ist also dann:

$$\gamma_n^{p-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) < \varkappa,$$

oder auch:

$$\gamma_{n+1} < \gamma_n + \frac{\varkappa}{\gamma_n^{p-1}},$$

und nach Erhebung in die p-te Potenz:

$$\gamma_{n+1}^p < \gamma_n^p + \varkappa\left[p + \binom{p}{2}\frac{\varkappa}{\gamma_n^p} + \binom{p}{3}\frac{\varkappa^2}{\gamma_n^{2p}} + \cdots\right].$$

Da nun $\lim\limits_{h=\infty} \gamma_h = \infty$, so läßt sich, unter der Voraussetzung $p > 0$, n so groß annehmen, daß für jedes $h \geqq n$:

$$\gamma_h^p > \varkappa$$

wird; aus der vorigen Ungleichung erhält man dann:

$$\gamma_{n+1}^p < \gamma_n^p + \varkappa\left[p + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \cdots\right] = \gamma_n^p + \varkappa(2^p - 1),$$

oder, wenn wir $\varkappa(2^p - 1) = \mu$ setzen:

$$\gamma_{n+1}^p < \gamma_n^p + \mu.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\gamma_{n+2}^p < \gamma_{n+1}^p + \mu, \cdots,$$

folglich:

$$\gamma_{n+2}^p < \gamma_n^p + 2\mu, \cdots.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}^p} + \frac{1}{\gamma_{n+2}^p} + \cdots > \frac{1}{\gamma_n^p + \mu} + \frac{1}{\gamma_n^p + 2\mu} + \cdots > \frac{1}{\gamma_n^p + \mu} + \frac{1}{2(\gamma_n^p + \mu)} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{\gamma_n^p + \mu}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots\right];$$

nun ist die letzte Reihe aber divergent, folglich ist es auch die Reihe auf der linken Seite, und die betreffende Funktion ist genau vom Range p.

Es sei jetzt $p = 0$; die Ungleichungen (1) lauten dann:

$$\gamma_{m+1} > \gamma_m(1 + \theta),\ \gamma_{m+2} > \gamma_{m+1}(1 + \theta), \cdots,$$

woraus sich ergibt:

$$\gamma_{m+1} > \gamma_m(1 + \theta),\ \gamma_{m+2} > \gamma_m(1 + \theta)^2, \cdots;$$

und folglich:

$$\frac{1}{\gamma_m} + \frac{1}{\gamma_{m+1}} + \frac{1}{\gamma_{m+2}} + \cdots < \frac{1}{\gamma_m}\left[1 + \frac{1}{1+\theta} + \frac{1}{(1+\theta)^2} + \cdots\right].$$

Nun ist die Reihe auf der rechten Seite konvergent, folglich ist es auch die links stehende, und die betreffende Funktion ist daher 0-ten Ranges.

237. Die Umkehrung des Satzes von De Sparre ist nicht allgemein gültig. Es liege z. B. eine Folge zunehmender positiver Größen γ_h von der Art vor, daß:

$$\lim_{h=\infty} (\gamma_{h+1} - \gamma_h) = \lambda > 0$$

ist; wegen des soeben bewiesenen Satzes sind dann die γ_h Nullstellen einer Funktion vom Range 1. Indem wir $\theta = \frac{3}{4}\lambda$ nehmen, bestimmen wir, wie vorher, eine Zahl m von der Art, daß für jedes $h \geqq m$:

$$\gamma_{h+1} - \gamma_h > \theta$$

wird; die Größen $\gamma_h + \theta$ sind für $h \geqq m$ offenbar sämtlich von den γ_h verschieden und überdies (Art. 216) Nullstellen einer Funktion vom Range 1. Daraus folgt, daß auch die Größen:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots;\ \gamma_m + \theta,\ \gamma_{m+1} + \theta,\ \cdots$$

Nullstellen einer Funktion vom Range 1 sind. Ordnet man sie nach zunehmender Größe, so erhält man die Folge:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_m,\ \gamma_m + \theta,\ \gamma_{m+1},\ \gamma_{m+1} + \theta,\ \cdots;$$

bezeichnet man die Glieder dieser Folge mit:

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_m,\ \delta_{m+1},\ \delta_{m+2},\ \delta_{m+3},\ \cdots,$$

so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{m+2h+1} - \delta_{m+2h} = \theta = \tfrac{3}{4}\lambda \\ \lim_{h=\infty} (\delta_{m+2h+2} - \delta_{m+2h+1}) = \tfrac{1}{4}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (h = 0, 1, \cdots),$$

so daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder keiner Grenze zustrebt.

238. Ist $f(x)$ eine Normalfunktion von der Höhe p, so hat man:

(1) $$\lim_{\varrho=\infty} \mathfrak{M} \frac{f'(\varrho)}{\varrho^p f(\varrho)} = 0.$$

Ist ferner p der Rang von $f(x)$, so strebt der Ausdruck:

$$\mathfrak{M}\frac{f'(\varrho)}{\varrho^{p-1}f(\varrho)}, \tag{2}$$

wenn ϱ unbegrenzt wächst, keiner endlichen Grenze zu.

Bevor wir den Satz beweisen, müssen wir eine Bemerkung vorausschicken.

Die Funktion $\frac{f'(x)}{x^p f(x)}$ ist auf jeder durch keine Nullstelle von $f(x)$ hindurchgehenden Kreislinie um den Anfangspunkt endlich und stetig; folglich hat der Ausdruck:

$$\mathfrak{M}\frac{f'(\varrho)}{\varrho^p f(\varrho)}$$

für alle diese und nur für diese Kreise einen bestimmten Sinn.

Die Werte von ϱ, welche absolute Beträge der Nullstellen von $f(x)$ sind, bilden eine isolierte Menge A, die die einzige Grenzstelle ∞ besitzt; nennt man B die Menge der reellen und positiven Werte, die A nicht angehören, so gibt es stets unendlich viele Elemente von B, die größer sind als eine ganz beliebige positive Größe λ. Der Sinn der Gleichung (1) ist dann, daß sich nach Annahme einer willkürlichen positiven Größe σ immer eine positive Größe λ von der Art angeben läßt, daß für alle Elemente ϱ von B, die größer sind als λ:

$$\left|\mathfrak{M}\frac{f'(\varrho)}{\varrho^p f(\varrho)}\right| < \sigma$$

ist. Analoge Betrachtungen gelten offenbar auch für den Ausdruck (2).

Es sei jetzt:

$$f(x) = e^{g(x)}x^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k c_h^k}},$$

wo $g(x)$ ein Polynom von nicht höherem Grade als p ist, und es möge $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{1}{|c_h|^{p+1}}$ konvergieren, $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{1}{|c_h|^{p}}$ dagegen divergieren. Man hat dann:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = \frac{g'(x)}{x^p} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p(x-c_h)}$$

$$= \frac{g'(x)}{x^p} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty}\frac{x}{c_h^{p+1}(x-c_h)} - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p+1}},$$

oder auch, wenn wir $g(x) = \sum_{i=0}^{p} b_i x^i$ setzen:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{i b_i}{x^{p+1-i}} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h^{p+1}(x - c_h)} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}.$$

Greifen wir aus der Menge B einen Wert ϱ heraus und nehmen wir:

$$|c_q| < \varrho < |c_{q+1}|$$

an, so haben wir (Art. 125, 127, 131):

$$\mathfrak{M} \frac{i b_i}{\varrho^{p+1-i}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, p),$$

$$\mathfrak{M} \frac{m}{\varrho^{p+1}} = 0,$$

$$\mathfrak{M} \frac{\varrho}{c_h^{p+1}(\varrho - c_h)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c_h^{p+1}} & \text{für } h \leqq q, \\ 0 & \text{für } h > q, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M} \frac{1}{c_h^{p+1}} = \frac{1}{c_h^{p+1}},$$

folglich (Art. 126) mit Rücksicht darauf, daß (Art. 235) die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(x - c_h)}$, und demnach auch die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h^{p+1}(x - c_h)}$, auf dem Kreise ϱ gleichmäßig konvergent ist:

$$\mathfrak{M} \frac{f'(\varrho)}{\varrho^p f(\varrho)} = \sum_{h=1}^{q} \frac{1}{c_h^{p+1}} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}} = -\sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}},$$

und schließlich, da $\lim q = \infty$ für $\lim \varrho = \infty$:

$$\lim_{\varrho=\infty} \mathfrak{M} \frac{f'(x)}{\varrho^p f(\varrho)} = 0.$$

Man hat weiterhin:

$$\frac{f'(x)}{x^{p-1} f(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{i b_i}{x^{p-i}} + \frac{m}{x^p} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x}{c_h^p(x - c_h)}.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{M}\frac{ib_i}{\varrho^{p-i}} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i = 1, 2, \cdots, p-1, \\ pb_p & \text{für} \quad i = p, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M}\frac{m}{\varrho^p} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad p > 0, \\ m & \text{für} \quad p = 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M}\frac{\varrho}{c_h^p(\varrho - c_h)} = \begin{cases} \frac{1}{c_h^p} & \text{für} \quad h \leqq q, \\ 0 & \text{für} \quad h > q; \end{cases}$$

bezeichnen wir also mit ε einen Koeffizienten, der für $p > 0$ gleich Null, für $p = 0$ aber 1 wird, so ist:

$$\mathfrak{M}\frac{f'(\varrho)}{\varrho^{p-1}f(\varrho)} = pb_p + \varepsilon m + \sum_{h=1}^{q}\frac{1}{c_h^p}.$$

Da aber die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p}$ der Voraussetzung nach nicht konvergiert, so ist $\lim\limits_{\varrho=\infty}\mathfrak{M}\frac{f'(\varrho)}{\varrho^{p-1}f(\varrho)}$ entweder überhaupt nicht vorhanden oder unendlich, je nachdem diese Reihe unbestimmt oder divergent ist.

Es muß bemerkt werden, daß die Beziehung (1) auch dann noch gilt, wenn an Stelle von p irgend eine ganze Zahl tritt, die größer ist als p. In der Tat kann eine Normalfunktion von der Höhe p stets (Art. 209) auf die Form einer Normalfunktion von größerer Höhe als p gebracht werden.

239. Ist $f(x)$ eine ganze Funktion und gilt die Beziehung:

$$\lim_{\varrho=\infty}\mathfrak{M}\frac{f'(\varrho)}{\varrho^t f(\varrho)} = 0 \tag{1}$$

stets und nur für diejenigen ganzen Zahlen t, die nicht kleiner sind als eine nicht negative ganze Zahl p, so ist $f(x)$ eine Normalfunktion von der Höhe p.

Es sei:

$$f(x) = e^{g(x)}x^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{r_h}\frac{x^k}{kc_h^k}}, \tag{2}$$

wo:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i.$$

Dann ist:

$$\frac{f'(x)}{x^t f(x)} = \sum_{\iota=1}^{\infty} \iota b_\iota x^{\iota-t-1} + \frac{m}{x^{t+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h - t}}{c_h^{r_h}(x - c_h)}.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{M}\, \varrho^{\iota-t-1} = \begin{cases} 0 \text{ für } \iota \neq t+1, \\ 1 \text{ für } \iota = t+1, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M}\, \varrho^{-t-1} = 0;$$

ferner, wenn man in (1) und (2) Art. 131 $f(x) = x^{r_h - t - 1}$ setzt und c_h anstatt c schreibt:

$$\mathfrak{M}\, \frac{\varrho^{r_h - t}}{\varrho - c_h} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_h^k\, \mathfrak{M}\, \varrho^{r_h - k - t - 1} \text{ für } |c_h| < \varrho, \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} c_h^{-k}\, \mathfrak{M}\, \varrho^{r_h + k - t - 1} \text{ für } |c_h| > \varrho. \end{cases}$$

Die Zahlen r_h können wir als mit h unbeschränkt wachsend annehmen, weil wir, ohne die absolute Konvergenz des unendlichen Produktes zu beeinträchtigen, zu den in (2) als Exponenten vorkommenden Polynomen stets so viele Glieder hinzufügen können als wir wollen, vorausgesetzt nur, daß wir dieselben Glieder, mit entgegengesetztem Zeichen behaftet, in $g(x)$ hineinsetzen. Wir können sogar sämtliche r_h größer als p voraussetzen. Nehmen wir demnach ϱ so groß, daß $r_h > t$ wird für $|c_h| > \varrho$, so ist:

$$\mathfrak{M}\, \varrho^{r_h + k - t - 1} = 0 \text{ für } |c_h| > \varrho \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

dagegen für $|c_h| < \varrho$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_h^k\, \mathfrak{M}\, \varrho^{r_h - k - t - 1} = \begin{cases} 0 \quad \text{für } r_h \leqq t, \\ \dfrac{1}{c_h^{t+1-r_h}} \text{ für } r_h > t. \end{cases}$$

Bezeichnen wir also den Index des ersten der Punkte c_h, für den $r_h > t$ ist, mit $m_t + 1$, und setzen wir:

$$|c_q| < \varrho < |c_{q+1}|,$$

so ist gemäß den Voraussetzungen des Satzes, für jedes $t \geqq p$:

$$(t+1) b_{t+1} + \lim_{q=\infty} \sum_{k=m_t+1}^{q} \frac{1}{c_h^{t+1}} = 0,$$

mithin:

$$b_{t+1} = -\frac{1}{t+1}\sum_{h=m_t+1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{t+1}},$$

eine Formel, die zeigt, daß $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{p+1}}$ konvergiert.

Wir multiplizieren jetzt mit x^{t+1}, summieren von $t=p$ bis $t=\infty$, indem wir beachten, daß die Summe der linken Seiten, weil sie einen Bestandteil der Entwicklung von $g(x)$ bildet, eine für alle endlichen Werte von x konvergente Reihe ist, und erhalten:

$$\sum_{t=p}^{\infty} b_{t+1}x^{t+1} = -\sum_{t=p}^{\infty}\left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\sum_{h=m_t+1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{t+1}}\right],$$

wo c_h rechts mit allen den Exponenten $t+1$ behaftet erscheint, für die $t < r_h$ ist. Man kann also schreiben:

$$\sum_{t=p}^{\infty} b_{t+1}x^{t+1} = -\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{t=p}^{r_h-1}\frac{x^{t+1}}{(t+1)\,c_h^{t+1}} = -\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{t=p+1}^{r_h}\frac{x^t}{t c_h^t}.$$

Daraus folgt:

$$f(x) = e^{\sum\limits_{i=0}^{p} b_i x^i - \sum\limits_{h=1}^{\infty}\sum\limits_{t=p+1}^{r_h}\frac{x^t}{t c_h^t}}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{r_h}\frac{x^k}{k c_h^k}}$$

oder durch Reduktion:

$$f(x) = e^{\sum\limits_{i=0}^{p} b_i x^i}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k c_h^k}};$$

somit ist $f(x)$ eine Funktion erster Klasse und von nicht größerer Höhe als p.

Andrerseits würde, wenn sie von geringerer Höhe als p wäre, (1) auch (Art. 238) für $t < p$ gelten, was gegen die Voraussetzungen des Satzes verstößt; folglich ist $f(x)$ genau von der Höhe p.

240. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist folgender:

W e n n s i c h $\frac{f'(x)}{x^p f(x)}$, w i e a u c h i m m e r x (ohne doch durch irgend eine Nullstelle von $f(x)$ hindurchzugehen) d e m U n e n d l i c h e n z u s t r e b e, d e r N u l l n ä h e r t, s o i s t $f(x)$ e i n e N o r m a l f u n k t i o n, d e r e n H ö h e $\leqq p$ i s t.

241. Es sei:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}$$

irgend eine ganze Funktion. Wir wollen, wenn ϱ den Radius eines durch keinen der Punkte c_h hindurchgehenden Kreises um den Anfangspunkt bedeutet, den Mittelwert $\mathfrak{M}\,\frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}$ berechnen.

Man hat:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = x\left[g'(x) + \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{r_h}(x - c_h)}\right] = x g'(x) + m + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h+1}}{c_h^{r_h}(x - c_h)},$$

folglich (Art. 125, 126), mit Rücksicht darauf, daß die letzte Reihe (Art. 235) auf dem betrachteten Kreise gleichmäßig konvergent ist:

$$\mathfrak{M}\,\frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)} = \mathfrak{M}\,\varrho g'(\varrho) + m + \sum_{h=1}^{\infty} \mathfrak{M}\,\frac{\varrho^{r_h+1}}{c_h^{r_h}(\varrho - c_h)}.$$

Nun ist $x g'(x)$ eine für alle Werte von x konvergente Potenzreihe ohne konstantes Glied; folglich ist (Art. 128):

$$\mathfrak{M}\,\varrho g'(\varrho) = 0;$$

ist außerdem $|c_h| < \varrho$ für $h \leqq q$, so hat man, wenn in den Formeln des Art. 131 $\left(\frac{x}{c_h}\right)^{r_h}$ an Stelle von $f(x)$ tritt, im Hinblick auf die Formeln des Art. 127:

$$\mathfrak{M}\,\frac{\varrho^{r_h+1}}{c_h^{r_h}(\varrho - c_h)} = -\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{t+r_h}}\,\mathfrak{M}\,\varrho^{t+r_h} = 0 \qquad \text{für } h > q,$$

$$\mathfrak{M}\,\frac{\varrho_h^{r_h+1}}{c_h^{r_h}(\varrho - c_h)} = \sum_{t=0}^{\infty} c_h^{t-r_h}\,\mathfrak{M}\,\varrho^{r_h-t} = 1 \qquad \text{für } h \leqq q.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{M}\,\frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)} = m + q.$$

D. h.: Der Mittelwert von $\frac{x f'(x)}{f(x)}$ längs eines durch keine Nullstelle von $f(x)$ hindurchgehenden Kreises um den Anfangspunkt hat stets einen ganzen und positiven Wert, und zwar gibt dieser die Anzahl der Nullstellen (unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit) an, welche die Funktion $f(x)$ innerhalb jenes Kreises besitzt.

242. Es möge nunmehr der Mittelwert von $\lg|1-x|$[1]) längs eines Kreises vom Radius $\varrho \neq 1$ um den Anfangspunkt berechnet werden. Ist x irgend ein Punkt dieses Kreises, so hat man:

$$1 - x = 1 - \varrho \cos\theta - \varrho i \sin\theta,$$
$$|1-x|^2 = 1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\theta = (1-\varrho e^{i\theta})(1-\varrho e^{-i\theta}),$$

mithin, wenn $\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{M}\lg|1-\varrho| = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\lg[(1-\varrho\alpha^k)(1-\varrho\alpha^{-k})] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\lg\prod_{k=0}^{2^n-1}(1-\varrho\alpha^k)(1-\varrho\alpha^{-k}).$$

Nun ist:

$$\prod_{k=0}^{2^n-1}(1-\varrho\alpha^k) = \prod_{k=0}^{2^n-1}(1-\varrho\alpha^{-k}) = 1-\varrho^{2^n},$$

mithin:

$$\mathfrak{M}\lg|1-\varrho| = \lim_{n=\infty}\lg|1-\varrho^{2^n}|^{\frac{1}{2^n}}.$$

Ist $\varrho < 1$, so hat man:

$$\lim_{n=\infty}|1-\varrho^{2^n}| = 1, \quad \lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n} = 0,$$

somit:

$$\mathfrak{M}\lg|1-\varrho| = 0.$$

Ist $\varrho > 1$, so kann man schreiben:

$$|1-\varrho^{2^n}|^{\frac{1}{2^n}} = (\varrho^{2^n}-1)^{\frac{1}{2^n}} = \varrho\left(1-\frac{1}{\varrho^{2^n}}\right)^{\frac{1}{2^n}};$$

also ist:

$$\mathfrak{M}\lg|1-\varrho| = \lg\varrho.$$

243. Es liege jetzt eine ganze Funktion:

$$f(x) = e^{g(x)}x^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{r_h}\frac{x^k}{kc_h^k}} = e^{g(x)}x^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)e^{P_h(x)}$$

1) Die Definition des hyperbolischen Logarithmus einer reellen positiven Größe ist schon oben (Art 146) angegeben worden.

vor. Wenn man mit $\Re\varphi(x)$ den reellen Bestandteil der Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet, so folgt:

$$|f(x)| = e^{\Re g(x)} |x|^m \prod_{h=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x}{c_h}\right| e^{\Re P_h(x)},$$

mithin:

$$(1)\quad \lg|f(x)| = \Re g(x) + m \lg|x| + \sum_{h=1}^{\infty}\left[\lg\left|1 - \frac{x}{c_h}\right| + \Re P_h(x)\right];$$

die letzte Reihe aber ist in jedem keinen der Punkte c_h enthaltenden Bereiche gleichmäßig konvergent, weil das unendliche Produkt es ist, aus dem sie hergeleitet ist

Nun beachte man, daß, wenn $f_1(x)$ für $\frac{f(x)}{x^m}$ geschrieben wird (Art. 128):

$$\mathfrak{M}\Re g(\varrho) = \Re\mathfrak{M} g(\varrho) = \Re g(0) = \lg|f_1(0)|$$

ist[1]; außerdem ist, da $P_h(x)$ kein konstantes Glied enthält:

$$\mathfrak{M}\Re P_h(\varrho) = \Re\mathfrak{M} P_h(\varrho) = 0.$$

Es folgt sonach aus (1), wenn $|c_h| < \varrho$ für $h \leqq q$, durch Anwendung der letzten Formel des vorigen Artikels:

$$\mathfrak{M} \lg|f(\varrho)| = \lg|f_1(0)| + m \lg \varrho + \sum_{h=1}^{q} \lg\frac{\varrho}{|c_h|},$$

oder auch:

$$\mathfrak{M} \lg|f(\varrho)| = \lg|f_1(0)| + \lg\frac{\varrho^{m+q}}{|c_1||c_2|\cdots|c_q|}.$$

Diese Formel kann als mit dem **Satze von Jensen**[2]) gleichbedeutend angesehen werden.

Bezeichnen wir allgemein mit $M\varphi(\varrho)$ das Maximum der reellen positiven Funktion $\varphi(x)$ auf dem Kreise vom Radius ϱ um den Anfangspunkt, so ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$M \lg|f(\varrho)| \geqq \lg|f_1(0)| + \lg\frac{\varrho^{m+q}}{|c_1 c_2 \cdots c_q|},$$

mithin:

$$M|f(\varrho)| \geqq |f_1(0)| \frac{\varrho^{m+q}}{|c_1 c_2 \cdots c_q|}.$$

---

1) $f_1(0)$ ist nichts anderes als der erste Koeffizient der Entwicklung von $f(x)$ in eine Potenzreihe von x.

2) Goursat 176, Jensen 215, Lindelöf 269, Petersen 364, 365.

Man überzeugt sich nun leicht, daß, $|c_q| < \varrho < |c_{q+1}|$ vorausgesetzt, der Ausdruck:

$$\frac{\varrho^h}{|c_1 c_2 \cdots c_h|}$$

wächst, während h von 1 bis q schreitet, dann aber abnimmt, so daß er seinen Maximalwert für $h = q$ erreicht. Es ist also für jeden Wert von ϱ und h:

$$M|f(\varrho)| \geqq |f_1(0)| \frac{\varrho^{m+h}}{|c_1 c_2 \cdots c_h|}.$$

In dem einfacheren Falle, in dem $m = 0$ ist und die Funktion im Anfangspunkte den Wert 1 annimmt, hat man:

$$M|f(\varrho)| \geqq \frac{\varrho^h}{|c_1 c_2 \cdots c_h|}.$$

244. Aus vorstehender Formel läßt sich eine obere Grenze für die Anzahl der Nullstellen herleiten, deren absoluter Betrag nicht größer ist als eine gegebene Größe τ.

Es handle sich der Einfachheit wegen um eine Funktion $f(x)$, die im Anfangspunkte den Wert 1 annimmt, und es sei:

$$|c_n| \leqq \tau < |c_{n+1}|.$$

Setzen wir $\varrho = \theta\tau$, wo $\theta > 2$, so ist für $h \leqq n$, $|x| = \varrho$:

$$|x - c_h| \geqq |x| - |c_h| \geqq \theta |c_n| - |c_h| \geqq (\theta - 1)|c_n|.$$

Nun ist die Funktion $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\prod\limits_{h=1}^{n}(x - c_h)}$ ebenfalls eine ganze Funktion, und $\varphi(0) = \dfrac{(-1)^n}{\prod\limits_{h=1}^{n} c_h}$, so daß für jeden beliebigen Wert von ϱ (Art. 128):

$$\mathfrak{M}\varphi(\varrho) = \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{h=1}^{n} c_h}$$

wird.

Andrerseits hat man für $|x| = \varrho$:

$$|\varphi(x)| = \left| \frac{f(x)}{\prod\limits_{h=1}^{n}(x - c_h)} \right| \leqq \frac{M(\varrho)}{(\theta - 1)^n |c_n|^n},$$

wobei, wie schon früher (Art. 124), $M(\varrho)$ für $M|f(\varrho)|$ geschrieben

worden ist, mithin (Art. 124):

$$\frac{1}{\prod_{h=1}^{n} |c_h|} \leqq \frac{M(\varrho)}{(\theta-1)^n |c_n|^n},$$

oder auch:

$$(\theta-1)^n \leqq M(\varrho) \prod_{h=1}^{n} \left|\frac{c_h}{c_n}\right| \leqq M(\varrho),$$

und, wenn man die Logarithmen nimmt und bedenkt, daß $\theta - 1 > 1$ ist:

$$n \leqq \frac{\lg M(\varrho)}{\lg(\theta-1)}.$$

245. Ist $f(x)$ eine einfache Funktion mit lauter reellen Nullstellen[1]), so ist $f'(x)$ eine Funktion von gleichem Range wie $f(x)$[2]).

Sind $d_1, d_2, \cdots$ die der Größe nach geordneten positiven Nullstellen von $f(x)$, $-e_1, -e_2, \cdots$ die nach der Größe ihrer absoluten Werte geordneten negativen Nullstellen, so ist in jedem Intervalle $d_h d_{h+1}$ (Art. 228) eine und nur eine Nullstelle s_h, in jedem Intervalle $(-e_h)(-e_{h+1})$ eine und nur eine Nullstelle $-t_h$ von $f'(x)$ enthalten. Außer den Nullstellen s_h, t_h kann $f'(x)$ noch eine endliche Anzahl von Nullstellen, die in dem Intervalle $(-e_1)\,d_1$ liegen, und eine gleichfalls endliche Anzahl komplexer Nullstellen besitzen; sie alle haben auf die Bestimmung des Ranges keinen Einfluß. Aus den Beziehungen:

$$d_h < s_h < d_{h+1}, \quad e_h < t_h < e_{h+1}$$

folgt:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h^{p+1}} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^{p+1}}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h^{p+1}} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^{p+1}};$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^p} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_{h+1}^p} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{d_h^p}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^p} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_{h+1}^p} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{e_h^p}.$$

Ist p der Rang von $f(x)$, so konvergieren die Reihen:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h^{p+1}}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h^{p+1}},$$

---

1) Oder auch das Produkt einer solchen Funktion in einen Exponentialfaktor wie derjenige in Art. 228.

2) Der Satz wurde von Laguerre (238) auch für den etwas allgemeineren Fall bewiesen, daß die betreffende Funktion eine endliche Anzahl komplexer Nullstellen hat Vgl. über diesen Satz das 1. Kapitel des 3. Teiles

während von den Reihen $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h^p}$, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h^p}$ wenigstens eine divergiert. Daraus folgt, daß die Reihen $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^{p+1}}$ und $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^{p+1}}$ konvergieren, während von den Reihen $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^p}$ und $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^p}$ wenigstens eine divergiert. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Funktionen mit einem einzigen, in endlicher Entfernung gelegenen singulären Punkt (C 1 b).

246. Ist $f(x)$ eine eindeutige analytische Funktion mit einem einzigen singulären Punkte c, so verwandelt sich, wenn wir:

$$y = \frac{1}{x - c}$$

setzen, $f(x)$ in eine Funktion von y mit einer einzigen Singularität im Unendlichen, d. h. in eine ganze Funktion von y. Die allgemeinste Form der Funktionen mit einem einzigen singulären Punkte c ist folglich $g\left(\frac{1}{x - c}\right)$, wo g eine ganze Funktion bedeutet; sie ist rational oder transzendent, je nachdem die Singularität polar oder wesentlich ist.

Ein Beispiel für diese Funktionen bietet der Hauptteil (Art. 171, 181) eines isolierten singulären Punktes.

Funktionen mit einer endlichen Anzahl singulärer Punkte (C 2)[1].

247. Es seien $c_1, c_2, \cdots, c_n$ die singulären Punkte, $g_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right)$, $g_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right), \cdots, g_n\left(\frac{1}{x - c_n}\right)$ ihre Hauptteile, wo $g_1, g_2, \cdots, g_n$ also ganze Funktionen ihrer eigenen Argumente bezeichnen. Ist $f(x)$ die zu bildende Funktion, so ist die Differenz:

$$f(x) - g_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right) - g_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right) - \cdots - g_n\left(\frac{1}{x - c_n}\right)$$

1) Maillet (284, 285, 286, 289, 291, 292) nennt solche Funktionen fonctions quasi-entières und ihre Quotienten fonctions quasi-méromorphes.

eine Funktion ohne Singularitäten, folglich (Art. 170) eine Konstante C. Man hat also:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{n} g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + C.$$

Läge einer der singulären Punkte, z. B. c_n, im Unendlichen, so käme $g_n(x)$ statt $g_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$ vor.

Funktionen mit unendlich vielen Polen und einem einzigen wesentlich singulären Punkte (C3a).

248. Wir nehmen zunächst an, der wesentlich singuläre Punkt, der die einzige Grenzstelle der Menge der Pole sein muß, sei der unendlich ferne Punkt. Man kann dann eine ganze Funktion $g(x)$ bilden, welche die gegebenen Pole als Nullstellen besitzt; ist nun $g_1(x)$ eine ganze Funktion, die der einzigen Bedingung unterliegt, daß ihre Nullstellen von denen der Funktion $g(x)$ verschieden sind, so ist die allgemeinste Funktion, die den vorgeschriebenen Bedingungen genügt:

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g(x)}.$$

Liegt dagegen der einzige wesentlich singuläre Punkt c in endlicher Entfernung, so stellt $f\left(\frac{1}{x-c}\right)$ die allgemeinste, den vorgegebenen Bedingungen genügende Funktion dar.

Eine andere Methode, die Funktion $f(x)$ zu bilden, gewährt der Satz von Mittag-Leffler, den wir bald besprechen werden.

Die Funktionen mit einem einzigen wesentlich singulären Punkte im Unendlichen und unendlich vielen Polen heißen *meromorphe* oder *gebrochene transzendente Funktionen*.

Funktionen mit unendlich vielen Polen und einer endlichen Anzahl wesentlich singulärer Punkte (C3b).

249. A sei die Menge der Pole, $d_1, d_2, \cdots, d_n$ seien die wesentlich singulären Punkte. Die Menge A' kann keine von den Punkten d verschiedenen Punkte enthalten; setzen wir:

$$A' = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$$

voraus, wo $m \leqq n$ ist, so können wir die Menge A in m Mengen $A_1, A_2, \cdots, A_m$ von der Art zerlegen, daß A_1 die einzige Grenzstelle d_1, A_2 die einzige Grenzstelle $d_2, \cdots, A_m$ die einzige Grenzstelle d_m besitzt. Bilden wir nun (Art. 248) die Funktion $f_1(x)$, welche die Punkte der Menge A_1 als Pole und d_1 als einzigen wesentlich singulären Punkt besitzt, und analog die Funktionen $f_2(x), \cdots, f_m(x)$; außerdem bezeichnen wir, falls $m < n$ ist, mit $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_{n-m}(x)$ $n-m$ beliebige ganze Funktionen. Die gesuchte Funktion $f(x)$ ist alsdann:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{m} f_h(x) + \sum_{k=1}^{n-m} g_k\left(\frac{1}{x - d_{m+k}}\right) + C,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist.

Funktionen mit unendlich vielen singulären Punkten irgendwelcher Art (C3c). Satz von Mittag-Leffler[1]).

250. Der Erste, der das Problem der Bildung einer Funktion mit gegebenen Singularitäten in Angriff nahm, war Mittag-Leffler. Nachdem er 1876 vom einfachsten Falle (dem des Art. 248) ausgegangen war, dehnte er seine Methode auf immer allgemeinere Fälle aus.

Wir wollen zunächst den Satz, der den Namen Mittag-Lefflers trägt, an einem etwas allgemeineren Falle als dem des Art. 248 auseinandersetzen.

Wir setzen nämlich voraus, die singulären Punkte bilden eine Menge, die als einzige Grenzstelle den unendlich fernen Punkt besitzt. Diese Menge ist alsdann abzählbar; bezeichnen wir dann mit $c_1, c_2, \cdots$ die von dem unendlich fernen Punkte verschiedenen singulären Punkte, die wir auch als vom Anfangspunkte verschieden voraussetzen wollen, so lassen sich (vgl. Art. 206) die Punkte jener Menge nach zunehmendem absoluten Betrage ordnen, so daß:

$$|c_1| \leqq |c_2| \leqq |c_3| \leqq \cdots; \quad \lim_{h=\infty} c_h = \infty.$$

Wir nehmen ferner an, es seien die zu den Punkten c_h gehörenden Hauptteile $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ der zu bildenden Funktion gegeben.

---

1) Bucca 88, Casorati 113, Cousin 123, Dini 138, Frenzel 160, Goursat 171, Hermite 204, Krause 232, Mittag-Leffler 310, 312, 313, 315, 316, 317, 322, 325, 334, Pincherle 381, 388, Schering 441, Vitali 491, Viterbi 492, Weierstraß 516.

Am nächsten läge der Gedanke, auf den vorliegenden Fall das Verfahren des Art. 247 anzuwenden und die Funktion:

$$\sum_{h=1}^{\infty} g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + C$$

zu bilden. Allein es ist klar, daß die hingeschriebene Reihe im allgemeinen nicht für alle von den Werten c_h verschiedenen Werte x konvergent ist. Mittag-Lefflers Gedanke besteht nun darin, jedem Gliede der Reihe ein Polynom von der Art hinzuzufügen, daß sie konvergent wird.

Es sei $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$ eine beliebige konvergente Reihe mit konstanten positiven Gliedern. Da die Funktion $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ den einzigen singulären Punkt c_h besitzt, so wird sie (Art. 161) in der Umgebung des Anfangspunktes durch eine Potenzreihe $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} a_{h\lambda} x^{\lambda}$ dargestellt, deren Konvergenzradius $|c_h|$ ist, die folglich in einem Kreise um den Anfangspunkt mit dem Radius $\varrho_h = \theta |c_h|$, wo θ eine feste, zwischen 0 und 1 enthaltene Größe ist, gleichmäßig konvergiert. Es läßt sich somit eine Zahl m_h von der Art angeben, daß innerhalb dieses Kreises:

$$\left| \sum_{k=m_h}^{\infty} a_{hk} x^k \right| < \varepsilon_h$$

oder auch:

$$\left| g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk} x^k \right| < \varepsilon_h$$

ist. Bezeichnet dann ϱ den Radius eines beliebigen, um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises, so läßt sich ein solcher Index q angeben, daß $\varrho \leqq \theta\, |c_{q+1}|$ ist. Man hat demnach für alle Punkte dieses Kreises:

$$\sum_{h=q+1}^{\infty} \left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk} x^k \right] < \sum_{h=q+1}^{\infty} \varepsilon_h;$$

daher läßt sich nach dem Hilfssatz von Weierstraß (Art. 132) die linke Seite in eine Potenzreihe umwandeln:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{qk} x^k,$$

die innerhalb des Kreises ϱ konvergiert. Andrerseits stellt, welches auch die positiven Zahlen $m_1, m_2, \cdots, m_q$ seien, der Ausdruck:

$$\sum_{h=1}^{q}\left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)-\sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk}x^k\right],$$

als Summe einer endlichen Anzahl von Funktionen, die in jedem Punkte außer in je einem der Punkte $c_1, c_2, \cdots, c_q$ regulär sind, eine Funktion von derselben Beschaffenheit dar, folglich ist:

$$(1)\qquad F(x)=\sum_{h=1}^{\infty}\left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)-\sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk}x^k\right]$$

eine Funktion, die sich in allen Punkten des Kreises ϱ, höchstens die Punkte $c_1, c_2, \cdots, c_q$ ausgenommen, regulär verhält. Nun ist ϱ eine willkürliche Größe, und der Ausdruck (1) unabhängig von ϱ; mithin läßt sich schließen, daß (1) eine analytische Funktion darstellt, die in jedem in endlicher Entfernung gelegenen Punkte der Ebene, höchstens die Punkte $c_1, c_2, \cdots$ ausgenommen, regulär ist.

Um zu ersehen, wie sich diese Funktion in einem Punkte c_s verhält, genügt es zu bemerken, daß sich mittels des soeben dargelegten Verfahrens schließen läßt, daß die Funktion:

$$F(x)-\left[g_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)-\sum_{k=1}^{m_s-1} a_{sk}x^k\right]=\sum_{h=1}^{\infty}{}^{(s)}\left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)-\sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk}x^k\right],$$

wo der obere Index s die Auslassung des s-ten Gliedes anzeigt, in allen von den Punkten $c_1, c_2, \cdots, c_{s-1}, c_{s+1}, \cdots$ verschiedenen Punkten der Ebene, folglich auch im Punkte c_s regulär ist; da nun $\sum_{k=1}^{m_s-1} a_{sk}x^k$ als Polynom für jeden endlichen Wert von x regulär ist, so ist auch die Funktion:

$$F(x)-g_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$$

in c_s regulär, d. h. $g_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$ ist der zum Punkte c_s gehörende Hauptteil der Funktion $F(x)$. Daher genügt $F(x)$ den gestellten Bedingungen.

Ist $\Phi(x)$ eine zweite Funktion, welche denselben Bedingungen genügt, so ist die Differenz $\Phi(x)-F(x)$ eine für jeden endlichen Wert von x reguläre Funktion, d. h. eine ganze Funktion, und der allgemeinste Ausdruck für die gesuchte Funktion ist daher:

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h-1} a_{hk} x^k \right] + g(x),$$

wo $g(x)$ eine willkürliche ganze Funktion bezeichnet.

Das ermittelte Ergebnis läßt sich daher folgendermaßen aussprechen:

Sind unendlich viele Punkte $c_1, c_2, \cdots$ von der Art gegeben, daß:

$$|c_1| \leqq |c_2| \leqq \cdots, \lim_{h=\infty} c_h = \infty,$$

und sind unendlich viele Funktionen:

$$(2) \qquad g_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{x-c_2}\right), \cdots$$

gegeben, wo die g ganze Funktionen ihrer Argumente bezeichnen, so ist es auf unendlich viele Arten möglich, eine Funktion $\Phi(x)$ zu bilden, die $c_1, c_2, \cdots$ als singuläre Punkte mit den Hauptteilen (2) besitzt und sonst in jedem in endlicher Entfernung gelegenen Punkte regulär ist **(Satz von Mittag-Leffler)**.

251. Zwischen dem Satze von Mittag-Leffler und dem von Weierstraß besteht ein enger Zusammenhang.

Nehmen wir an, die Punkte $c_1, c_2, \cdots$ seien sämtlich einfache Pole mit den Hauptteilen:

$$\frac{1}{x-c_1}, \frac{1}{x-c_2}, \cdots.$$

Da bekanntlich für $|x| < |c_h|$:

$$\frac{1}{x-c_h} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{c_h^{k+1}}$$

ist, so ist die zu bildende Funktion:

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x-c_h} + \sum_{k=0}^{m_h-1} \frac{x^k}{c_h^{k+1}} \right] + g(x),$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x-c_h} + \frac{x^{m_h} - c_h^{m_h}}{c_h^{m_h}(x-c_h)} \right] + g(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{m_h}}{c_h^{m_h}(x-c_h)} + g(x).$$

Setzt man nun $g(x) = l'(x)$, wo $l(x)$ (Art. 201) eine ganze Funktion ist, und:

$$f(x) = e^{l(x)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

so hat man (Art. 210), wenn $m_h = r_h$ genommen wird:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Phi(x).$$

252. Wir gehen dazu über, die allgemeineren Untersuchungen Mittag-Lefflers zu entwickeln.

Ist A eine isolierte und folglich (Art. 50) abzählbare Punktmenge, deren Elemente man daher mit $c_1, c_2, \cdots$ bezeichnen kann, so kann es vorkommen, daß nach Fortnahme der Punkte der Mengen A und A' aus der Ebene eine aus einem einzigen Stücke bestehende, d. h. eine zusammenhängende Fläche verbleibt; ebenso kann es aber auch geschehen, daß die Ebene dadurch in zwei oder mehr oder auch unendlich viele gesonderte Teile zerfällt. Ein Beispiel für den ersten Fall erhält man, wenn A die Menge der Nullstellen einer ganzen Funktion ist; ein Beispiel für den zweiten Fall läßt sich folgendermaßen gewinnen.

Man nehme eine Folge zunehmender positiver Werte:

(1) $$\gamma_1, \gamma_2, \cdots,$$

die eine bestimmte endliche Grenze ϱ besitzen möge, ordne ferner (Art. 33) die rationalen Zahlen zwischen 0 und 2π auf eine der unendlich vielen Arten, auf welche dies möglich ist, in eine einfache Reihe:

$$\theta_1, \theta_2, \cdots$$

und setze:

(2) $$c_1 = \gamma_1 e^{i\theta_1}, \quad c_2 = \gamma_2 e^{i\theta_2}, \cdots.$$

Bezeichnet man mit A die Menge der Punkte c, so besteht die Menge A', wie leicht zu sehen, aus allen Punkten der Kreislinie mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt. In diesem Falle teilt also die Menge $A + A'$ die Ebene in zwei gesonderte Teile, einen ersten P, der von dem Außengebiete des Kreises ϱ gebildet wird, und einen zweiten Q, der aus dessen Innengebiet entsteht, wenn man davon die Punkte c wegnimmt.

Es ist zu bemerken, daß in dem angeführten Beispiele die Menge $A + A'$ die vollständige Begrenzung des Teiles Q bildet. In der Tat gehört jeder ihrer Punkte der Begrenzung von Q an, weil ja in jeder Umgebung eines Punktes von $A + A'$ Punkte vorhanden sind, die Q angehören, es gibt sonst keinen weiteren Punkt der Ebene, welcher der Begrenzung von Q angehörte.

Dies geschieht nicht in allen Fällen; es kann sich im Gegenteil ereignen, daß die Menge $A + A'$ die vollständige Begrenzung keines der Teile bildet, in die sie die Ebene zerlegt. Wir nehmen beispielsweise außer der Folge (1) eine zweite Folge von Werten:

$$\delta_1, \delta_2, \cdots,$$

die aber nach abnehmender Größe geordnet sein und ebenfalls ϱ zur Grenze haben möge, und setzen voraus, die Menge A bestehe aus den durch (2) definierten Punkten und aus den Punkten:

$$(3) \qquad d_1 = \delta_1 e^{i\theta_1}, \quad d_2 = \delta_2 e^{i\theta_2}, \cdots.$$

Die Menge A' besteht wie vorhin aus allen Punkten der Kreislinie ϱ; folglich zerlegt $A + A'$ die Ebene in zwei Teile: das Außengebiet des Kreises ϱ, mit Ausschluß der Punkte (3), und dessen Innengebiet, mit Ausschluß der Punkte (2). Allein $A + A'$ bildet die vollständige Begrenzung keines dieser beiden Teile.

253. Wir setzen zunächst voraus, die Punktmenge $A + A'$ zerlege nicht die Ebene in mehrere gesonderte Teile. Es sei ferner eine abzählbare Menge von Funktionen:

$$(1) \qquad g_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right), \cdots$$

gegeben, wo jede der Funktionen g eine ganze Funktion ihres eigenen Argumentes ohne konstantes Glied bezeichnet[1]).

Wir wollen eine analytische Funktion bilden, welche die Punkte der Menge $A + A'$ als einzige singuläre Punkte besitzt und im Punkte c_h den Hauptteil $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ hat[2]).

1) Wäre c_h der unendlich ferne Punkt, so käme $g_h(x)$ an Stelle von $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ vor (Art. 122).

2) Es ist kaum nötig zu bemerken, daß man von dieser Aufgabe zu der spezielleren des Art. 250 gelangt, wenn man voraussetzt, A' bestehe lediglich aus dem unendlich fernen Punkte.

Die Menge der Abstände eines Punktes c_h von den Punkten der Menge A' hat eine untere Grenze ϱ_h, die nicht Null ist, weil ja sonst c_h Grenzstelle von A' sein, also A'' und somit (Art. 7) A' angehören würde, was unmöglich ist, da A isoliert ist. Gleichwohl hat die Folge $\varrho_1, \varrho_2, \cdots$ die Null zur Grenze. Es ließen sich nämlich im entgegengesetzten Falle nach Annahme einer beliebigen positiven Größe σ unendlich viele Zahlen $m_1, m_2, \cdots$ der Art angeben, daß $\varrho_{m_1} > \sigma$, $\varrho_{m_2} > \sigma, \cdots$; dann würde aber die Menge der Punkte $c_{m_1}, c_{m_2}, \cdots$ keinen der Punkte von A' als Grenzstelle haben können, während andrerseits diese Menge mindestens eine Grenzstelle besitzt, die A' angehören muß.

Da also $\lim\limits_{h=\infty} \varrho_h = 0$ ist, so können wir den verschiedenen Punkten c_h ebensoviele, nicht notwendig voneinander verschiedene Punkte d_h der Menge A' so zuordnen, daß:

$$\lim_{h=\infty} |c_h - d_h| = 0$$

ist.

Beschreiben wir um d_h einen Kreis C_h, dessen Radius $r_h > |c_h - d_h|$ sein möge, so enthält C_h in seinem Innern den Punkt c_h, und die Funktion $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$, die außerhalb dieses Kreises regulär ist, läßt sich in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x - d_h}$ entwickeln:

$$g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{hk}(x - d_h)^{-k}.$$

Setzt man:

$$a_{hk} = b_{hk}(c_h - d_h)^k, \quad \frac{|c_h - d_h|}{r_h} = \varepsilon < 1,$$

so läßt sich diese Entwicklung so schreiben:

$$g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{hk}\left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^k;$$

sie konvergiert gleichmäßig außerhalb des Kreises C_h, d. h. für alle Werte x, für die:

(2) $$\left|\frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right| < \varepsilon$$

ist. Wählt man mithin willkürlich eine Folge positiver Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ von der Art, daß $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$ konvergiert, so läßt sich für jeden Wert von h

eine Zahl m_h von der Art angeben, daß für alle Werte von x, die der Bedingung (2) genügen, gilt:

$$\left| \sum_{k=m_h}^{\infty} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right| < \varepsilon_h,$$

oder auch:

$$\left| g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h-1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right| < \varepsilon_h.$$

Wir bilden jetzt die Funktion:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h-1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right].$$

Ist x_0 ein Punkt der Ebene, der weder A noch A' angehört, so ist die untere Grenze seiner Abstände von den Punkten von $A + A'$ nicht Null, weil ja in diesem Falle x_0 der Menge A' angehören würde. Es läßt sich somit ein Kreis γ um x_0 beschreiben, der weder in seinem Innern noch auf seinem Umfange Punkte von A oder von A' enthält; nennt man δ die untere Grenze der Abstände der Punkte des Kreises von denjenigen der Menge $A + A'$, so ist δ eine von Null verschiedene Größe. Da andrerseits:

$$\lim_{h=\infty} |c_h - d_h| = 0$$

ist, so läßt sich eine Zahl n von der Art angeben, daß für jedes $h > n$ $|c_h - d_h| < \varepsilon\delta$ wird. Man hat dann für alle Punkte x des Kreises γ:

$$\left| \frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right| < \varepsilon,$$

folglich:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{n} \left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h-1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right] + \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=m_h}^{\infty} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist die Summe einer endlichen Anzahl in γ regulärer analytischer Funktionen; auf das zweite Glied läßt sich (vgl. Art. 250) der Hilfssatz von Weierstraß anwenden. Folglich ist $F(x)$ eine in γ reguläre Funktion. Man beweist alsdann, wie in dem angeführten Artikel, daß $F(x)$ für den Punkt c_h den Hauptteil $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ besitzt.

Ist $\Phi(x)$ eine weitere Funktion mit denselben Eigenschaften wie $F(x)$, so ist die Differenz $\Phi(x) - F(x)$ eine Funktion, die mindestens in allen Punkten der Ebene regulär ist, die nicht der Menge A' angehören. Folglich ist die allgemeinste Form der gesuchten Funktion:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h-1} b_{hk}\left(\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^k\right] + l(x),$$

wo $l(x)$ eine Funktion bedeutet, die keine andern singulären Punkte haben kann, als die Punkte von A'.

254. Zerlegt die Menge $A + A'$ die Ebene in mehrere gesonderte Teile und bildet die vollständige Begrenzung des einen von ihnen, P, so stellt der soeben gebildete Ausdruck in P eine analytische Funktion dar, die den gestellten Bedingungen genügt und sich über diesen Bereich hinaus nicht fortsetzen läßt. In andern Teilen der Ebene stellt er andre analytische Funktionen dar.

255. Aus den dargelegten Untersuchungen lassen sich noch andere Folgerungen ziehen.

Es sei eine analytische Funktion $\Psi(x)$ gegeben, I sei die Menge ihrer singulären Punkte. Die Menge I ist dann abgeschlossen (Art. 158), und man hat deshalb:

$$I = I' + J,$$

wo J eine isolierte Menge ist, die Null sein würde, wenn I perfekt wäre. Wir wollen diese Voraussetzung nicht machen.

Es seien demnach $c_1, c_2, \cdots$ die Punkte der isolierten und somit abzählbaren Menge J.

Durch Anwendung des Laurentschen Satzes können wir den Hauptteil $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ der gegebenen Funktion $\Psi(x)$ in jedem Punkte c_h von J bestimmen; sodann vermögen wir (Art. 253) die Funktion $F(x)$ zu bilden, die in den Punkten von J die Hauptteile $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ besitzt und sich sonst regulär verhält. Die Funktion:

$$\Psi(x) - F(x) = \Omega(x)$$

ist dann auch in den Punkten von J regulär und kann keine andern singulären Punkte haben als die Punkte von I'.

Wir haben so folgendes Ergebnis gewonnen:

Ist $\Psi(x)$ eine Funktion, die isolierte singuläre Punkte besitzt, so läßt sich eine Funktion $\Omega(x)$ bilden, die außer in allen Punkten, in denen es $\Psi(x)$ ist, auch in diesen Punkten regulär ist.

256. Der bereits hervorgehobene Zusammenhang zwischen den Sätzen von Mittag-Leffler und Weierstraß ermöglicht uns, den letzten Satz auf Grund der Ergebnisse der vorangehenden Artikel in bemerkenswerter Weise zu verallgemeinern. Der Kürze halber beschränken wir uns auf die bloße Angabe der Sätze:

Ist $A(c_1, c_2, \cdots)$ eine isolierte Menge von der Art, daß $A + A'$ entweder die Ebene überhaupt nicht in mehrere Teile zerlegt oder, wenn dies der Fall ist, doch einen dieser Teile, P, vollständig begrenzt, so läßt sich eine analytische Funktion bilden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte von $A + A'$ bezw. in dem Bereiche P existiert und in den verschiedenen Punkten c_h Nullstellen oder Pole von vorher bestimmter Ordnung n_h[1]) besitzt. Der allgemeinste Ausdruck für eine solche Funktion ist:

$$(1) \qquad F(x) = l(x) \cdot \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^{n_h} e^{n_h \sum\limits_{k=1}^{m_h} \frac{1}{k} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^k},$$

wo d_h und m_h die ihnen bereits (Art. 253) beigelegte Bedeutung haben, und $l(x)$ eine Funktion darstellt, die in dem Existenzbereich der zu bildenden Funktion und außerdem auch in den Punkten von A regulär und von Null verschieden ist.

Ist eine mit Nullstellen und Polen versehene Funktion $\Psi(x)$ gegeben, so läßt sich eine zweite Funktion $\Omega(x)$ angeben, die nicht nur in den Punkten, in denen die Funktion $\Psi(x)$ regulär und von Null verschieden ist, sondern auch in deren Nullstellen und Polen regulär und von Null verschieden ist.

257. Die eben ausgesprochenen Sätze gestatten uns, auf dem in Art. 255 eingeschlagenen Wege weiterzugehen.

---

1) n_h ist für die Nullstellen eine positive, für die Pole eine negative ganze Zahl.

Ist eine Funktion $\Psi(x)$ gegeben und ist $J(c_1, c_2, \cdots)$ die Menge ihrer isolierten singulären Punkte, so hat man nach dem Laurentschen Satze in der Umgebung von c_h:

$$\Psi(x) = g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + \mathfrak{P}_h(x - c_h),$$

wo $\mathfrak{P}_h(x - c_h)$ eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist, die innerhalb eines gewissen Kreises konvergiert, auf dessen Bestimmung indes nichts weiter ankommt. Indem wir mit p_h eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnen, setzen wir:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_h(x - c_h) = e_{h0} + e_{h1}(x - c_h) + e_{h2}(x - c_h)^2 + \cdots +\\ + e_{h,p_h-1}(x - c_h)^{p_h-1} + e_{hp_h}(x - c_h)^{p_h} + \cdots,\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}\Psi(x) = g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + e_{h0} + e_{h1}(x - c_h) + \cdots +\\ + e_{h,p_h-1}(x - c_h)^{p_h-1} + e_{hp_h}(x - c_h)^{p_h} + \cdots;\end{aligned}$$

außerdem:

$$\begin{aligned}g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + e_{h0} + e_{h1}(x - c_h) + \cdots + e_{h,p_h-1}(x - c_h)^{p_h-1} =\\ = (x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right),\end{aligned}$$

$$e_{hp_h}(x - c_h)^{p_h} + \cdots = (x - c_h)^{p_h}\mathfrak{Q}_h(x - c_h),$$

wo $f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ eine ganze Funktion von $\frac{1}{x - c_h}$ ohne konstantes Glied und $\mathfrak{Q}_h(x - c_h)$ eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist. Man hat alsdann:

$$(1) \qquad \Psi(x) = (x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + (x - c_h)^{p_h}\mathfrak{Q}_h(x - c_h).$$

Wir wollen nun zeigen, daß sich eine Funktion bilden läßt, die in allen Punkten regulär ist, in denen es $\Psi(x)$ ist, und außerdem in der Umgebung jedes Punktes c_h mit $\Psi(x)$ nicht nur in den negativen Potenzen von $x - c_h$ (d. h. in dem Hauptteil), sondern auch in den positiven Potenzen bis zu einem gewissen vorher bestimmten Grade $p_h - 1$ übereinstimmt oder — kürzer gesagt — $\Psi(x)$ in der Umgebung jedes Punktes c_h mit einer vorgeschriebenen Annäherung darstellt.

Nach Formel (1) des Art. 256, in welcher $l(x) \equiv 1$, $n_h = p_h$ vorausgesetzt werde, möge zu diesem Zwecke zunächst die Funktion:

$$(2) \qquad F(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^{p_h} e^{p_h \sum\limits_{k=1}^{m_h} \frac{1}{k} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^k}$$

gebildet werden. Die Funktion:

$$\frac{(x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)}{F(x)}$$

ist dann in dem Punkte c_h regulär oder hat in ihm höchstens eine isolierte Singularität, und es ist folglich nach dem Laurentschen Satze:

$$(3) \qquad \frac{(x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)}{F(x)} = \varphi_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + \mathfrak{R}_h(x - c_h),$$

wo $\varphi_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ eine ganze Funktion von $\frac{1}{x - c_h}$ und $\mathfrak{R}_h(x - c_h)$ eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist. Wir bilden nun (Art. 253) eine Funktion $\theta(x)$, die überall regulär ist, wo $\Psi(x)$ es ist, und in c_h den Hauptteil $\varphi_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ hat. Man hat alsdann in der Umgebung von c_h:

$$\theta(x) = \varphi_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + \mathfrak{S}_h(x - c_h),$$

wo $\mathfrak{S}_h(x - c_h)$ eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist, folglich gemäß (3):

$$\frac{(x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)}{F(x)} = \theta(x) - \mathfrak{T}_h(x - c_h),$$

wo:

$$\mathfrak{T}_h(x - c_h) = \mathfrak{S}_h(x - c_h) - \mathfrak{R}_h(x - c_h)$$

eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist. Daraus ergibt sich:

$$F(x)\,\theta(x) = (x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + F(x)\,\mathfrak{T}_h(x - c_h).$$

Ferner folgt aus (2), daß in der Umgebung von c_h:

$$F(x) = (x - c_h)^{p_h}\, \mathfrak{U}_h(x - c_h),$$

wo wieder $\mathfrak{U}_h(x - c_h)$ eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist; somit folgt schließlich:

$$F(x)\,\theta(x) = (x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + (x - c_h)^{p_h}\,\mathfrak{V}_h(x - c_h),$$

wo:

$$\mathfrak{V}_h(x - c_h) = \mathfrak{T}_h(x - c_h)\,\mathfrak{U}_h(x - c_h)$$

abermals eine Potenzreihe von $x - c_h$ ist. Durch Vergleichung mit (1) erkennt man, daß das Produkt $F(x)\,\theta(x)$ die gegebene Funktion $\Psi(x)$ mit der gewünschten Annäherung darstellt.

258. Wir haben gefunden, daß, wenn die Menge I der singulären Punkte einer Funktion $\Psi(x)$ nicht perfekt ist und

$$I = I' + J$$

gesetzt wird, eine Funktion, die wir $\Psi_1(x)$ nennen wollen, gebildet werden kann, die in den Punkten von J keine Singularität mehr hat. Es kann gleichwohl vorkommen, daß $\Psi_1(x)$ ihrerseits isolierte singuläre Punkte besitzt; sind z. B. die Punkte von I', wie es im allgemeinen der Fall ist, für $\Psi_1(x)$ sämtlich singuläre Punkte und ist I' nicht perfekt, so sind, falls man:

$$I' = I'' + J_1$$

setzt, die Punkte von J_1 isolierte singuläre Punkte von $\Psi_1(x)$. Es läßt sich dann eine Funktion $\Psi_2(x)$ bilden, die in den Punkten von J_1 keine Singularität mehr hat, usw. Es erhebt sich nun die Frage: Führt dieses Reduktionsverfahren schließlich auf eine Funktion ohne isolierte singuläre Punkte, d. h. auf eine solche, deren singuläre Punkte eine perfekte Menge bilden?

Wir erinnern daran (Art. 89), daß es, wenn I eine abgeschlossene Menge ist, eine erste Ordnungszahl erster oder zweiter Klasse von der Art gibt, daß $I^{(\alpha)}$ perfekt oder Null ist und daß man hat:

$$I = \sum_{\gamma < \alpha} (I^{(\gamma)} - I^{(\gamma+1)}) + I^{(\alpha)};$$

die Mengen $(I^{(\gamma)} - I^{(\gamma+1)})$ sind isoliert, mithin abzählbar und stimmen mit den oben durch $J, J_1, \cdots$ bezeichneten überein, so daß wir schreiben können:

$$I = \sum_{\gamma < \alpha} J_\gamma + I^{(\alpha)}.$$

Wir bezeichnen ferner mit $c_{01}, c_{02}, \cdots$ die Elemente von J, mit $c_{\gamma 1}, c_{\gamma 2}, \cdots$ die von J_γ und nehmen willkürlich positive Zahlen:

$$\varepsilon_{\gamma 1}, \varepsilon_{\gamma 2}, \cdots \qquad (\gamma < \alpha)$$

von der Art an, daß:

$$(1) \qquad \sum_{\substack{h=1,2,\cdots \\ \gamma<\alpha}} \varepsilon_{\gamma h} \quad [1]$$

konvergiert. Sind nun:

$$g_{01}\left(\frac{1}{x-c_{01}}\right), \quad g_{02}\left(\frac{1}{x-c_{02}}\right), \cdots$$

die Hauptteile von $\Psi(x)$ in ihren isolierten singulären Punkten $c_{01}, c_{02}, \cdots$, so können wir nach Art. 253 mit Benutzung der Zahlen $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \cdots$ eine Funktion $F(x)$ bilden, die in diesen Punkten dieselben Hauptteile hat, und:

$$\Psi_1(x) = \Psi(x) - F(x)$$

ist alsdann in ihnen regulär. Sind weiterhin:

$$g_{11}\left(\frac{1}{x-c_{11}}\right), \quad g_{12}\left(\frac{1}{x-c_{12}}\right), \cdots$$

die Hauptteile von $\Psi_1(x)$ in ihren isolierten singulären Punkten $c_{11}, c_{12}, \cdots$, so können wir mit Benutzung der Zahlen $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \cdots$ eine Funktion $F_1(x)$ bilden, die in diesen Punkten dieselben Hauptteile hat, und:

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) - F_1(x) = \Psi(x) - F(x) - F_1(x)$$

---

1) Es läßt sich leicht beweisen, daß dies auf unendlich viele Weisen möglich ist.

Nehmen wir eine zweifach unendliche Größenmenge:

$$\beta_{ih} \qquad (i = 1, 2, \cdots; \ h = 1, 2, \cdots),$$

deren Summe endlich sein möge; es sei z. B.:

$$\beta_{ih} = \frac{1}{(i+h-1)2^{i+h-1}},$$

woraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \beta_{ih} = 1.$$

Da die Ordnungszahlen, die kleiner als α sind, eine abzählbare Menge bilden, so läßt sich eine gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zwischen diesen Zahlen und den Elementen der natürlichen Zahlenreihe bilden. Ist i das dem Elemente γ der ersten Menge entsprechende Element der zweiten, und setzt man:

$$\varepsilon_{\gamma h} = \beta_{ih},$$

so ist:

$$\sum_{\substack{h=1,2,\cdots \\ \gamma<\alpha}} \varepsilon_{\gamma h} = 1.$$

ist alsdann nicht nur in den Punkten $c_{01}, c_{02}, \cdots$, sondern auch in den Punkten $c_{11}, c_{12}, \cdots$ regulär. Indem wir so fortfahren, gelangen wir zu einer Funktion:

$$\Psi_\omega(x) = \Psi(x) - \sum_{\gamma=0}^{\infty} F_\gamma(x),$$

die in den Punkten von $J, J_1, \cdots$ regulär ist. Es ist klar, daß sich dieses Verfahren fortsetzen läßt, bis man zu einer Funktion:

$$\Psi_\alpha(x) = \Psi(x) - \sum_{\gamma<\alpha} F_\gamma(x)$$

gelangt, die keine andren singulären Punkte haben kann als die Punkte der perfekten Menge $I^{(\alpha)}$.

Es erübrigt nur noch zu beweisen, daß $\sum_{\gamma<\alpha} F_\gamma(x)$ eine analytische Funktion ist. Zu diesem Zwecke mag eine Bemerkung von Nutzen sein, die sich aus dem in Art. 253 entwickelten Verfahren ergibt. Zieht man nämlich einen weder J_γ noch J_γ' angehörigen Punkt in Betracht und greift man eine Umgebung desselben heraus, die von keiner dieser beiden Mengen Punkte enthält (was immer möglich ist), so hat man für alle Punkte x einer solchen Umgebung:

$$|F_\gamma(x)| < \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{\gamma h};$$

nun ist $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{\gamma h}$ Teil einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern, folglich ist sie selbst konvergent; bezeichnen wir ihre Summe mit η_γ, so erhalten wir:

$$(2) \qquad |F_\gamma(x)| < \eta_\gamma.$$

Nun ist J_γ ein Bestandteil von I, folglich J_γ' ein Bestandteil von I' und infolgedessen von I. Ist daher x_0 ein Punkt des Bereiches, in dem $\Psi(x)$ regulär ist, so können wir, da I abgeschlossen ist, eine Umgebung dieses Punktes wählen, die keinen Punkt von I enthält und in dieser Umgebung gilt dann die Beziehung (2) für jedes $\gamma < \alpha$. Es bilden aber die Zahlen $\gamma < \alpha$ eine abzählbare Menge (Art. 75); daher läßt sich zwischen diesen Zahlen und denen der natürlichen Zahlenreihe $0, 1, 2, \cdots$ eine ein-eindeutige und vollständige Beziehung herstellen. Bezeichnen wir mit μ die Zahl dieser Reihe, die der Zahl γ entspricht, und setzen wir:

$$F_\gamma(x) = H_\mu(x), \quad \eta_\gamma = \theta_\mu,$$

so wird aus der Ungleichung (2) folgende:

$$|H_\mu(x)| < \theta_\mu,$$

und man erhält durch Summierung für $\mu = 1, 2, \cdots$:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |H_\mu(x)| < \sum_{\mu=1}^{\infty} \theta_\mu.$$

Die Reihe rechts konvergiert, weil ihre Summe nichts andres ist als die Summe der Reihe (1); somit ist die Reihe $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(x)$ in der betrachteten Umgebung gleichmäßig konvergent und stellt alsdann nach dem Hilfssatz von Weierstraß in dieser Umgebung eine im Punkte x_0 reguläre analytische Funktion dar.

Man beweist sodann, wie in Art. 253, daß in einer Umgebung eines Punktes c_{0h} der Menge J die Differenz:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(x) - g_{0h}\left(\frac{1}{x - c_{0h}}\right)$$

regulär ist.

Es sei nun β eine der Zahlen γ; wir schreiben dann:

$$\sum_{\beta \leq \gamma < \alpha} F_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}{}^{(\beta)} H_\mu(x),$$

wo der rechts vom zweiten Summenzeichen angebrachte Buchstabe β anzeigen soll, daß aus der Summe alle Glieder wegfallen sollen, deren Index μ gemäß der eben betrachteten Beziehung solchen Zahlen γ entspricht, die kleiner als β sind. Es wird dann in der üblichen Weise bewiesen, daß die Differenz:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}{}^{(\beta)} H_\mu(x) - g_{\beta h}\left(\frac{1}{x - c_{\beta h}}\right)$$

in der Umgebung von $c_{\beta h}$ regulär ist.

Somit ist erwiesen, daß die gefundenen Ausdrücke analytische Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften sind, und daß insbesondere $\Psi_\alpha(x)$ eine analytische Funktion ist, die nicht nur in allen Punkten regulär ist, in denen es $\Psi(x)$ ist, sondern auch in allen Punkten der Menge $I - I^{(\alpha)}$.

Dritter Teil.

Ergänzungen zur Theorie der analytischen Funktionen.

Neuere Untersuchungen über die ganzen Funktionen[1]).

259. Ein tieferes Studium der ganzen Funktionen hat die Notwendigkeit erkennen lassen, außer dem Range einer ganzen Funktion noch andre konstante Zahlen zu berücksichtigen, die unter sich und mit dem Range durch bestimmte Beziehungen verknüpft sind. Diese Zahlen — es sind ihrer drei — haben von den verschiedenen Autoren verschiedene Bezeichnungen erhalten; um aber die Zahl neuer Namen nicht unnötig zu vermehren, werden wir sie einfach als λ-Index, μ-Index und ν-Index der Funktion bezeichnen.

Sei $f(x)$ eine ganze Funktion mit den Nullstellen $c_1, c_2, \cdots$; ferner sei $\gamma_h = |c_h|$. Als λ-Index[2]) der Funktion $f(x)$ werden wir diejenige Zahl λ bezeichnen, welche die Zahlen ϱ, für welche die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\varrho}}$ divergiert, von denjenigen scheidet, für die sie konvergiert, oder aber die Zahl λ von der Beschaffenheit, daß für jedwede positive Zahl ε

---

1) Dell' Agnola 524, Bagnera 525, Barnes 528, Bassi 17, Borel 47, 49, 66, 67, 74, 75, Bortolotti 81, Boutroux 83, 84, 85, 86, 538, 539, Bukrejef 89, Desaint 130, 132, 133, Fabry 149, Goursat 176, Hadamard 182, 183, 188, 189, 190, 555, Hardy 559, 561, 562, 563, 564, Hayashi 569, Hill 571, Jaggi 213, 573, Jensen 215, von Koch 228, 583, Kraft 231, Leau 585, Levi-Civita 265, Lindelöf 269, 271, 275, 589, Lindgren 592, Maillet 280, 283, 284, 285, 286, 289, 291, 292, 293, 294, 298, 594, 595, 596, 597, 599, Malmquist 600, Mellin 601, Mittag-Leffler 602bis, 603, 604, Orlando 607, Painlevé 347, Pellet 610, Petersen 364, Petrovitch 612, Phragmén 613, Poincaré 397, 399, Pringsheim 414, 415, 619, Remoundos 627, Schaper 437, Schou 448, 449, Sigma 636, Störmer 639, Toffoletti 482, Vivanti 503, Wigert 520, 651, Wiman 653.

Eine besondere Beachtung verdient die während des Druckes dieses Buches erschienene Abhandlung von Pringsheim (619), die eine systematische Darstellung seiner Untersuchungen über ganze Funktionen von endlichem Range darbietet.

2) Ordre réel (Borel 47), Konvergenzexponent (Schaper 437), Grenzexponent (Pringsheim 415).

die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda-\varepsilon}}$ divergiert, $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda+\varepsilon}}$ aber konvergiert. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$ kommt hier nicht in Betracht; auch läßt sich darüber im allgemeinen nichts aussagen.

Gibt es keine Zahl ϱ, für welche die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\varrho}}$ konvergiert, so sagt man, der λ-Index sei unendlich.

Ist der λ-Index endlich, so ist die Funktion erster Klasse (Art. 209) und umgekehrt.

Der λ-Index wird auch **Konvergenzexponent der Reihe der Nullstellen** genannt.

Ist die Funktion p-ten Ranges, so hat man:

$$p < \lambda < p + 1,$$

wenn λ nicht ganzzahlig ist, dagegen:

$$\lambda = p \quad \text{oder} \quad \lambda = p + 1,$$

wenn λ ganzzahlig ist.

Sei $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ die Entwicklung von $f(x)$ in eine Potenzreihe von x, und $\alpha_h = |a_h|$. Als μ-Index[1]) der Funktion $f(x)$ werden wir die Zahl μ von der Beschaffenheit bezeichnen, daß, wenn ε eine beliebige positive Größe ist, die Beziehung:

$$\alpha_h < \frac{1}{(h!)^{\mu-\varepsilon}}$$

für alle Werte von h gilt, die größer sind als eine bestimmte (von ε abhängige) Zahl, während sich, wenn eine beliebige Zahl H festgesetzt wird, stets zugleich Werte $h > H$ ermitteln lassen, für die:

$$\alpha_h > \frac{1}{(h!)^{\mu+\varepsilon}}$$

wird. Da nun[2]):

$$\lim_{h=\infty}\frac{(h!)^{\frac{1}{h}}}{h} = \frac{1}{e} \tag{1}$$

ist, so können die vorstehenden Beziehungen auch folgendermaßen

---

1) **Ordnung** nach Schaper (437). Lindelöf (269) drückt sich dahin aus, $\alpha_h^{\frac{1}{h}}$ sei d'ordre $h^{-\mu}$.

2) Cesàro-Kowalewski, a. a O., S. 110.

geschrieben werden:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu - \varepsilon}}, \quad \alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu + \varepsilon}}.$$

Als ν-Index[1]) von $f(x)$ werden wir endlich eine Zahl ν von der Beschaffenheit bezeichnen, daß, wenn wir wie früher unter $M(\varrho)$ den größten absoluten Betrag von $f(x)$ für $|x| = \varrho$ verstehen und ε irgend eine positive Größe ist, die Beziehung:

$$(2) \qquad M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu + \varepsilon}}$$

für alle Werte von ϱ besteht, die größer sind als eine bestimmte Zahl, während es nach Annahme irgend einer Größe R stets zugleich Werte $\varrho > R$ gibt, für die:

$$M(\varrho) > e^{\varrho^{\nu - \varepsilon}}\text{ [2]).}$$

Gibt es keine endliche Zahl ν, die dieser Bedingung genügt, wie es z. B. bei der Funktion $f(x) = e^{e^x}$ der Fall ist, so sagt man, der ν-Index von $f(x)$ sei unendlich.

---

1) Ordre apparent (Borel 47), Ordnung (Pringsheim 415). Schaper (437) gebraucht den Ausdruck, $f(x)$ sei vom Typus e^{ϱ^ν}.

2) Es kann sich ereignen, daß die Relation:

$$(\alpha) \qquad M(\varrho) < e^{\delta \varrho^\nu}$$

stattfindet, die beschränkender ist als (2); setzt man nämlich voraus, (α) gelte für jedes $\varrho > \varrho'$, und nimmt man ε beliebig an, so läßt sich ϱ'' derart bestimmen, daß für jedes $\varrho > \varrho''$:

$$\varrho^\varepsilon > \delta$$

ist, wonach (2) für jedes ϱ besteht, das größer ist als ϱ' und als ϱ''. Bezeichnet dann η die untere Grenze der Werte δ, für die (α) stattfindet, so ist:

$$(\beta) \qquad M(\varrho) < e^{(\eta + \varepsilon)\varrho^\nu}$$

für alle ϱ, die eine bestimmte Größe übersteigen, während es für jedes beliebige R Werte $\varrho > R$ gibt, für die:

$$(\gamma) \qquad M(\varrho) > e^{(\eta - \varepsilon)\varrho^\nu}$$

ist. Ist $\eta = 0$, so reduziert sich (β) auf:

$$(\delta) \qquad M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^\nu},$$

während (γ) keine Bedeutung hat.

Pringsheim (619) bezeichnet als Funktionen vom Maximaltypus (der Ordnung ν) diejenigen, für die keine Relation von der Form (α) besteht, als Funktionen vom Normaltypus η diejenigen, für welche (β) und (γ) stattfinden, als Funktionen vom Minimaltypus endlich diejenigen, welche der Beziehung (δ) genügen.

260. Die λ-, μ-, ν-Indices sind in bezug auf jede ganze lineare Substitution invariant[1]).

I. Betreffs des λ-Index braucht nur der in Art. 216 geführte Beweis wiederholt zu werden.

II. Wenden wir auf eine ganze Funktion $f(x)$ eine ganze lineare Substitution:

(1) $$x = Ay + B$$

an, so ist, wenn wir $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ setzen und mit $\varphi(y) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r y^r$ das Ergebnis der Substitution bezeichnen, gemäß Art. 147:

$$\varphi(y) = f(Ay + B) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (Ay + B)^h = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r}{r!} f^{(r)}(B) y^r,$$

so daß:

$$b_r = \frac{A^r}{r!} f^{(r)}(B) = \frac{A^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} (k + r)(k + r - 1) \cdots (k + 1) a_{k+r} B^k$$

ist. Für alle Werte von r, die größer sind als ein bestimmter Wert r_0, hat man:

$$|a_{k+r}| < \frac{1}{((k+r)!)^{\mu - \varepsilon}} \leqq \frac{1}{(r!)^{\mu - \varepsilon}}.$$

Außerdem dürfen wir stets $|B| < 1$ voraussetzen, weil ja andernfalls (1) durch eine endliche Folge von solchen Substitutionen ersetzt werden könnte, daß für jede von ihnen $|B| < 1$ wäre. Man hat unter dieser Voraussetzung (s. Art. 135):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + r)(k + r - 1) \cdots (k + 1) |B|^k = \frac{r!}{(1 - |B|)^{r+1}},$$

mithin:

$$|b_r| < \frac{|A|^r}{(1 - |B|)^{r+1}} \cdot \frac{1}{(r!)^{\mu - \varepsilon}}.$$

Nun hat man, wenn $|A| \leqq 1$ ist:

$$\frac{|A|^r}{(1 - |B|)^{r+1}} \leqq \frac{1}{(1 - |B|)^{r+1}};$$

---

1) Auf Grund dieses Satzes werden wir bei Fragen betreffs der Indices stets voraussetzen können, daß die Funktionen, mit denen wir es zu tun haben, im Anfangspunkte nicht verschwinden, was die Entwicklungen etwas vereinfacht.

ist dagegen $|A| > 1$, so folgt:

$$\frac{|A|^r}{(1-|B|)^{r+1}} < \frac{|A|^{r+1}}{(1-|B|)^{r+1}}.$$

Bezeichnen wir also mit c die eine oder die andre der reellen und positiven Größen $\frac{1}{1-|B|}$, $\frac{|A|}{1-|B|}$, so ist:

$$|b_r| < c^{r+1}\frac{1}{(r!)^{\mu-\varepsilon}}.$$

Ist ε' eine beliebig kleine positive Größe und setzt man voraus, ε sei kleiner gewählt als ε', so kann man schreiben:

$$|b_r| < \frac{1}{(r!)^{\mu-\varepsilon'}}\left(\frac{d^r}{r!}\right)^{\varepsilon'-\varepsilon} d^{\varepsilon'-\varepsilon},$$

wo $c = d^{\varepsilon'-\varepsilon}$ gesetzt ist. Nun nähert sich, wenn r dem Unendlichen zustrebt, $\frac{d^r}{r!}$ der Null[1]), folglich läßt sich eine Zahl r_1 von der Art finden, daß für jedes $r > r_1$:

$$\frac{d^r}{r!} < \frac{1}{d}$$

wird. Für jedes r, das größer ist als r_0 und r_1, gilt alsdann:

$$|b_r| < \frac{1}{(r!)^{\mu-\varepsilon'}}.$$

Demnach ist der μ-Index der transformierten Funktion nicht größer als derjenige der ursprünglichen. Da man aber umgekehrt durch eine ganze lineare Substitution von der Funktion $\varphi(y)$ zu der Funktion $f(x)$ gelangen kann, so darf man behaupten, daß der μ-Index von $f(x)$ nicht größer ist als der von $\varphi(x)$. D. h.: Der μ-Index ist für jede ganze lineare Substitution invariant.

III. Wir betrachten wiederum die Funktion $f(x)$ und die aus ihr mittels der linearen Substitution (1) transformierte Funktion $\varphi(y)$. Der Einfachheit halber schreiben wir:

$$-\frac{B}{A} = s, \quad |s| = \sigma, \quad |A| = \alpha.$$

In der y-Ebene beschreiben wir um den Anfangspunkt mit einem Radius $r > \sigma$ einen Kreis; der Punkt s liegt dann innerhalb dieses Kreises, und wir können um s zwei Kreise beschreiben, den einen

1) Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S 102.

mit dem Radius $r_1 = r + \sigma$, der den Kreis r von außen, den andern mit dem Radius $r_2 = r - \sigma$, der ihn von innen berührt. Diesen beiden Kreisen entsprechen in der x-Ebene zwei Kreise um den Anfangspunkt mit den Radien αr_1, αr_2. Wir denken uns r so groß gewählt, daß für jedes $\varrho \geqq \alpha r_2$:

$$M|f(\varrho)| < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}} \text{ [1]}$$

wird; alsdann ist in dem ganzen von den Kreisen αr_1, αr_2 begrenzten Kreisringe der x-Ebene:

$$|f(x)| < e^{(\alpha r_1)^{\nu+\varepsilon}},$$

und folglich in dem ganzen entsprechenden Kreisringe der y-Ebene:

$$|\varphi(y)| < e^{(\alpha r_1)^{\nu+\varepsilon}}.$$

Da aber der Kreis r in diesem Kreisringe enthalten ist, so wird:

$$M|\varphi(r)| < e^{(\alpha r_1)^{\nu+\varepsilon}}.$$

Nun bemerken wir, daß $r_1 < 2r$ ist; außerdem kann, wenn $\varepsilon' > \varepsilon$, r so groß genommen werden, daß:

$$(2\alpha)^{\nu+\varepsilon} < r^{\varepsilon'-\varepsilon}$$

ist. Daraus folgt:

$$M|\varphi(r)| < e^{r^{\nu+\varepsilon'}},$$

eine Beziehung, welche beweist, daß der ν-Index von $\varphi(y)$ nicht größer ist als der von $f(x)$. Mittels der oben angestellten Überlegung wird gezeigt, daß er ebensowenig kleiner ist; folglich kann man schließen, daß beide Indices gleich sind.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

261. Wir betrachten nun einen Weierstraßschen Primfaktor (Art. 208):

$$E_p(x) = (1-x)\, e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}} = e^{-\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^k}{k}},$$

wo der dem E beigefügte Index den Grad des Polynoms im Exponenten angibt.

Es sei $\xi = |x|$; setzen wir zunächst:

$$\xi \leqq \theta < 1$$

---

1) Da wir es mit zwei Funktionen, $f(x)$ und $\varphi(x)$, zu tun haben, so wollen wir der Klarheit wegen $M|f(\varrho)|$, $M|\varphi(r)|$ statt $M(\varrho)$, $M(r)$ schreiben.

voraus, so ist:

$$|E_p(x)| = e^{-\Re \sum\limits_{\lambda=p+1}^{\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda}} \leqq e^{\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k}} < e^{\frac{1}{p+1} \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} \xi^k} = e^{\frac{1}{p+1} \cdot \frac{\xi^{p+1}}{1-\xi}}\text{[1]},$$

$$\frac{1}{1-\xi} \leqq \frac{1}{1-\theta};$$

außerdem ist, wenn $0 \leqq \tau \leqq 1$:

$$\xi^{p+1} \leqq \xi^{p+\tau}.$$

Nimmt man also:

(1) $$c \geqq \frac{1}{(p+1)(1-\theta)},$$

so hat man:

(2) $$|E_p(x)| < e^{c\,\xi^{p+\tau}},$$

wo c eine von τ unabhängige Konstante ist.

Setzen wir jetzt:

$$\theta < \xi < 1$$

voraus, so erhalten wir:

(3) $$|1-x| < 1 + \xi < e^{\xi},$$

(4) $$\left| e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}} \right| < e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k}},$$

mithin:

(5) $$|E_p(x)| < e^{2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \cdots + \frac{\xi^p}{p}}.$$

Nun hat man, wenn $0 < \tau \leqq 1$:

$$2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \cdots + \frac{\xi^p}{p} < 2\xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^p < p + 1 \leqq$$
$$\leqq \frac{p+1}{\theta^{p+1}}\,\theta^{p+\tau} < \frac{p+1}{\theta^{p+1}}\,\xi^{p+\tau},$$

so daß sich, wenn:

(6) $$c \geqq \frac{p+1}{\theta^{p+1}}$$

genommen wird, wiederum (2) ergibt.

Setzen wir endlich $\xi \geqq 1$ voraus, so behalten (3), (4) und mithin auch (5) ihre Gültigkeit; ferner ist:

---

1) Wir bezeichnen wie oben Art. 243 mit $\Re a$ den reellen Bestandteil der komplexen Größe a.

$$2\xi+\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}+\cdots+\frac{\xi^p}{p}<2\xi+\xi^2+\xi^3+\cdots+\xi^p\leqq(p+1)\xi^p\leqq(p+1)\xi^{p+\tau},$$

so daß man, wenn:

(7) $$c\geqq p+1$$

genommen wird, abermals (2) erhält.

Wählt man also beliebig eine zwischen 0 und 1 liegende Größe θ und nimmt man dann für c den größeren der beiden Ausdrücke (1) und (6) — der Ausdruck (7) braucht nicht berücksichtigt zu werden, weil er stets kleiner bleibt als (6) —, so hat man für jeden Wert von ξ:

(8) $$|E_p(x)|<e^{c\xi^{p+\tau}},$$

wo τ eine Größe bedeutet, die der Bedingung $0\leqq\tau\leqq 1$ genügt, c aber eine von τ unabhängige positive Konstante ist.

262. Der letzte Teil des Beweises im vorigen Artikel ist nicht mehr gültig, sobald $p=0$ wird. Gleichwohl läßt sich beweisen, daß (2) für $\tau>0$ auch in diesem Falle bestehen bleibt, allerdings unter der Beschränkung, daß c nicht von τ unabhängig ist.

Ist τ gegeben, so bestimmen wir eine ganze Zahl m von der Art, daß:

$$\frac{1}{m+1}\leqq\tau<\frac{1}{m}.$$

Aus der Beziehung:

$$|1-x|<e^{\xi}$$

folgt:

$$\left|1-x^{\frac{1}{m}}\right|<e^{\xi^{\frac{1}{m}}},$$

und entsprechend für $h=1,2,\cdots,m-1$:

$$\left|1-e^{\frac{2h\pi i}{m}}x^{\frac{1}{m}}\right|<e^{\xi^{\frac{1}{m}}};$$

multipliziert man alle diese Ungleichungen miteinander, so erhält man:

$$|1-x|<e^{m\xi^{\frac{1}{m}}}.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$|1-x|<e^{(m+1)\xi^{\frac{1}{m+1}}}.$$

Nun hat man, je nachdem $\xi \gtreqless 1$ ist, $\xi^{\frac{1}{m}} \leqq \xi^{\tau}$ oder $\xi^{\frac{1}{m+1}} \leqq \xi^{\tau}$; für alle Werte von ξ gilt folglich:

$$|1 - x| < e^{(m+1)\xi^{\tau}}.$$

263. Wir haben bemerkt, daß, wenn λ nicht ganzzahlig ist, $p < \lambda < p + 1$, wenn λ dagegen ganzzahlig ist, $\lambda = p$ oder $\lambda = p + 1$ ist. Man kann hinzufügen, daß, wenn $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$ konvergent ist, $\lambda > p$, wenn divergent, $\lambda < p + 1$ ist.

Es liege demnach eine ganze Funktion vom Range p vor, die wir überdies als einfach (Art. 209) voraussetzen:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right).$$

Wir nehmen die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$ zunächst als konvergent an. Dann ist $\lambda > p$ und, wenn man $\lambda = p + \tau$ setzt (Art. 261):

$$\left| E_p\left(\frac{x}{c_h}\right) \right| < e^{c\left(\frac{\xi}{\gamma_h}\right)^{\lambda}}.$$

Nach Wahl einer beliebigen positiven Größe η läßt sich eine Zahl n von der Art angeben, daß:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}} < \frac{\eta}{2c},$$

mithin:

$$\left| \prod_{h=n+1}^{\infty} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right) \right| < e^{\frac{\eta}{2}\xi^{\lambda}}$$

wird. Nach Wahl einer positiven Größe $\sigma < \tau$ hat man ferner:

$$\left| \prod_{h=1}^{n} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right) \right| < e^{c \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\gamma_h^{p+\sigma}} \xi^{p+\sigma}}.$$

Bestimmen wir ϱ so, daß:

$$\varrho^{\tau-\sigma} > \frac{2c}{\eta} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\gamma_h^{p+\sigma}}$$

wird, so erhält man:

$$\left|\prod_{h=1}^{n} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right)\right| < e^{\frac{\eta}{2}\varrho^{\tau-\sigma}\xi^{p+\sigma}},$$

mithin für jedes $\xi \geqq \varrho$:

$$\left|\prod_{h=1}^{n} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right)\right| < e^{\frac{\eta}{2}\xi^{\lambda}}.$$

Ist also η gegeben, so läßt sich ϱ in der Weise bestimmen, daß für jedes $\xi \geqq \varrho$:

(1) $$|f(x)| < e^{\eta\xi^{\lambda}}$$

wird, woraus folgt (vgl. Anm. 2 S. 230):

(2) $$|f(x)| < e^{\xi^{\lambda+\varepsilon}} \quad \text{für} \quad \xi \geqq \varrho.$$

Ist dagegen $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$ divergent, so ist $\lambda < p+1$. Wählt man ε so, daß $\lambda + \frac{\varepsilon}{2} < p+1$, so hat man:

$$|f(x)| < e^{c\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Nimmt man ϱ so, daß:

$$\varrho^{\frac{\varepsilon}{2}} > c\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

so ist:

$$|f(x)| < e^{\varrho^{\frac{\varepsilon}{2}}\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

mithin auch:

$$|f(x)| < e^{\xi^{\lambda+\varepsilon}} \text{ für } \xi \geqq \varrho.$$

Erinnern wir uns der Definitionen des Art. 259, so läßt sich die gefundene Beziehung so aussprechen: Für eine einfache Funktion ist der λ-Index niemals kleiner als der ν-Index.

Der Satz erstreckt sich unmittelbar auf Normalfunktionen (Art. 209).

Ist nämlich $g(x)$ ein Polynom, dessen Grad $\leqq p$ sein möge, so läßt sich für $\lambda \geqq p$ ein Wert R von der Art angeben, daß für jedes $\xi > R$ (vgl. weiter unten Art. 270):

$$\Re g(x) < \xi^{\lambda+\varepsilon}$$

ist. Nimmt man $\varepsilon' > \varepsilon$, und ξ so groß, daß $2 < \xi^{\varepsilon'-\varepsilon}$ wird, so ist demnach:

$$|e^{g(x)} f(x)| < e^{\xi^{\lambda+\varepsilon'}}.$$

Also: Für jede Normalfunktion ist $\lambda \geqq \nu$.

264. Ehe wir weitergehen, möge erst noch ein Hilfssatz aus der Theorie der Reihen aufgestellt werden:

Ist $\sum_{h=1}^{\infty} b_h$ eine konvergente Reihe mit abnehmenden positiven Gliedern, so hat man $\lim_{h=\infty} h b_h = 0$; umgekehrt ist, wenn $h b_h$, während h unbegrenzt wächst, innerhalb endlicher Grenzen verbleibt, die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} b_h^{\alpha}$ konvergent für jedes $\alpha > 1$.

Zunächst ließe sich, falls $\lim_{h=\infty} h b_h$ nicht gleich Null wäre, eine positive Größe σ von der Art angeben, daß für unendlich viele h-Werte $h b_h > \sigma$ oder also $b_h > \frac{\sigma}{h}$ sein würde. Nimmt man daher irgend einen Index m an, so ließe sich ein Index $n > 2m$ angeben, für den $b_n > \frac{\sigma}{n}$ sein würde. Da aber $b_{m+1} \geqq b_{m+2} \geqq \cdots \geqq b_n$, so folgt:

$$b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n > (n-m)\frac{\sigma}{n} > \frac{\sigma}{2},$$

was mit der Bedingung der Konvergenz der Reihe in Widerspruch steht.

Setzt man umgekehrt $h b_h < K$ voraus für alle Werte von h, so folgt:

$$b_h^{\alpha} < \frac{K^{\alpha}}{h^{\alpha}},$$

mithin:

$$\sum_{h=1}^{\infty} b_h^{\alpha} < K^{\alpha} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\alpha}};$$

da aber die Reihe rechts konvergent ist, so ist es auch $\sum_{h=1}^{\infty} b_h^{\alpha}$.

Der eben bewiesene Hilfssatz gestattet uns, für den λ-Index eine zweite Definition zu geben.

Man kann nämlich sagen, λ trenne die Zahlen ϱ, welche der Bedingung:

$$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^{\varrho}} = 0$$

genügen, von denjenigen, die ihr nicht genügen.

265. Ist $f(x)$ irgend eine ganze Funktion, die im Anfangspunkte, wie wir der Einfachheit halber voraussetzen wollen, den Wert 1 annimmt, und sind wie gewöhnlich $c_1, c_2, \cdots$ ihre Nullstellen, so kann man für jedes beliebige n schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{\prod\limits_{h=1}^{n} c_h} \prod_{h=1}^{n} (c_h - x) \cdot \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine zweite ganze Funktion ist, die im Anfangspunkte den Wert 1 besitzt und deren Nullstellen $c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots$ sind. Da das konstante Glied von $\varphi(x)$ gleich 1 ist, so ist (Art. 128), wenn ϱ irgend eine positive Größe bezeichnet:

$$1 \leqq M|\varphi(\varrho)| = \prod_{h=1}^{n} \gamma_h \cdot M\left|\frac{f(\varrho)}{\prod\limits_{h=1}^{n}(c_h - \varrho)}\right| \leqq \gamma_n^n M \left|\frac{f(\varrho)}{\prod\limits_{h=1}^{n}(c_h - \varrho)}\right|.$$

Erinnern wir uns der Definition des ν-Index, so gilt:

$$M|f(\varrho)| < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}} \tag{1}$$

für jedes ϱ, das größer ist als eine bestimmte Größe r. Nehmen wir n so groß, daß:

$$(e+1)\gamma_n > r$$

wird, so können wir alsdann:

$$\varrho = (e+1)\gamma_n$$

setzen. Bedenken wir ferner, daß für $h \leqq n$ und $|x| = \varrho$:

$$|c_h - x| \geqq \varrho - \gamma_h \geqq \varrho - \gamma_n = e\gamma_n,$$

mithin:

$$M\left|\frac{1}{\prod\limits_{h=1}^{n}(c_h - \varrho)}\right| \leqq \frac{1}{e^n \gamma_n^n}$$

ist, so erhalten wir schließlich:

$$1 < \gamma_n^n \frac{e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}}}{e^n \gamma_n^n},$$

oder auch:

$$n < \varrho^{\nu+\varepsilon} = (e+1)^{\nu+\varepsilon} \gamma_n^{\nu+\varepsilon},$$

woraus folgt:

$$(2) \qquad \frac{n}{\gamma_n^{\nu+\varepsilon}} < (e+1)^{\nu+\varepsilon}.$$

Es verbleibt also $\frac{n}{\gamma_n^{\nu+\varepsilon}}$ unterhalb einer festen Grenze; nach dem vorausgeschickten Hilfssatze konvergiert mithin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^{(\nu+\varepsilon)\alpha}}$ für jedes $\alpha > 1$ oder, was mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit von ε dasselbe ist, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^{\nu+\varepsilon'}}$ konvergiert für jedes $\varepsilon' > 0$. Daraus folgt $\nu \geqq \lambda$, d. h.:

Für jede beliebige ganze Funktion ist $\nu \geqq \lambda$.

Verbindet man dieses Ergebnis mit dem in Art. 263 gewonnenen, so darf man schließen:

Für jede Normalfunktion (insbesondere auch für jede einfache Funktion) ist $\lambda = \nu$.

266. Für den soeben bewiesenen Satz läßt sich ein zweiter, sehr einfacher Beweis geben.

Wir haben gefunden (Art. 244):

$$n \leqq \frac{\lg M(\varrho)}{\lg(\theta - 1)},$$

wo θ irgend eine Zahl bedeutet, die größer als 2 ist, n aber die Anzahl der Nullstellen der betrachteten Funktion ist, deren absoluter Betrag $< \frac{\varrho}{\theta}$ ist. Ist ϱ so groß, daß:

$$M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}}$$

wird, so haben wir, wenn wir bedenken, daß $\varrho < \theta\gamma_{n+1}$ ist:

$$n \leqq \frac{\gamma_{n+1}^{\nu+\varepsilon} \theta^{\nu+\varepsilon}}{\lg(\theta-1)};$$

daraus aber ergibt sich, daß $\frac{n}{\gamma_{n+1}^{\nu+\varepsilon}}$ unterhalb einer bestimmten endlichen Größe verbleibt. Dasselbe läßt sich offenbar von $\frac{n+1}{\gamma_{n+1}^{\nu+\varepsilon}}$ oder auch von $\frac{n}{\gamma_n^{\nu+\varepsilon}}$ behaupten, woraus folgt (Art. 264), daß, wenn $\varepsilon' > \varepsilon$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^{\nu+\varepsilon'}}$ konvergiert oder aber, daß $\lambda \leqq \nu$ ist.

267. Bezeichnen wir mit $m(\varrho)$ den kleinsten absoluten Wert von $f(x)$ auf der Kreislinie vom Radius ϱ um den Anfangspunkt, so gilt folgender Satz:

Ist $f(x)$ eine einfache ganze Funktion, so lassen sich, wenn ε und R gegeben sind, Werte $\varrho > R$ angeben, für welche:

$$m(\varrho) > e^{-\varrho^{\lambda+\varepsilon}}$$

wird.

I. Nehmen wir zunächst an, die Funktion sei 0^{ten} Ranges.

Ist irgend eine Zahl N gegeben, so läßt sich eine Zahl $n > N$ von der Art finden, daß $\gamma_{n+1} - \gamma_n > 2$ ist. Ließe sich nämlich ein Index h von der Art angeben, daß von ihm ab die Differenzen $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ sämtlich $\leqq 2$ sein würden, so daß:

$$\gamma_{h+1} \leqq \gamma_h + 2, \; \gamma_{h+2} \leqq \gamma_{h+1} + 2 \leqq \gamma_h + 4, \; \gamma_{h+3} \leqq \gamma_{h+2} + 2 \leqq \gamma_h + 6, \cdots,$$

so würde daraus folgen:

$$\frac{1}{\gamma_{h+1}} + \frac{1}{\gamma_{h+2}} + \frac{1}{\gamma_{h+3}} + \cdots \geqq \frac{1}{\gamma_h + 2} + \frac{1}{\gamma_h + 4} + \frac{1}{\gamma_h + 6} + \cdots$$
$$> \frac{1}{\gamma_h + 2} + \frac{1}{2\gamma_h + 4} + \frac{1}{3\gamma_h + 6} + \cdots = \frac{1}{\gamma_h + 2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right];$$

da aber die letzte Reihe divergiert, so würde die Funktion nicht 0-ten Ranges sein. Dies vorausgeschickt, läßt sich auf der Strecke $\gamma_n \gamma_{n+1}$ auf unendlich viele Arten ein Punkt wählen, der um mehr als 1 sowohl von γ_n wie von γ_{n+1} entfernt ist; dieser Punkt ist um mehr als 1 von allen Punkten γ entfernt. Ist also irgend eine Größe r gegeben, so lassen sich Werte $\xi = |x| > r$ von der Art angeben, daß:

$$(1) \qquad |\xi - \gamma_h| > 1 \qquad (h = 1, 2, \cdots).$$

Dem Hilfssatz des Art. 264 zufolge läßt sich, da die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}}$ konvergent ist, ein Index n von der Art angeben, daß für jedes $h \geqq n$ $\frac{h}{\gamma_h^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}} < 1$ oder auch $h < \gamma_h^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}$ ist. Wählt man x so, daß $\xi > \gamma_n$ ist und der Bedingung (1) genügt, und setzt man voraus, daß:

$$(2) \qquad \gamma_k < 2\xi < \gamma_{k+1},$$

wo sicherlich $k \geqq n$ und sonach:

$$(3) \qquad k < \gamma_k^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}} < (2\xi)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}$$

ist, so kann man schreiben:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\lambda}\left(1-\frac{x}{c_h}\right)\prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right) = f_1(x) f_2(x).$$

Mit Rücksicht auf (1), (2), (3) ergibt sich alsdann:

$$|f_1(x)| \geqq \prod_{h=1}^{k}\left|1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right| = \prod_{h=1}^{\lambda}\frac{|\gamma_h - \xi|}{\gamma_h} > \frac{1}{\prod\limits_{h=1}^{k}\gamma_h} >$$

$$> \frac{1}{\gamma_k^\lambda} > \frac{1}{(2\xi)^k} > (2\xi)^{-(2\xi)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}} = e^{-(2\xi)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}\lg 2\xi}.$$

Beachtet man ferner, daß (Art. 145, (5)) $e^{-u} < 1 - \frac{u}{2}$ für $0 < u < 1$ oder auch $e^{-2u} < 1 - u$ für $0 < u < \frac{1}{2}$, und bedenkt man, daß $\frac{\xi}{\gamma_h} < \frac{1}{2}$ für $h > k$, so hat man:

$$|f_2(x)| \geqq \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right) > e^{-2\xi\sum\limits_{h=k+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h}} = e^{-S\xi},$$

wo der Kürze wegen $2\sum\limits_{h=k+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h} = S$ gesetzt worden ist. Ist $\lambda < 1$ und wird auch $\lambda + \frac{\varepsilon}{2} < 1$ vorausgesetzt, so hat man für $h > k$:

$$\left(\frac{\xi}{\gamma_h}\right)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}} > \frac{\xi}{\gamma_h},$$

mithin:

$$|f_2(x)| > e^{-2\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}\sum\limits_{h=k+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}} = e^{-T\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

wo $2\sum\limits_{h=k+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}} = T$ gesetzt worden ist. Also ist:

$$|f(x)| > e^{-(2\xi)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}\lg 2\xi - S\xi} \tag{4}$$

und auch für $\lambda + \frac{\varepsilon}{2} < 1$:

$$|f(x)| > e^{-(2\xi)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}\lg 2\xi - T\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Da andrerseits $\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}} > \xi$ für $\lambda + \frac{\varepsilon}{2} > 1$, $\xi > 1$ ist, so folgt aus (4) unter diesen Voraussetzungen:

$$|f(x)| > e^{-(2\xi)^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}} \lg 2\xi - S\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Es läßt sich also für alle Fälle schreiben:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}[a \lg \xi + b]},$$

wo:

$$a = 2^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}, \quad b = 2^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}} \lg 2 + c,$$

und c die Konstante S oder T bedeutet.

Nun wissen wir (Art. 146), daß sich, während die positive Größe u unbeschränkt zunimmt, $\frac{(\lg u)^n}{u}$ für jedes n der Null nähert. Das bedeutet, daß sich nach Annahme einer willkürlichen Größe σ stets ein Wert r von der Art angeben läßt, daß $\frac{(\lg u)^n}{u} < \sigma$ für jedes $u > r$. Machen wir:

$$n = \frac{2}{\varepsilon}, \quad d = e^{\frac{b}{a}}, \quad \sigma = \frac{1}{a^{\frac{2}{\varepsilon}} d},$$

so ist für $u > r$:

$$(\lg u)^{\frac{2}{\varepsilon}} < \frac{u}{a^{\frac{2}{\varepsilon}} d},$$

oder auch:

$$\lg u < \frac{1}{a} \left(\frac{u}{d}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

und hieraus, wenn $\frac{u}{d} = \xi$ gesetzt wird, für jedes $\xi > \frac{r}{d}$:

$$\frac{1}{a} \xi^{\frac{\varepsilon}{2}} > \lg (d\xi) = \lg \xi + \lg d = \lg \xi + \frac{b}{a},$$

woraus schließlich folgt:

$$a \lg \xi + b < \xi^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

und:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}},$$

was sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$m(\varrho) > e^{-\varrho^{\lambda+\varepsilon}}.$$

II. Wir setzen jetzt die Funktion als vom Range $p > 0$ voraus:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}};$$

bezeichnen wir mit ω eine primitive $(p+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, so ist offenbar:

$$f(x) f(\omega x) f(\omega^2 x) \cdots f(\omega^p x) =$$

$$= \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^{p+1}}{c_h^{p+1}}\right) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{c_h^{p+1}}\right) = F(y),$$

wo $y = x^{p+1}$ ist. Die Funktion $F(y)$ ist eine einfache Funktion 0^{ten} Ranges; ihr λ-Index ist $\frac{\lambda}{p+1}$. Nimmt man also S beliebig an, so lassen sich nach dem oben Bewiesenen Werte $\eta = |y| > S$ von der Art finden, daß:

$$|F(y)| > e^{-\eta^{\frac{\lambda}{p+1} + \frac{\varepsilon}{2(p+1)}}}$$

oder aber, wenn man bedenkt, daß $\eta = \xi^{p+1}$:

$$|F(y)| > e^{-\xi^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}}$$

ist. Da andrerseits (Art. 265) für jede einfache Funktion $\nu = \lambda$ ist, so hat man für ein hinreichend großes ξ, z. B. für $\xi > Q$:

$$|f(\omega x)| < e^{\xi^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}}, \cdots, |f(\omega^p x)| < e^{\xi^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Daraus folgt, daß sich stets Werte x finden lassen, deren absoluter Betrag größer ist als die größere der beiden Zahlen Q, $\sqrt[p+1]{S}$, und für die:

$$|f(x)| > e^{-(p+1)\xi^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}}$$

ist. Endlich können wir eine Zahl P von der Art finden, daß für $\xi > P$:

$$p + 1 < \xi^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

ist. Wir können folglich, wenn wir mit R die größte der drei Zahlen Q, $\sqrt[p+1]{S}$, P bezeichnen, den Schluß ziehen, daß es stets möglich ist, bei beliebigem R Werte x von größerem absolutem Betrage als R zu finden, für die:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}}$$

wird.

268. Für den Fall, daß $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$ konvergiert, läßt sich ein Satz aufstellen, welcher den des vorigen Artikels umfaßt (vgl. Anm. 2 S. 230), nämlich:

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion und konvergiert $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$, so lassen sich bei beliebig gegebenen ε und R Werte $\varrho > R$ finden, für welche:

$$m(\varrho) > e^{-\varepsilon \varrho^{\lambda}}$$

ist.

I. Wir nehmen zunächst $p = 0$ an.

Da $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}$ konvergiert, während $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h \lg h}$ divergiert[1]), so ist für unendlich viele Werte von h:

$$\frac{h \lg h}{\gamma_h^{\lambda}} < \frac{\varepsilon \lambda}{4}.$$

Da andrerseits (Art. 264) $\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^{\lambda}} = 0$, so wächst $\frac{\gamma_h^{\lambda}}{h}$ gleichzeitig mit h unbegrenzt, und es läßt sich folglich (Art. 146) ein Wert von h angeben, von dem ab:

$$\frac{\lg \frac{\gamma_h^{\lambda}}{h}}{\frac{\gamma_h^{\lambda}}{h}} < \frac{\varepsilon \lambda}{4}$$

wird. Daraus folgt:

$$\frac{h \lg \gamma_h^{\lambda}}{\gamma_h^{\lambda}} < \frac{\varepsilon \lambda}{2},$$

oder auch:

$$\frac{h \lg \gamma_h}{\gamma_h^{\lambda}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

1) Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 133.

Hiernach nehme man eine Zahl k von der Art an, daß:

$$\sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda}} < \frac{\varepsilon}{4},$$

und eine Größe $\theta > 2$ und wähle x so, daß ξ von allen γ_h verschieden und:

$$\frac{\gamma_k}{\theta} < \xi < \frac{\gamma_k}{2}$$

wird; ferner werde mit σ eine Größe bezeichnet, die kleiner ist als $\frac{1}{\theta}$ und als $|x - c_1|, |x - c_2|, \cdots, |x - c_k|$. Da die Größen $\frac{\gamma_h}{\sigma}$ dieselben Eigenschaften besitzen wie die γ_h, so haben wir für unendlich viele Werte von h:

$$\frac{h \lg \frac{\gamma_h}{\sigma}}{\gamma_h^{\lambda}} < \frac{\varepsilon}{2}\sigma^{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2\theta^{\lambda}}.$$

Es ist dann:

$$\left|\prod_{h=1}^{k}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right)\right| > \frac{\sigma^k}{\prod\limits_{h=1}^{k} \gamma_h} > \left(\frac{\sigma}{\gamma_k}\right)^k = e^{-k \lg \frac{\gamma_k}{\sigma}},$$

mithin, wenn k hinreichend groß ist:

$$\left|\prod_{h=1}^{k}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right)\right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2\theta^{\lambda}}\gamma_k^{\lambda}} > e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{\lambda}}.$$

Da ferner $\frac{\xi}{\gamma_h} < \frac{1}{2}$ für $h > k$ ist, so ist wegen (5) des Art. 145 (vgl. den vorigen Artikel):

$$\left|\prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right)\right| > e^{-2\sum\limits_{h=k+1}^{\infty}\frac{\xi}{\gamma_h}},$$

und folglich, da $\lambda \leqq 1$:

$$\left|\prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right)\right| > e^{-2\xi^{\lambda}\sum\limits_{h=k+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h^{\lambda}}} > e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^{\lambda}}.$$

Es ergibt sich daher schießlich:

$$|f(x)| > e^{-\varepsilon\xi^{\lambda}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$m(\varrho) > e^{-\varepsilon \varrho^{\lambda}}.$$

II. Wir nehmen jetzt $p > 0$ an.

Indem wir die Bezeichnungen des vorigen Artikels beibehalten, haben wir in dem vorliegenden Falle:

$$|F(y)| > e^{-\frac{\varepsilon}{p+1}\eta^{\frac{\lambda}{p+1}}} = e^{-\frac{\varepsilon}{p+1}\xi^{\lambda}},$$

wo wir $\frac{\varepsilon}{p+1}$ anstatt ε gesetzt haben; andrerseits ist wegen (1) in Art. 263:

$$|f(\omega x)| < e^{\frac{\varepsilon}{p+1}\xi^{\lambda}}, \cdots, |f(\omega^p x)| < e^{\frac{\varepsilon}{p+1}\xi^{\lambda}},$$

mithin:

$$|f(x)| > e^{-\varepsilon \xi^{\lambda}}.$$

269. Ist $f(x)$ eine ganze Funktion, und sind nach Annahme einer willkürlichen Größe R Werte $\varrho > R$ von der Art vorhanden, daß der reelle Teil von $f(x)$ für alle Punkte der Kreislinie vom Radius ϱ um den Anfangspunkt kleiner ist als $c\varrho^{\theta}$, wo c und θ positive Größen sind, so ist $f(x)$ ein Polynom, und zwar ist sein Grad $\leqq \theta$; gilt ferner diese Beziehung für jede beliebige positive Größe c, so ist der Grad des Polynoms $< \theta$.

Wird $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ gesetzt, so hat man (Art. 129,(3)):

$$|a_r| \leqq \frac{4}{\varrho^r}\left[C(\varrho) - \frac{1}{2}a_0'\right],$$

und, da in unserm Falle $C(\varrho) \leqq c\varrho^{\theta}$ ist:

$$|a_r| \leqq \frac{4}{\varrho^r}\left[c\varrho^{\theta} - \frac{1}{2}a_0'\right].$$

Nun läßt sich, welches auch die positive Größe τ sei, ein so großes S finden, daß für jedes $\varrho > S$:

$$\tfrac{1}{2}|a_0'| < \tau\varrho^{\theta}$$

wird; man hat alsdann für unendlich viele Werte von ϱ, die größer sind als S:

$$|a_r| < 4(c+\tau)\varrho^{\theta - r}.$$

Daraus folgt zunächst, daß $a_r = 0$ für $r > \theta$; ferner hat man, wenn c beliebig klein sein kann, auch $a_r = 0$ für $r = \theta$. Damit ist unser Satz bewiesen.

270. Umgekehrt: Ist $g(x)$ ein Polynom vom Grade q:

$$g(x) = \sum_{h=0}^{q} b_h x^h,$$

so läßt sich nach Wahl einer positiven Konstanten $c > |b_q|$ ein Wert R von der Art angeben, daß für jeden Wert $\xi = |x| > R$:

(1) $$\Re g(x) < c\xi^q$$

wird; es läßt sich ferner nach Wahl irgend zweier positiven Konstanten σ, ε ein Wert S von der Art angeben, daß für jedes $\xi = |x| > S$:

(2) $$\Re g(x) < \sigma \xi^{q+\varepsilon}$$

wird.

Man hat, wenn $|b_h| = \beta_h$ gesetzt wird:

(3) $$\Re g(x) \leqq \sum_{h=0}^{q} \beta_h \xi^h.$$

Ist $c = \beta_q + \tau$, so hat die Gleichung:

$$c\xi^q - \sum_{h=0}^{q} \beta_h \xi^h = \tau \xi^q - \sum_{h=0}^{q-1} \beta_h \xi^h = 0$$

nach dem Descartesschen Satze eine einzige positive Wurzel R, und ihre linke Seite ist für jedes $\xi > R$ positiv, so daß (1) wegen (3) durch jedes $\xi > R$ erfüllt wird.

Setzen wir nun voraus, wir hätten willkürlich eine Größe $c > \beta_q$ angenommen und die entsprechende R bestimmt, so können wir eine positive Größe R' finden, die der Gleichung:

$$c = \sigma R'^{\varepsilon}$$

genügt, wo σ und ε beliebig gegeben sind. Man hat alsdann für jedes $\xi > R'$:

$$c < \sigma \xi^{\varepsilon},$$

und somit für jedes ξ, das größer ist als die größere der beiden Zahlen R, R':

$$\sum_{h=0}^{q} \beta_h \xi^h < c\xi^q < \sigma \xi^{q+\varepsilon},$$

woraus wegen (3) die Formel (2) folgt.

Es möge bemerkt werden, daß sich aus dem Beweise ergibt:

$$|g(x)| < c\xi^q,$$
$$|g(x)| < \sigma \xi^{q+\varepsilon}.$$

Ist ε' eine beliebig kleine positive Größe, so hat man für $\xi > 1$, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet, die größer ist als $\frac{q+\varepsilon}{\varepsilon'}$:

$$\xi^{q+\varepsilon} < (\xi^{\varepsilon'})^m,$$

folglich wegen Art. 146 für hinreichend große ξ:

$$\xi^{q+\varepsilon} < e^{\xi^{\varepsilon'}},$$

und schließlich:

$$|g(x)| < \sigma e^{\xi^{\varepsilon'}}.$$

D. h.: Für jedes Polynom ist der ν-Index Null[1]).

Es liege wiederum ein Polynom $g(x)$ vor; durch die Substitution $y = \theta x$, wo θ eine vor der Hand noch unbestimmte positive Größe bedeutet, geht $g(x)$ wiederum in ein Polynom $G(y)$ über. Es läßt sich alsdann nach Wahl einer willkürlichen Größe ε' ein Wert S von der Art finden, daß für $|y| = \eta > S$ stets:

$$|G(y)| < e^{\eta^{\varepsilon'}}$$

wird (der Einfachheit wegen nehmen wir hier $\sigma = 1$). Daraus folgt für $\xi > \frac{S}{\theta}$:

$$|g(x)| < e^{\theta^{\varepsilon'} \xi^{\varepsilon'}}.$$

---

1) Diese Eigenschaft kommt nicht ausschließlich den Polynomen zu. So ist z. B. für die einfache Funktion:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{(1+c)^h}\right),$$

wo c eine beliebige positive Größe bezeichnet, $\lambda = 0$, und folglich $\nu = 0$, da ja die Reihe:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(1+c)^{h\varepsilon}}$$

für jedes noch so kleine positive ε konvergiert.

Nehmen wir ε willkürlich an und bestimmen dann θ mittels der Gleichung:

$$\varepsilon = \theta^{\varepsilon'},$$

so ist für jedes $\xi > \frac{S}{\theta}$:

$$|g(x)| < e^{\varepsilon\,\xi^{\varepsilon'}}.$$

271. Die bisher bewiesenen Sätze setzen uns in den Stand, die zwischen dem λ-Index und dem ν-Index einer beliebigen ganzen Funktion bestehenden Beziehungen mit ziemlicher Genauigkeit festzustellen.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion, deren ν-Index und folglich auch λ-Index ($\lambda \leqq \nu$, Art. 265) endlich sein möge, so können wir setzen:

$$(1) \qquad f(x) = e^{g(x)}\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine einfache Funktion vom endlichen Range $p \begin{cases} \leqq \lambda \\ \geqq \lambda - 1 \end{cases}$ bezeichnet. Da der λ-Index nur von den Nullstellen abhängt, so besitzt er für beide Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ ein und denselben Wert. Man hat also für unendlich viele beliebig große Werte von ξ (Art. 267):

$$|\varphi(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}},$$

und daraus, weil $\lambda \leqq \nu$:

$$|\varphi(x)| > e^{-\xi^{\nu+\varepsilon}}.$$

Andrerseits hat man zufolge der Definition des ν-Index für alle hinreichend großen Werte von ξ:

$$|f(x)| < e^{\xi^{\nu+\varepsilon}}.$$

Daraus ergibt sich für unendlich viele beliebig große Werte von ξ:

$$|e^{g(x)}| < e^{2\xi^{\nu+\varepsilon}},$$

oder auch:

$$|\Re g(x)| < 2\xi^{\nu+\varepsilon};$$

mithin ist (Art. 269) $g(x)$ ein Polynom von einem Grade $q \leqq \nu$; d. h.:

Jede ganze Funktion mit endlichem ν-Index ist eine Funktion von endlicher Höhe.

Umgekehrt:

Jede ganze Funktion von endlicher Höhe besitzt einen endlichen ν-Index.

Es liege wiederum die Funktion (1) vor, in der $g(x)$ ein Polynom vom Grade q, $\varphi(x)$ aber eine einfache Funktion vom Range p sein

möge. Der λ-Index von $\varphi(x)$ ist dann endlich, weil er zwischen p und $p+1$ liegt, der ν-Index ist aber ihm gleich, so daß für hinreichend große Werte von ξ:

$$|\varphi(x)| < e^{\xi^{\lambda+\varepsilon}}$$

wird. Ferner ist (Art. 270):

$$\Re g(x) < \xi^{q+\varepsilon},$$

mithin:

$$|e^{g(x)}| < e^{\xi^{q+\varepsilon}},$$

und folglich:

$$|f(x)| < e^{\xi^{\lambda+\varepsilon}+\xi^{q+\varepsilon}}.$$

Nennt man δ die größere der beiden Zahlen λ, q, und nimmt man ξ so groß, daß:

$$\xi^{\varepsilon'-\varepsilon} > 2$$

wird, wo ε' willkürlich, aber größer als ε ist, so hat man:

$$|f(x)| < e^{\xi^{\delta+\varepsilon'}},$$

so daß $\nu \leqq \delta$ ist. Also ist ν die größere der beiden Zahlen λ, q.

Ist ν nicht ganzzahlig, so ist, weil q nicht gleich ν sein kann, $\lambda = \nu$, und die Höhe der Funktion ist die größte ganze Zahl unterhalb ν.

Ist ν ganzzahlig, q aber kleiner als ν, so hat man ebenfalls $\lambda = \nu$; die Höhe ist daher ν oder $\nu - 1$, je nachdem $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\nu}}$ divergiert oder konvergiert. Im zweiten Falle hat man (Art. 263):

$$|\varphi(x)| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\xi^{\nu}};$$

da aber auch (Art. 270):

$$|e^{g(x)}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\xi^{\nu}},$$

so folgt daraus:

$$|f(x)| < e^{\varepsilon\xi^{\nu}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$M(\varrho) < e^{\varepsilon\varrho^{\nu}}.$$

Ist ν ganzzahlig und $q = \nu$, so ist $\lambda \leqq \nu$, und die Höhe ist ν Bezeichnet also r die Höhe, so kann man schließen:

Ist ν nicht ganzzahlig, so ist $\lambda = \nu$, $r = E(\nu)$[1].

Ist ν ganzzahlig, ohne daß die Beziehung:

$$M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^{\nu}}$$

besteht, so ist $\lambda \leqq \nu$, $r = \nu$; dagegen ist, wenn diese Beziehung besteht, entweder $\lambda \leqq \nu$, $r = \nu$ oder $\lambda = \nu$, $r = \nu - 1$.

Kürzer:

Die Höhe einer ganzen Funktion ist für ein ganzzahliges ν entweder ihrem ν-Index gleich oder um eine Einheit kleiner als dieser.

272. Zu genaueren Ergebnissen, als die des Art. 263 sind, führen uns die Sätze, die wir in diesem und den folgenden Artikeln entwickeln wollen.

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion und soll für eine bestimmte positive Größe σ und für hinreichend große Werte von ϱ:

(1) $$M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^{\sigma}}$$

sein, so ist notwendig, daß:

$$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^{\sigma}} = 0$$

ist.

Nach demselben Verfahren wie in Art. 265 erhält man, wenn nicht von Formel (1) in jenem, sondern von Formel (1) in diesem Artikel ausgegangen wird, anstatt (2) die Beziehung:

$$\frac{n}{\gamma_n^{\sigma}} < \varepsilon (e+1)^{\sigma},$$

womit der Satz bewiesen ist.

273. Ist $f(x)$ eine einfache Funktion vom Range p und hat man, wenn $p < \sigma \leqq p + 1$:

(1) $$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^{\sigma}} = 0,$$

so ist für hinreichend große ϱ auch:

(2) $$M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^{\sigma}}.$$

1) Man bezeichnet bekanntlich mit $E(\nu)$ die größte in ν enthaltene ganze Zahl.

I. Wir setzen zunächst $p = 0$, mithin $0 < \sigma \leqq 1$ voraus.

1. Ist $\sigma = 1$, so gilt notwendigerweise die Gleichung (1) auf Grund des Hilfssatzes in Art. 264 und der Konvergenz der Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h}$. Ferner erhält man infolge der Konvergenz dieser Reihe und, weil $\lambda \leqq 1$, wegen (1) in Art. 263 die Formel (2).

2. Es sei $\sigma < 1$. Nach Voraussetzung läßt sich für ein beliebiges δ eine Zahl m von der Art bestimmen, daß für jedes $h > m$:

$$\frac{h}{\gamma_h^\sigma} < \delta \tag{3}$$

wird. Andrerseits kann für ein noch so großes ξ eine ganze Zahl n von der Art gewählt werden, daß:

$$n - 1 < \delta \xi^\sigma \leqq n \tag{4}$$

wird. Wir können weiterhin ξ so groß voraussetzen, daß $n > 2$ und $m < n$ ist; dann schreiben wir:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{m}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) \cdot \prod_{h=m+1}^{n}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) \cdot \prod_{h=n+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x).$$

Da $f_1(x)$ ein Polynom ist, so hat man (Art. 270) für jedes ξ, das eine bestimmte, lediglich von $m, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ und δ abhängige Größe R übertrifft:

$$|f_1(x)| < e^{\delta \xi^\sigma}.$$

Wegen (3), (4) ist ferner:

$$|f_2(x)| \leqq \prod_{h=m+1}^{n}\left(1 + \frac{\xi}{\gamma_h}\right) < \prod_{h=1}^{n}\left(1 + \left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)$$

$$< \prod_{h=1}^{n} \frac{2 n^{\frac{1}{\sigma}}}{h^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\left(2 n^{\frac{1}{\sigma}}\right)^n}{(n!)^{\frac{1}{\sigma}}} = \left(\frac{(2^\sigma n)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\sigma}};$$

nun ist offenbar für jede positive Zahl x:

$$\frac{x^n}{n!} < e^x,$$

mithin:

$$|f_2(x)| < e^{\frac{1}{\sigma} 2^\sigma n}.$$

Es ist aber:

$$n < \delta \xi^\sigma + 1, \quad \delta \xi^\sigma \geqq 1,$$

mithin:

$$n < 2 \delta \xi^\sigma$$

und:

$$|f_2(x)| < e^{\frac{1}{\sigma} 2^{\sigma+1} \delta \xi^\sigma}.$$

Endlich ist wegen (3):

$$|f_3(x)| \leqq \prod_{h=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi}{\gamma_h}\right) < \prod_{h=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\delta^{\frac{1}{\sigma}} \xi}{h^{\frac{1}{\sigma}}}\right),$$

mithin, da $e^x > 1 + x$ für $x > 0$:

$$|f_3(x)| < e^{\delta^{\frac{1}{\sigma}} \xi \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma}}}}.$$

Nun ist, wenn τ eine positive Größe bedeutet:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\tau+1}} < \alpha \frac{1}{n^\tau},$$

wo α eine Zahl ist, die lediglich von τ abhängt[1]). Man hat sonach in unserem Falle:

---

1) Bestimmen wir k so, daß:

$$2^{k-1} < n \leqq 2^k,$$

so können wir schreiben:

$$S = \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\tau+1}} = \left(\sum_{h=n+1}^{2^k} + \sum_{h=2^k+1}^{2^{k+1}} + \sum_{h=2^{k+1}+1}^{2^{k+2}} + \cdots \right) \frac{1}{h^{\tau+1}}$$

$$< (2^k - n) \frac{1}{n^{\tau+1}} + 2^k \frac{1}{2^{k(\tau+1)}} + 2^{k+1} \frac{1}{2^{(k+1)(\tau+1)}} + \cdots$$

$$= (2^k - n) \frac{1}{n^{\tau+1}} + \frac{1}{(2^\tau)^k} + \frac{1}{(2^\tau)^{k+1}} + \cdots = (2^k - n) \frac{1}{n^{\tau+1}} + \frac{\frac{1}{2^{k\tau}}}{1 - \frac{1}{2^\tau}}.$$

Nun ist:

$$2^k - n < 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1} < n, \quad \frac{1}{2^{k\tau}} \leqq \frac{1}{n^\tau},$$

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma}}} < \alpha \frac{1}{n^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}},$$

und wegen (4):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma}}} < \frac{\alpha}{\delta^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \xi^{1-\sigma}},$$

woraus sich schließlich ergibt:

$$|f_3(x)| < e^{\alpha \delta \xi^\sigma},$$

und:

$$|f(x)| < e^{\left(1+\frac{2^{\sigma+1}}{\sigma}+\alpha\right)\delta \xi^\sigma}.$$

Wählt man also δ so, daß:

$$\left(1 + \frac{2^{\sigma+1}}{\sigma} + \alpha\right)\delta < \varepsilon,$$

so hat man:

$$|f(x)| < e^{\varepsilon \xi^\sigma},$$

eine Ungleichung, die mit (2) gleichbedeutend ist.

II. Wir setzen jetzt $p > 0$ voraus.

1. Ist $\sigma = p + 1$, so gilt die Gleichung (1) notwendigerweise auf Grund des Hilfssatzes in Art. 264 und wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{p+1}}$. Ferner erhält man infolge der Konvergenz dieser Reihe und, weil $\lambda \leqq p+1$ ist, wegen (1) in Art. 263 die Formel (2).

---

mithin:

$$S < \frac{1}{n^\tau}\left(1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^\tau}}\right) = \frac{2^{\tau+1}-1}{2^\tau - 1} \cdot \frac{1}{n^\tau},$$

oder einfacher:

$$S < \alpha \frac{1}{n^\tau},$$

wo:

$$\alpha = \frac{2^{\tau+1}-1}{2^\tau - 1}.$$

2. Ist $p < \sigma < p + 1$ und setzt man wie früher:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}} = \prod_{h=1}^{\infty} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right)$$

$$= \left(\prod_{h=1}^{m} \cdot \prod_{h=m+1}^{n} \cdot \prod_{h=n+1}^{\infty}\right) E_p\left(\frac{x}{c_h}\right) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x),$$

so hat man (Art. 261) nach Annahme irgend eines σ', das kleiner als σ, aber größer als p ist, für jeden beliebigen Wert von ξ:

$$|f_1(x)| < e^{c\,\xi^{\sigma'} \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\gamma_h^{\sigma'}}},$$

wo c eine Konstante bedeutet, die nur von p abhängt; ist daher ξ so groß, daß für eine willkürliche Größe δ:

$$c \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\gamma_h^{\sigma'}} < \delta\, \xi^{\sigma - \sigma'}$$

wird, so ist:

$$|f_1(x)| < e^{\delta\, \xi^{\sigma}}.$$

Weiter ist:

$$|f_2(x)| \leqq \prod_{h=m+1}^{n} \left(1 + \frac{\xi}{\gamma_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k \gamma_h^k}} < \prod_{h=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) \cdot e^{\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k \gamma_h^k}}.$$

Nun ist, wie früher:

$$\prod_{h=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{n}{h}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < e^{\frac{1}{\sigma} 2^{\sigma+1} \delta\, \xi^{\sigma}}.$$

Sodann ergibt sich:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k \gamma_h^k} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\, n^{\frac{k}{\sigma}} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^{\frac{k}{\sigma}}};$$

es ist aber[1]):

---

1) Es ist zu beachten, daß $\frac{k}{\sigma} < 1$ ist. Setzt man der Einfachheit wegen $\frac{k}{\sigma} = \tau$, und wählt man eine Zahl k so, daß:

$$2^{k-1} \leqq n < 2^{k}$$

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^{\frac{k}{\sigma}}} < \beta n^{1-\frac{k}{\sigma}},$$

wo β nur von $\frac{k}{\sigma}$ abhängt, also:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k \gamma_h^k} < n \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta}{k} = \theta n < 2\theta\delta\xi^{\sigma},$$

wo θ nur von p und σ abhängig ist. Daraus folgt:

$$|f_2(x)| < e^{\left(\frac{1}{\sigma} 2^{\sigma+1} + 2\theta\right) \delta \xi^{\sigma}}.$$

Endlich ist (Art. 261,(8), wenn wir darin $\tau = 1$ gesetzt denken):

$$|f_3(x)| < e^{c\xi^{p+1} \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{p+1}}},$$

und wegen (3):

$$|f_3(x)| < e^{c\xi^{p+1} \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{h}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}}} = e^{c\delta^{\frac{p+1}{\sigma}} \xi^{p+1} \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{p+1}{\sigma}}}};$$

nun ist (s oben):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{p+1}{\sigma}}} < \alpha \frac{1}{n^{\frac{p+1}{\sigma}-1}},$$

---

wird, so hat man:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^{\tau}} \leqq \sum_{h=1}^{2^k-1} \frac{1}{h^{\tau}} < 1 + 2\frac{1}{2^{\tau}} + 2^2 \frac{1}{2^{2\tau}} + \cdots + 2^{k-1} \frac{1}{2^{(k-1)\tau}}$$
$$= 1 + 2^{1-\tau} + (2^{1-\tau})^2 + \cdots + (2^{1-\tau})^{k-1}$$
$$= \frac{(2^{1-\tau})^k - 1}{2^{1-\tau} - 1} < \frac{(2^k)^{1-\tau}}{2^{1-\tau} - 1} \leqq \frac{2^{1-\tau}}{2^{1-\tau} - 1} n^{1-\tau},$$

oder einfacher:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^{\tau}} < \beta n^{1-\tau},$$

wo:

$$\beta = \frac{2^{1-\tau}}{2^{1-\tau} - 1}.$$

also wegen (4):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{p+1}{\sigma}}} < \frac{\alpha}{(\delta \xi^{\sigma})^{\frac{p+1}{\sigma}-1}},$$

mithin:

$$|f_3(x)| < e^{c\alpha\delta\xi^{\sigma}}.$$

Aus den gefundenen Beziehungen folgt:

$$|f(x)| < e^{\left(1+\frac{1}{\sigma}2^{\sigma+1}+2\theta+c\alpha\right)\delta\xi^{\sigma}};$$

wählt man δ so, daß:

$$\left(1+\frac{1}{\sigma}2^{\sigma+1}+2\theta+c\alpha\right)\delta < \varepsilon$$

wird, so hat man:

$$|f(x)| < e^{\varepsilon\xi^{\sigma}}.$$

274. Der vorige Satz gilt auch noch für $\sigma = p$, falls $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^p}$ konvergiert und als Summe Null hat[1]).

Natürlich muß $p > 0$ sein.

Wir bestimmen m, n wie früher, unterwerfen aber n der weiteren Bedingung, daß:

$$\left|\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{c_h^p}\right| < \delta$$

sei. Es möge dann gesetzt werden:

$$f(x) = \left(\prod_{h=1}^{m} \cdot \prod_{h=m+1}^{n} \cdot \prod_{h=n+1}^{\infty}\right) E_p\left(\frac{x}{c_h}\right)$$

$$= e^{\sum_{h=1}^{n}\frac{x^p}{p c_h^p}} \prod_{h=1}^{m} E_{p-1}\left(\frac{x}{c_h}\right) \cdot \prod_{h=m+1}^{n} E_{p-1}\left(\frac{x}{c_h}\right) \cdot \prod_{h=n+1}^{\infty} E_p\left(\frac{x}{c_h}\right)$$

$$= f_0(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x).$$

---

1) Dieser Satz zeigt, daß die bloße Betrachtung der absoluten Beträge der Nullstellen nicht ausreicht, um das Verhalten der Funktion im Unendlichen zu erkennen. Jedoch weist Boutroux (539) nach, daß es sich nur in dem Falle eines ganzzahligen ν-Index als notwendig erweisen kann, neben den absoluten Beträgen der Nullstellen auch noch andere Elemente, nämlich die Argumente, in Betracht zu ziehen.

Man hat:

$$|f_0(x)| < e^{\frac{\xi^p}{p}\left|\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{c_h^p}\right|} < e^{\frac{\delta}{p}\xi^p};$$

ferner ist wegen der Art. 261, 262 (indem wir $p-1$ statt p schreiben und $\tau = 1$ setzen):

$$|f_1(x)| < e^{c'\delta\xi^p},$$

wo c' eine Konstante bezeichnet. Weiter ist, wie im vorigen Artikel:

$$|f_2(x)| < e^{\left(\frac{1}{p}2^{p+1}+2\theta\right)\delta\xi^p},$$

wo $\theta = \sum_{\lambda=1}^{p-1}\frac{\beta}{k}$ für $p > 1$, dagegen $\theta = 0$ für $p = 1$ ist.

Endlich ist:

$$|f_3(x)| < e^{c\alpha\delta\xi^p}.$$

Also:

$$|f(x)| < e^{\left(\frac{1}{p}+c'+\frac{1}{p}2^{p+1}+2\theta+c\alpha\right)\delta\xi^p},$$

oder auch:

$$|f(x)| < e^{\varepsilon\xi^p},$$

wenn δ so gewählt wird, daß:

$$\left(\frac{1}{p}+c'+\frac{1}{p}2^{p+1}+2\theta+c\alpha\right)\delta < \varepsilon$$

ist.

275. Berücksichtigt man, daß der λ-Index die Eigenschaft hat (Art. 264), daß für eine beliebige positive Größe δ:

$$(1) \qquad \lim_{h=\infty}\frac{h}{\gamma_h^{\lambda+\delta}} = 0$$

ist, so gelangt man auf Grund der bewiesenen Sätze zu folgenden Schlüssen:

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion, so hat man für hinreichend große ϱ:

$$M(\varrho) < e^{\varepsilon\varrho^{\lambda+\delta}},$$

wofür man auch schreiben kann[1]):

$$M(\varrho) < e^{\varrho^{\lambda+\delta'}}.$$

---

1) Es genügt, ϱ so groß zu nehmen, daß für $\delta' > \delta$:

$$\varepsilon < \varrho^{\delta'-\delta}$$

ist.

Gilt (1) auch noch für $\delta = 0$, d. h. ist:

$$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^\lambda} = 0,$$

so ist zum Bestehen der Beziehung:

$$M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^\lambda}$$

hinreichend, daß:

a) $\lambda > p$, mithin:
entweder λ nicht ganzzahlig,
oder $\lambda = p + 1$, d. h. ganzzahlig und von der Art ist, daß $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^\lambda}$ konvergiert;

b) $\lambda = p$ und $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^\lambda}$ konvergent und gleich Null ist.

In diesem letzten Falle kann man sagen, die Funktion verhalte sich wie eine Funktion vom Range $p-1$, da ja:

$$M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^p}$$

ist.

276. Bisher haben wir nur die Beziehungen untersucht, welche zwischen dem λ- und dem ν-Index obwalten; wir wollen jetzt auch den μ-Index betrachten.

Wir schicken zwei Hilfssätze voraus:

I. Ist $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine beständig konvergierende Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, und läßt sich nach Annahme einer beliebigen Größe R stets ein positiver Wert x finden, der größer als R ist und für den die Reihe einen nicht negativen Wert hat, so gibt es unter den Koeffizienten unendlich viele nicht negative.

Wäre in der Tat die Anzahl der nicht negativen Koeffizienten endlich, so würden alle Koeffizienten von einem bestimmten Index n ab negativ sein; würde dann R, was stets möglich ist, mittels der Beziehung bestimmt:

$$|a_{n+1}| R^{n+1} = \sum_{h=0}^{n} |a_h| R^h,$$

so müßte die Reihe für jeden Wert $x > R$ einen negativen Wert besitzen.

II. Konvergiert die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} b_h^k = B_k$, wo die b_h positiv sind und k eine positive Größe ist, so hat man, wenn θ eine Größe bezeichnet, die größer als 1 ist:

$$B_k < \left[\sum_{h=0}^{\infty} b_h\right]^k \qquad \text{für } k > 1,$$

$$B_k \leqq \left(\frac{\theta}{\theta - 1}\right)^{1-k} \left[\sum_{h=0}^{\infty} \theta^{\frac{1-k}{k}h} b_h\right]^k \quad \text{für } k < 1$$

(wobei die rechtsstehenden Reihen als konvergent vorausgesetzt werden).

a) Sei $k > 1$. Da die b_h positiv sind, so hat man, wenn der Kürze halber $\sum_{h=0}^{\infty} b_h = B$ gesetzt wird:

$$\frac{b_h}{B} < 1,$$

mithin, weil $k - 1 > 0$:

$$\frac{b_h^{k-1}}{B^{k-1}} < 1,$$

oder auch:

$$\frac{b_h^k}{B^k} < \frac{b_h}{B}.$$

Summieren wir über alle Werte von h, so erhalten wir:

$$\frac{B_k}{B^k} < 1.$$

b) Sei $k < 1$. Wir bezeichnen allgemein mit:

$$(1) \qquad P = \sum_{h=0}^{\infty} p_h, \quad Q = \sum_{h=0}^{\infty} q_h$$

zwei konvergente Reihen mit positiven Gliedern und setzen:

$$q_h = p_h r_h.$$

Wir haben alsdann[1]):

---

1) Ist $s > 0$ und $1 > k > 0$, so hat man:

$$s^k \leqq 1 + k(s - 1),$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $s = 1$ gilt. — Es genügt, diese Formel

$$\left(\frac{P}{Q} r_h\right)^k \leqq 1 + k\left(\frac{P}{Q} r_h - 1\right),$$

mithin:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^k p_h r_h^k \leqq p_h + k\left(\frac{P}{Q} q_h - p_h\right) = (1-k)p_h + k\frac{P}{Q} q_h,$$

oder auch:

$$p_h r_h^k \leqq \left(\frac{Q}{P}\right)^k (1-k)p_h + k\left(\frac{Q}{P}\right)^{k-1} q_h,$$

woraus sich durch Summierung in bezug auf h und mit Rücksicht auf (1):

$$(2) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} p_h r_h^k \leqq \frac{Q^k}{P^{k-1}}(1-k) + \frac{Q^k}{P^{k-1}} k = P^{1-k} Q^k$$

ergibt. Setzen wir nun:

$$p_h = \theta^{-h}, \quad r_h = \theta^{\frac{h}{k}} b_h,$$

mithin:

$$q_h = \theta^{\frac{1-k}{k}h} b_h, \quad p_h r_h^k = b_h^k, \quad P = \sum_{h=0}^{\infty} \theta^{-h} = \frac{\theta}{\theta - 1},$$

---

für den Fall eines rationalen k zu beweisen, weil man ja in bekannter Weise von diesem Falle zu dem eines irrationalen k gelangt.

Es sei also $k = \frac{m}{n}$, $m < n$. Setzt man $s = t^n$, so hat man:

$$\frac{s^k - 1}{s - 1} = \frac{t^m - 1}{t^n - 1} = \frac{1 + t + t^2 + \cdots + t^{m-1}}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}} = \frac{M}{N}.$$

Die ersten m Glieder von N bilden M. Schreiben wir $N - M = R$, so haben wir für $s \gtrless 1$:

$$t \gtrless 1, \quad M \lesseqgtr m t^{m-1}, \quad R \gtrless (n-m) t^{m-1}, \quad \frac{s-1}{s^k - 1} = 1 + \frac{R}{M} \gtrless \frac{n}{m} = \frac{1}{k},$$

oder auch:

$$\frac{s^k - 1}{s - 1} \lesseqgtr k.$$

Nun ist, je nachdem $s \gtrless 1$, $s - 1 \gtrless 0$, mithin in jedem Falle:

$$s^k - 1 < k(s-1),$$

oder auch:

$$s^k < 1 + k(s-1).$$

Für $s = 1$ verifiziert man unmittelbar, daß:

$$s^k = 1 + k(s-1).$$

so folgt aus (2):

$$B_k \leqq \left(\frac{\theta}{\theta - 1}\right)^{1-k} \left[\sum_{h=0}^{\infty} \theta^{\frac{1-k}{k} h} b_h\right]^k.$$

277. Es sei $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine ganze Funktion und $\alpha_h = |a_h|$. Läßt sich, wenn A, c, σ positive Größen sind, eine Größe R von der Art bestimmen, daß für jedes $\varrho > R$:

$$M(\varrho) \leqq A e^{c \varrho^\sigma} \tag{1}$$

wird, so ist alsdann[1]):

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \leqq (e c \sigma)^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{2}$$

oder, was dasselbe ist (s. Art. 259, (1)):

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left((h!)^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h\right)^{\frac{1}{h}} \leqq (c\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{3}$$

Aus (1) folgt (Art. 128):

$$\alpha_h \leqq \frac{A e^{c \varrho^\sigma}}{\varrho^h}.$$

Ist R irgendwie gegeben, so nehmen wir:

$$h > c\sigma R^\sigma, \quad \varrho = \left(\frac{h}{c\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} > R;$$

dann ist:

$$\alpha_h \leqq \frac{A e^{\frac{h}{\sigma}}}{\left(\frac{h}{c\sigma}\right)^{\frac{h}{\sigma}}} = A \left(\frac{e c \sigma}{h}\right)^{\frac{h}{\sigma}},$$

---

1) Es sei daran erinnert (vgl. Art. 113), daß dies nichts anderes bedeutet als: Die Produkte $h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}$ übertreffen für jedes h, das größer ist als eine bestimmte endliche Grenze, eine Größe nicht, die um noch so wenig größer ist als $(e c \sigma)^{\frac{1}{\sigma}}$. Entsprechend drückt Formel (2) des folgenden Artikels aus, daß es beliebig große Werte von h gibt, für die diese Produkte nicht kleiner sind als eine Größe, die um noch so wenig kleiner ist als $(e c \sigma)^{\frac{1}{\sigma}}$.

mithin:

$$h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}} \leqq A^{\frac{1}{h}} (ec\sigma)^{\frac{1}{\sigma}},$$

und schließlich, da $\overline{\lim\limits_{h=\infty}} A^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{h=\infty} A^{\frac{1}{h}} = 1$ für jeden beliebigen Wert A ist:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \leqq (ec\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

278. Gibt es bei beliebigem R Werte $\varrho > R$, für die:

(1) $$M(\varrho) \geqq A e^{c\varrho^\sigma}$$

wird, so ist alsdann:

(2) $$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \geqq (ec\sigma)^{\frac{1}{\sigma}},$$

oder, was dasselbe ist:

(3) $$\overline{\lim_{h=\infty}} \left((h!)^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h\right)^{\frac{1}{h}} \geqq (c\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

a) Sei $\sigma = 1$, so daß sich (1) auf:

$$M(\varrho) \geqq A e^{c\varrho}$$

reduziert. Es gibt somit Werte $|x| = \varrho$, für die:

$$|f(x)| \geqq A e^{c\varrho}$$

ist; um so mehr hat man:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \geqq A e^{c\varrho} = A \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c^h \varrho^h}{h!},$$

oder auch:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\alpha_h - A \frac{c^h}{h!}\right) \varrho^h > 0.$$

Daraus folgt, nach dem Hilfssatz I des Art. 276, daß für unendlich viele Werte von h:

$$\alpha_h > A \frac{c^h}{h!}$$

oder auch:

$$(h!\,\alpha_h)^{\frac{1}{h}} > A^{\frac{1}{h}} c$$

ist, woraus sich:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} (h!\, \alpha_h)^{\frac{1}{h}} \geqq c$$

ergibt; das ist aber Formel (3) für $\sigma = 1$.

b) Sei $\sigma < 1$. Nehmen wir in dem Hilfssatz II des Art. 276:

$$k = \frac{1}{\sigma} > 1, \quad b_h = \alpha_h^\sigma \varrho^{h\sigma},$$

so erhalten wir:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h < \left[\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h^\sigma \varrho^{h\sigma} \right]^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{4}$$

Nun hat man, wie oben:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \geqq A e^{c\varrho^\sigma}, \tag{5}$$

mithin wegen (4):

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h^\sigma (\varrho^\sigma)^h > A^\sigma e^{c\sigma\varrho^\sigma} = A^\sigma \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(c\sigma)^h (\varrho^\sigma)^h}{h!},$$

oder auch:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\alpha_h^\sigma - A^\sigma \frac{(c\sigma)^h}{h!} \right) (\varrho^\sigma)^h > 0,$$

woraus sich nach dem Hilfssatz I die Formel (3) ergibt.

c) Sei $\sigma > 1$. Nehmen wir im Hilfssatz II:

$$k = \frac{1}{\sigma} < 1, \quad b_h = \alpha_h^\sigma \varrho^{h\sigma},$$

so erhalten wir:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \leqq \left(\frac{\theta}{\theta - 1} \right)^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} \left[\sum_{h=0}^{\infty} \theta^{(\sigma-1)h} \alpha_h^\sigma \varrho^{h\sigma} \right]^{\frac{1}{\sigma}},$$

mithin wegen (5):

$$\sum_{h=0}^{\infty} \theta^{(\sigma-1)h} \alpha_h^\sigma \varrho^{h\sigma} \geqq \left(\frac{\theta - 1}{\theta} \right)^{\sigma - 1} A^\sigma e^{c\sigma\varrho^\sigma} = \left(\frac{\theta - 1}{\theta} \right)^{\sigma - 1} A^\sigma \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(c\sigma)^h (\varrho^\sigma)^h}{h!},$$

woraus nach dem Hilfssatz I folgt:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left((h!)^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h \right)^{\frac{1}{h}} \geqq \frac{(c\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}{\theta^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}.$$

Da aber θ von 1 um noch so wenig differieren kann, so ist die gefundene Beziehung mit (3) gleichbedeutend.

279. Aus den beiden letzten Sätzen ergibt sich im besondern:

Läßt sich für ein beliebig kleines ε stets ein entsprechender Wert R von der Art angeben, daß für jedes $\varrho > R$:

$$M(\varrho) \leqq e^{\varepsilon \varrho^{\sigma}}$$

wird, so ist:

$$\lim_{h=\infty} \left(h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) = 0 \text{ [1]};$$

kann dagegen ein ε von der Art angegeben werden, daß für beliebig große Werte von ϱ:

$$M(\varrho) \geqq e^{\varepsilon \varrho^{\sigma}}$$

wird, so ist:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \geqq (\varepsilon\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} > 0.$$

Mit andern Worten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich für jedes beliebig kleine ε ein R von der Art finden läßt, daß für jedes $\varrho > R$:

$$M(\varrho) \leqq e^{\varepsilon \varrho^{\sigma}} \tag{1}$$

wird, lautet:

$$\lim_{h=\infty} \left(h^{\frac{1}{\sigma}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) = 0.$$

280. Aus den obigen Sätzen läßt sich eine andre analoge Folgerung ziehen.

Setzen wir in dem Satze des Art. 277 $\sigma + \delta$ statt σ, wobei σ eine festbestimmte, δ eine beliebig kleine positive Größe ist, und wählen wir außerdem $A = c = 1$, so ist:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\sigma+\delta}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \leqq (e(\sigma+\delta))^{\frac{1}{\sigma+\delta}},$$

sobald:

$$M(\varrho) \leqq e^{\varrho^{\sigma+\delta}}.$$

1) Offenbar darf man hier lim statt $\overline{\lim}$ schreiben, weil sich die abgeleitete Menge, da sie keine negativen Elemente enthalten kann, auf das einzige Element 0 reduziert.

Es ist aber identisch:

$$h^{\frac{1}{\sigma+\delta'}} = h^{\frac{1}{\sigma+\delta}} h^{-\frac{\delta'-\delta}{(\sigma+\delta)(\sigma+\delta')}};$$

daraus folgt für jedes $\delta' > \delta$, wegen der früheren Beziehung:

$$\lim_{h=\infty} \left(h^{\frac{1}{\sigma+\delta'}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) = 0.$$

Läßt sich dagegen ein δ von der Art angeben, daß man für beliebig große Werte ϱ:

$$M(\varrho) \geqq e^{\varrho^{\sigma+\delta}}$$

hat, so folgt aus dem Satze des Art. 278 für diesen Wert von δ:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\sigma+\delta}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \geqq (e(\sigma+\delta))^{\frac{1}{\sigma+\delta}} > 0.$$

Also: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich für jedes beliebig kleine δ ein R von der Art finden läßt, daß für jedes $\varrho > R$:

$$M(\varrho) \leqq e^{\varrho^{\sigma+\delta}} \tag{1}$$

wird, besteht darin, daß für jedes positive δ:

$$\lim_{h=\infty} \left(h^{\frac{1}{\sigma+\delta}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) = 0$$

ist.

281. Für jede beliebige ganze Funktion besitzen der μ-Index und der ν-Index reziproke Werte.

Nach der Definition hat man für alle Werte ϱ oberhalb einer bestimmten Grenze:

$$M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}} \tag{1}$$

und für beliebig große Werte ϱ:

$$M(\varrho) > e^{\varrho^{\nu-\varepsilon}}. \tag{2}$$

Aus (1) folgt (Art. 277):

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \left(h^{\frac{1}{\nu+\varepsilon}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \leqq (e(\nu+\varepsilon))^{\frac{1}{\nu+\varepsilon}},$$

oder auch, wenn wir $\frac{1}{\nu+\varepsilon} = \frac{1}{\nu} - \varepsilon'$ setzen:

$$\overline{\lim_{h=\infty}}\left(h^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon'}\alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) \leqq \left(\frac{e}{\frac{1}{\nu}-\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon'};$$

für alle h oberhalb einer bestimmten Grenze ist mithin, wenn wir mit θ die rechte Seite der letzten Ungleichung, mit δ irgend eine positive Größe bezeichnen:

$$h^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon'}\alpha_h^{\frac{1}{h}} \leqq \theta + \delta .$$

Wählt man $\varepsilon'' > \varepsilon'$, und nimmt man h so groß an, daß:

$$\theta + \delta < h^{\varepsilon''-\varepsilon'}$$

wird, so ergibt sich:

(3) $$h^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon''}\alpha_h^{\frac{1}{h}} < 1 .$$

Entsprechend folgt (Art. 278) aus (2) für beliebig große Werte von h:

(4) $$h^{\frac{1}{\nu}+\varepsilon''}\alpha_h^{\frac{1}{h}} > 1 .$$

Die Formeln (3), (4) sagen aus, daß $\mu = \frac{1}{\nu}$.

282. Es ist bemerkenswert, daß die in den Sätzen der Art. 279 und 280 aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen lediglich von den absoluten Werten der Koeffizienten der Funktion $f(x)$ abhängen. Wird also mit dieser zugleich die Funktion:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} |a_h| x^h$$

in Betracht gezogen, so darf man schließen: Ist die Beziehung (1) in Art. 279 oder Art. 280 für $f(x)$ gültig, so ist sie es auch für $\varphi(x)$ und umgekehrt[1]).

Im besondern gilt: Der ν-Index hat für $f(x)$ und $\varphi(x)$ ein und denselben Wert.

Der letzte Satz ergibt sich übrigens unmittelbar aus dem des Art. 281, sobald man beachtet, daß der μ-Index für $f(x)$ offenbar derselbe ist wie für $\varphi(x)$.

---

1) Die Umkehrung ist durchaus einleuchtend

283. Ist $f(x)$ eine einfache Funktion vom Range p, so hat man (Art. 263) für jedes hinreichend große ϱ:

$$M(\varrho) < e^{\varepsilon \varrho^{p+1}},$$

mithin (Art. 279):

$$\lim_{h=\infty} \left(h^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h^{\frac{1}{h}}\right) = 0,$$

oder auch:

(1)
$$\lim_{h=\infty} \left((h!)^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h\right)^{\frac{1}{h}} = 0.$$

Daraus folgt für jedes hinreichend große h:

$$\left((h!)^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h\right)^{\frac{1}{h}} < 1,$$

mithin:

$$(h!)^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h < 1,$$

und folglich:

$$(h!)^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h < \left((h!)^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Aus (1) ergibt sich daher:

$$\lim_{h=\infty} \left((h!)^{\frac{1}{p+1}} \alpha_h\right) = 0,$$

eine Formel, die als **Satz von Poincaré** bezeichnet wird.

284. Ist $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine ganze Funktion mit endlichem ν-Index, so hat man bekanntlich für jeden hinreichend großen Wert ϱ:

$$M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}},$$

und für beliebig große Werte ϱ:

$$M(\varrho) > e^{\varrho^{\nu-\varepsilon}}.$$

Man kann das kurz so ausdrücken, $f(x)$ sei mit e^{ϱ^ν} vergleichbar oder wachse wie e^{ϱ^ν}. Diese Vergleichbarkeit von $f(x)$ mit e^{ϱ^ν} hängt aber, was sehr bemerkenswert ist, von dem Umstande ab, daß nur ein mit ϱ zugleich veränderliches Glied ihrer Entwicklung mit e^{ϱ^ν} vergleichbar ist, während die Gesamtheit der übrigen Glieder jenem gegenüber vernachlässigt werden kann.

Wir wissen (Art. 281), daß $\mu = \frac{1}{\nu}$ ist, d. h., daß für jedes hinreichend große h:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < h^{-\frac{1}{\nu}+\varepsilon}$$

ist, während es zugleich beliebig große h gibt, für welche:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > h^{-\frac{1}{\nu}-\varepsilon}$$

ist. Um einen ganz einfachen Fall herauszugreifen, nehmen wir:

$$a_h = \alpha_h = h^{-\frac{h}{\nu}}$$

an, so daß:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} h^{-\frac{h}{\nu}} x^h = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{\nu}},$$

wo:

$$x = y^{\frac{1}{\nu}}$$

ist. Wir geben y einen bestimmten reellen und positiven, aber nicht ganzzahligen Wert und betrachten nacheinander die Glieder, für die $h > y$, und diejenigen, für die $h < y$ ist.

a) $h > y$. — Wird $h = y + z$, $\frac{y}{z} = u$ gesetzt, so hat man:

$$\left(\frac{h}{y}\right)^h = \left(1 + \frac{z}{y}\right)^{y+z} = \left[\left(1 + \frac{z}{y}\right)^{1+\frac{y}{z}}\right]^z = \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{1+u}\right]^z.$$

Nun ist[1]):

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{1+u} > 2,$$

mithin:

$$\left(\frac{h}{y}\right)^h > 2^z,$$

oder auch:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^h < 2^{-z}$$

---

1) Vorausgesetzt, daß $m - 1 \leqq u < m$, wo m ganz und positiv ist, hat man:

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m;$$

es ist aber:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1 + m\frac{1}{m} = 2,$$

mithin um so mehr:

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} > 2.$$

Setzen wir:

$$k - 1 < y < k$$

voraus, wo k eine ganze Zahl bezeichnet, so ist:

$$k \leqq h, \quad z = h - y > h - k,$$

mithin:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^h < 2^{-(h-k)}, \quad \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{\nu}} < 2^{-\frac{h-k}{\nu}},$$

und, wenn wir von $h = k$ an summieren:

$$\sum_{h=k}^{\infty} \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{\nu}} < \sum_{h=k}^{\infty} 2^{-\frac{h-k}{\nu}} = \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-\frac{h}{\nu}} = \frac{2^{\frac{1}{\nu}}}{2^{\frac{1}{\nu}} - 1}.$$

Demnach besitzt die Summe der Glieder, für die $h > y$ ist, einen endlichen Wert, der eine bestimmte von y unabhängige Grenze nicht übersteigt.

b) $h < y$. — Wir untersuchen, welches das Glied ist, das den größten Wert besitzt. Zu diesem Zwecke setzen wir $\frac{h}{y} = t$ und schreiben:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{\nu}} = \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{y}\frac{y}{\nu}} = \left[\left(\frac{h}{y}\right)^{\frac{h}{y}}\right]^{-\frac{y}{\nu}} = (t^t)^{-\frac{y}{\nu}};$$

also besitzt $\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{\nu}}$ den größten Wert für denjenigen Wert von h, welcher dem Werte von t entspricht, der t^t zu einem Minimum macht. Nun fanden wir (Art. 149), daß t^t ein Minimum wird für $t = \frac{1}{e}$; der entsprechende Wert von h ist $h = \frac{y}{e}$. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, y sei ein ganzes Vielfaches von e:

$$y = le,$$

so ist das größte Glied dasjenige, für welches $h = l$ ist; sein Wert ist:

$$\alpha_l x^l = \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{l}{\nu}} = e^{\frac{y}{e\nu}} = e^{\frac{1}{e\nu}x^{\nu}}.$$

Man kann aber x so groß voraussetzen, daß bei willkürlichem ε:

$$e\nu < x^{\varepsilon}$$

wird. Alsdann ist:

$$\alpha_l x^l > e^{x^{\nu - \varepsilon}}.$$

Diese Beziehung beweist, daß das Glied $\alpha_l x^l$ mit der ganzen Summe $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h x^h$ vergleichbar ist.

285. Wir haben an dem Beispiele der Funktion $\sin x$ (Art. 211) gesehen, wie mühsam die Bestimmung des äußeren Exponentialfaktors einer Funktion mit vorgegebenen Nullstellen und Potenzreihenentwicklung bisweilen ist. Die in diesem Kapitel aufgestellten Sätze erleichtern in einigen Fällen diese Untersuchung, indem sie das Mittel bieten, die Höhe der Funktion direkt zu bestimmen.

Nehmen wir die Funktion $\sin x$ oder lieber die Funktion:

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h+1)!} = \sum_{h=0}^{\infty} a_h y^h = g(y)$$

wieder auf, wo:

$$|a_h| = \alpha_h = \frac{1}{(2h+1)!}, \quad y = x^2.$$

Es ist für $h > 0$:

$$\alpha_h = \frac{1}{h!\,(h+1)!\binom{2h+1}{h}} < \frac{1}{h!\,(h+1)!} < \frac{1}{(h!)^2};$$

mithin ist $\mu \geqq 2$ und folglich (Art. 281, 271) $\nu \leqq \frac{1}{2}$, $r = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Also ist die Funktion $g(y)$ von der Höhe Null, und ihr äußerer Exponentialfaktor, der zugleich der von $\sin(x)$ ist, reduziert sich auf eine Konstante.

Betrachten wir ferner die Funktion:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b^{h^2} x^h,$$

wo $|b| = \beta < 1$ ist. Wird $\lg \beta = -\tau$ gesetzt, wo τ positiv ist, so hat man:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} = \beta^h = e^{-\tau h}.$$

Nun ist für jedes beliebige n (Art. 146):

$$\lim_{h=\infty} h^n e^{-\tau h} = 0,$$

mithin für hinreichend große Werte von h und für beliebige n:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} = e^{-\tau h} < \frac{1}{h^n}.$$

Daraus folgt, daß $\mu \geqq n$ für irgend ein n, daß mithin (Art. 281) $\nu = 0$ und endlich (Art. 271) $r = 0$ ist.

286. Wir haben früher (Art. 245) bewiesen, daß unter gewissen Bedingungen die Höhe der Ableitung einer Funktion derjenigen der ursprünglichen Funktion gleich ist. Der Satz gilt **nicht** für alle Funktionen der ersten Klasse[1]). Es läßt sich aber folgendes beweisen:

Ist r die Höhe einer Funktion, so ist die Höhe ihrer Ableitung $\geqq r-1$ und $\leqq r+1$.

Dieser Satz ist ein Korollar zu dem folgenden:

Der μ-Index (und folglich auch der ν-Index) besitzt für eine ganze Funktion und für ihre Ableitung ein und denselben Wert[2]).

Es liege die ganze Funktion:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

nebst ihrer Ableitung:

$$f'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^{h-1}$$

---

1) Wiman (653) hat bemerkt, daß es einfache Funktionen $f(x)$ mit lauter reellen Nullstellen von solcher Beschaffenheit gibt, daß, wenn p die Höhe von $f(x)$, C eine beliebige Konstante bezeichnet, $\varphi(x) = f(x) + C$ die Höhe $p+1$ besitzt. Da aber $\varphi'(x) = f'(x)$ und $f'(x)$ von der Höhe p ist (Art. 245), so ist $\varphi(x)$ eine Funktion von der Höhe $p+1$, deren Ableitung von der Höhe p ist. Diese Eigenschaft kommt z. B. der Funktion von der Höhe Null:

$$f(x) = \prod_{h=2}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{h(\lg h)^{\alpha}}\right)$$

zu, wo die Konstante α der Bedingung $1 < \alpha \leqq 2$ genügt.

2) Daß der ν-Index der Ableitung nicht größer ist als der der ursprünglichen Funktion, läßt sich auch als Folge des Satzes im nächsten Artikel herleiten, wenn man beachtet, daß:

$$f'(x) = \lim_{t=0} \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x)),$$

daß (Art. 260) der ν-Index von $f(x+t)$ derselbe ist wie von $f(x)$, und daß der Übergang zur Grenze nicht die Veränderlichen, sondern die Koeffizienten betrifft. Pringsheim (619) bemerkt, daß auch der Typus (S. 230, Anm. 1, 2) einer Funktion demjenigen ihrer Ableitung gleich ist.

vor. Anstatt der letzteren kann man die Funktion:

$$xf'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^h = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

in Betracht ziehen, in der:

$$b_0 = 0, \quad b_h = h a_h \quad \text{für} \quad h > 0.$$

Nach Voraussetzung ist für jedes hinreichend große h:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu - \varepsilon}},$$

und für beliebig große h:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu + \varepsilon}};$$

setzt man $|b_h| = \beta_h$, so ergibt sich hieraus:

$$\beta_h^{\frac{1}{h}} < \frac{h^{\frac{1}{h}}}{h^{\mu - \varepsilon}}, \quad \beta_h^{\frac{1}{h}} > \frac{h^{\frac{1}{h}}}{h^{\mu + \varepsilon}}.$$

Nun ist:

$$h^{\frac{1}{h}} = \left[\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{h}}\right]^{-1},$$

und $\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{h}}$ hat (Art. 149) den kleinsten Wert für $\frac{1}{h} = \frac{1}{e}$. Man hat also:

$$1 < h^{\frac{1}{h}} \leqq e^{\frac{1}{e}},$$

und folglich, wenn $\varepsilon' > \varepsilon$ genommen und h so groß vorausgesetzt wird, daß $e^{\frac{1}{e}} < h^{\varepsilon' - \varepsilon}$:

$$\beta_h^{\frac{1}{h}} < \frac{e^{\frac{1}{e}}}{h^{\mu - \varepsilon}} < \frac{1}{h^{\mu - \varepsilon'}}, \quad \beta_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu + \varepsilon}},$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Man hat aber (Art. 271), wenn r' die Höhe der Ableitung bezeichnet:

$$r = \nu \text{ oder } r = \nu - 1; \quad r' = \nu \text{ oder } r' = \nu - 1,$$

mithin:

$$r - 1 \leqq r' \leqq r + 1.$$

Ist ν nicht ganzzahlig, so ist $r' = r$.

287. Es mögen jetzt zwei Funktionen:

$$f(x)=\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad \varphi(x)=\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

vorliegen und ν, ν' ihre ν-Indices bezeichnen. Dann ist, wenn $|a_h|=\alpha_h$, $|b_h|=\beta_h$ gesetzt wird:

$$\alpha_h<\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon}}, \quad \alpha_h>\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu}+\varepsilon}}, \quad \beta_h<\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu'}-\varepsilon}}, \quad \beta_h>\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu'}+\varepsilon}},$$

mithin, wenn $\nu'\leqq\nu$ vorausgesetzt und der Wert von ε auf passende Weise geändert wird:

$$\alpha_h+\beta_h<\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon}},$$

folglich (für jedes hinreichend große h):

$$|a_h+b_h|<\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon}}.$$

Wird im besondern $\nu'<\nu$ vorausgesetzt, so ist ferner für beliebig große h:

$$|\alpha_h-\beta_h|>\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu}+\varepsilon}},$$

mithin:

$$|a_h+b_h|>\frac{1}{(h!)^{\frac{1}{\nu}+\varepsilon}}.$$

Also gilt der Satz: Der ν-Index der Summe zweier Funktionen ist niemals höher als die ν-Indices beider Funktionen. Er ist genau dem größeren dieser beiden Indices gleich, wenn diese Indices verschieden sind[1]).

1) Dieser Satz läßt sich folgendermaßen noch einfacher beweisen. Aus:

$$|f(x)|<e^{\xi^{\nu+\varepsilon}}, \quad |\varphi(x)|<e^{\xi^{\nu'+\varepsilon}}$$

folgt:

$$|f(x)+\varphi(x)|\leqq|f(x)|+|\varphi(x)|<e^{\xi^{\nu+\varepsilon}}+e^{\xi^{\nu'+\varepsilon}}.$$

Wird $\nu'\leqq\nu$ angenommen und $\nu'=\nu-\sigma$ gesetzt, wo $\sigma\geqq0$, so hat man:

$$|f(x)+\varphi(x)|<e^{\xi^{\nu+\varepsilon}}+e^{\xi^{\nu+\varepsilon-\sigma}}<2e^{\xi^{\nu+\varepsilon}},$$

Als Folgerung ergibt sich:

Sind die Höhen zweier oder mehrerer Funktionen $\leqq r$, so ist die Höhe ihrer Summe $\leqq r+1$.[1])

288. Sind λ_1, λ_2 die λ-Indices der beiden Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, so ist der λ-Index des Produktes $f_1(x)f_2(x) = f(x)$ die größere der beiden Zahlen λ_1, λ_2 (oder ihr gemeinsamer Wert, wenn sie gleich sind).

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der Definition des λ-Index.

289. Sind ν_1, ν_2 die ν-Indices der beiden Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, so kann der ν-Index ihres Produktes die beiden Zahlen ν_1, ν_2 nicht übersteigen.

Da nämlich für jedes hinreichend große ϱ:

$$|f_1(x)| < e^{\varrho^{\nu_1+\varepsilon}}, \quad |f_2(x)| < e^{\varrho^{\nu_2+\varepsilon}}$$

ist, so folgt, $\nu_1 \geqq \nu_2$ vorausgesetzt:

$$|f_1(x)f_2(x)| < e^{2\varrho^{\nu_1+\varepsilon}},$$

und somit, wenn $\varepsilon' > \varepsilon$ genommen und ϱ so groß vorausgesetzt wird, daß $2 < \varrho^{\varepsilon'-\varepsilon}$ ist:

$$|f_1(x)f_2(x)| < e^{\varrho^{\nu_1+\varepsilon'}}.$$

Sind ν_1, ν_2 die ν-Indices der beiden Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, und sind ν_1 und ν_2 voneinander verschieden, so ist der ν-Index des Produktes $f_1(x)f_2(x) = f(x)$ die größere der beiden Zahlen ν_1, ν_2[2]).

---

mithin für jedes hinreichend große ξ und für $\varepsilon' > \varepsilon$:

$$|f(x) + \varphi(x)| < e^{\xi^{\nu+\varepsilon'}},$$

woraus folgt, wenn man den ν-Index von $f(x) + \varphi(x)$ mit ν'' bezeichnet:

$$\nu'' \leqq \nu.$$

Andrerseits ist:

$$[f(x) + \varphi(x)] - \varphi(x) = f(x),$$

so daß ν nicht größer ist als die größere der beiden Zahlen ν'', ν'; setzt man also $\nu > \nu'$ voraus, so ist notwendig $\nu \leqq \nu''$, und folglich $\nu'' = \nu$.

1) Lindelöf (271) und später auch Boutroux (538, 539) haben Paare von Funktionen von der Höhe 0 wirklich aufgestellt, deren Summe die Höhe 1 hat. Ist z. B. $f(x)$ die in der Anm. 1 S. 273 betrachtete Funktion, so hat $f(x) + f(-x)$ die Höhe 1. Wiman (653) hat auf allgemeine Weise gezeigt, wie man zwei Funktionen bilden kann, deren Höhe $< p$ ist, und deren Summe die Höhe p hat.

2) Der Satz gilt nicht immer für $\nu_1 = \nu_2$; ist z. B. $P(x)$ ein Polynom vom Grade q, so ist der ν-Index der beiden Funktionen $e^{P(x)}$, $e^{-P(x)}$ gleich q, während ihr Produkt eine Konstante ist.

Es sei $\nu_1 > \nu_2$, und:

$$f_1(x) = \varphi_1(x) e^{P_1(x)}, \quad f_2(x) = \varphi_2(x) e^{P_2(x)},$$

wo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ einfache Funktionen bedeuten; ferner mögen mit λ, λ_1, λ_2 die λ-Indices der Funktionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, mit q_1, q_2 die Grade der Polynome $P_1(x)$, $P_2(x)$ bezeichnet werden.

Wir setzen zunächst $\lambda_1 \geqq q_1$ voraus; dann ist $\nu_1 = \lambda_1$. Nun ist $\nu_1 > \nu_2$, folglich $\nu_1 > \lambda_2$ und, da (Art. 288) λ die größere der beiden Zahlen λ_1, λ_2 ist, $\lambda = \lambda_1 = \nu_1$ und folglich $\nu \geqq \lambda = \nu_1$; andrerseits ist aber $\nu \leqq \nu_1$, folglich ist $\nu = \nu_1$.

Es sei jetzt $\lambda_1 < q_1$; dann ist $\nu_1 = q_1$. Setzen wir nun:

$$f(x) = \varphi(x) e^{P(x)},$$

wo $\varphi(x)$ eine einfache Funktion, $P(x)$ ein Polynom bedeutet, so ist:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x),$$

wenn $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ von ein und demselben Range sind; dagegen ist, wenn sie von verschiedenem Range sind:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) e^{R(x)},$$

wo $R(x)$ ein Polynom bedeutet, dessen Grad der größeren der beiden Rangzahlen gleich[1]) und somit nicht höher ist als die beiden Zahlen λ_1, λ_2. Aus $q_1 = \nu_1 > \nu_2$ folgt aber $q_1 > \lambda_2$, $q_1 > q_2$; beachtet man ferner, daß $q_1 > \lambda_1$, so ersieht man, daß der Grad von $R(x)$ niedriger als q_1, und der von:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) - R(x)$$

genau q_1 ist. Daraus folgt $\nu \geqq q_1 = \nu_1$ und somit, wie früher, $\nu = \nu_1$.

---

1) Setzt man nämlich:

$$\varphi_1(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_1} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

$$\varphi_2(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{d_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_2} \frac{x^k}{k d_h^k}},$$

und nimmt man $p_1 > p_2$ an, so hat man:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_1} \frac{x^k}{k c_h^k}} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{d_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_1} \frac{x^k}{k d_h^k}} = \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, e^{\sum_{k=p_2+1}^{p_1} \frac{x^k}{k d_h^k}}.$$

290. In Art. 267 ist bewiesen worden, daß es, wenn $f(x)$ eine einfache Funktion ist, Werte x von beliebig großem absolutem Betrage ξ gibt, für die:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}} \tag{1}$$

wird. Der folgende Satz, der ebenso wichtig an sich ist wie wegen der Folgerungen, zu denen er führt, stellt eine hinreichende Bedingung dafür auf, daß durch einen Wert x die Ungleichung (1) befriedigt wird:

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion, so läßt sich, wenn die Größen $\theta \leqq 1$, ε willkürlich angenommen werden, eine Größe R von der Art angeben, daß für jeden Punkt x, der um mehr als R vom Anfangspunkte und um mehr als θ von den Nullstellen der Funktion $f(x)$ entfernt ist, die Ungleichung gilt:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}}.$$

I. Setzen wir zunächst $\lambda < 1$, mithin $p = 0$ voraus, so ist:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

Nimmt man irgend eine Größe σ zwischen λ und 1 an, so ist nach dem Hilfssatze in Art. 264:

$$\lim \frac{h}{\gamma_h^{\sigma}} = 0,$$

mithin für jedes h, das größer ist als eine bestimmte Zahl k:

$$\gamma_h > h^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Andrerseits läßt sich für ein noch so großes ξ eine Zahl n so bestimmen, daß:

$$n < 2^{\sigma}\xi^{\sigma} \leqq n + 1$$

wird; auch ist es erlaubt, $n > k$ vorauszusetzen. Ist:

$$\gamma_m < 2\xi \leqq \gamma_{m+1},$$

so folgt aus den vorstehenden Ungleichungen:

$$\gamma_{n+1} > (n+1)^{\frac{1}{\sigma}} \geqq 2\xi > \gamma_m,$$

mithin $n+1>m$, $n \geqq m$. Nun schreiben wir:

$$f(x)=\left(\prod_{h=1}^{m} \prod_{h=m+1}^{n} \prod_{h=n+1}^{\infty}\right)\left(1-\frac{x}{c_h}\right)=f_1(x) f_2(x) f_3(x).$$

Da nach Voraussetzung:

$$|x-c_h|>\theta$$

ist, so wird:

$$|f_1(x)|=\prod_{h=1}^{m} \frac{|c_h-x|}{|c_h|}>\frac{\theta^m}{\gamma_m^m}>\frac{\theta^m}{2^m \xi^m}.$$

Ferner ist:

$$|f_2(x)| \geqq \prod_{h=m+1}^{n}\left(1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right) \geqq \frac{1}{2^{n-m}}.$$

Endlich folgt mit Rücksicht darauf, daß $\frac{\xi}{\gamma_h}<\frac{1}{2}$ für $h>m$ und $e^{-u}<1-\frac{u}{2}$ für $0<u<1$ (Art. 145) ist:

$$|f_3(x)| \geqq \prod_{h=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right)>e^{-2\xi \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h}}>e^{-2\xi \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma}}}}.$$

Die im Exponenten auftretende Summe hat (S. 254, Anm.) einen kleineren Wert als $\alpha \frac{1}{n^{\frac{1}{\sigma}-1}}$, wo α von n unabhängig ist; daraus folgt:

$$|f_3(x)|>e^{-2\alpha \xi n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}>e^{-2^\sigma \alpha \xi^\sigma}.$$

Demnach ist:

$$|f(x)|>\left(\frac{\theta}{2\xi}\right)^m \frac{1}{2^{n-m}} e^{-2^\sigma \alpha \xi^\sigma}=e^{-2^\sigma \alpha \xi^\sigma-n \lg 2-m \lg \xi+m \lg \theta} \geqq$$

$$\geqq e^{-2^\sigma \alpha \xi^\sigma-n(\lg 2+\lg \xi-\lg \theta)}>e^{-2^\sigma \xi^\sigma(\alpha+\lg 2+\lg \xi-\lg \theta)}.$$

Nun läßt sich ξ so groß nehmen, daß bei beliebig gegebenen ε', ε'':

$$\lg \xi<\xi^{\varepsilon'} \text{ (Art. 146)}, \quad \alpha+\lg 2-\lg \theta<\xi^{\varepsilon'}, \quad 2^{\sigma+1}<\xi^{\varepsilon''}$$

wird; alsdann hat man, wenn $\varepsilon'+\varepsilon''=\varepsilon'''$ gesetzt wird:

$$|f(x)|>e^{-\xi^{\sigma+\varepsilon'''}}.$$

Ist endlich ε gegeben, so kann man sich σ so gewählt denken, daß $\sigma + \varepsilon''' < \lambda + \varepsilon$ wird; dann ist:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}}.$$

II. $\lambda \geqq 1$. Man verfährt hier analog wie in Art. 267.

Man nehme eine ganze Zahl $q > p + 1$ und bezeichne mit ω eine primitive q-te Einheitswurzel. Setzt man:

$$y = x^q, \quad d_h = c_h^q, \quad \eta = |y|,$$

so erhält man:

$$f(x)f(\omega x)f(\omega^2 x) \cdots f(\omega^{q-1}x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{d_h}\right) = F(y),$$

wo $F(y)$ vom Range 0, sein λ-Index $\frac{\lambda}{q} < 1$ ist. Ist x ein Punkt der x-Ebene, dessen Abstand von jedem der Punkte $c_h, c_h\omega, c_h\omega^2, \cdots, c_h\omega^{q-1}$ größer ist als θ, so folgt aus:

$$|x - c_h| > \theta, \quad |x - c_h\omega| > \theta, \quad |x - c_h\omega^2| > \theta, \; \cdots, \; |x - c_h\omega^{q-1}| > \theta$$

die Ungleichung:

$$|x^q - c_h^q| = |y - d_h| > \theta^q;$$

mithin ist nach dem, was soeben gefunden worden, bei hinreichend großem η:

$$|F(y)| > e^{-\eta^{\frac{\lambda}{q}+\frac{\varepsilon}{2q}}} = e^{-\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Andrerseits ist (Art. 263):

$$|f(\omega x)| < e^{\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad |f(\omega^2 x)| < e^{\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}, \; \cdots, \; |f(\omega^{q-1}x)| < e^{\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

mithin:

$$|f(x)| > e^{-q\xi^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

und, wenn ξ so groß ist, daß $q < \xi^{\frac{\varepsilon}{2}}$ wird:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Ist der Abstand des Punktes x von den Punkten c_h größer als θ, aber der von allen Punkten $c_h\omega, c_h\omega^2, \cdots, c_h\omega^{q-1}$ nicht größer als θ, so läßt sich die Zahl q durch eine andere q' derart ersetzen, daß, wenigstens bei hinreichend großem h, der Abstand des Punktes c_h

von allen Punkten $c_h\omega', c_h\omega'^2, \cdots, c_h\omega'^{q'-1}$ größer ist als θ; dabei bedeutet ω' eine primitive q'-te Einheitswurzel. Wählen wir nämlich q' prim zu q und betrachten wir auf dem Einheitskreise die $q-1$ Punkte $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{q-1}$ und die $q'-1$ Punkte $\omega', \omega'^2, \cdots, \omega'^{q'-1}$, so fällt von den ersteren keiner mit den letzteren zusammen. Bezeichnen wir dann mit $\delta(>0)$ die kleinste der Entfernungen der ersteren von den letzteren und wählen wir eine Zahl m so, daß für jedes $h \geqq m$:

$$\gamma_h \delta > 2\theta$$

wird, so hat ein Punkt x, falls sein Abstand von irgend einem der Punkte $c_h\omega^s$ $(s = 1, 2, \cdots, q-1, h \geqq m)$ kleiner ist als θ, von allen Punkten $c_k\omega'^{s'}$ $(s' = 1, 2, \cdots, q'-1, k \geqq h)$ einen größeren Abstand als θ. Es ist nämlich:

$$|c_h\omega^s - c_h\omega'^{s'}| = \gamma_h |\omega^s - \omega'^{s'}| \geqq \gamma_h\delta > 2\theta;$$

stellen ferner die Punkte A, B, C beziehentlich die Werte $c_h\omega^s$, $c_h\omega'^{s'}$, $c_k\omega'^{s'}$ dar, wo $k > h$, da der $\sphericalangle ABC$ immer stumpf ist, so hat man $\overline{AC} > \overline{AB}$ oder auch:

$$|c_h\omega^s - c_k\omega'^{s'}| > |c_h\omega^s - c_h\omega'^{s'}| > 2\theta.$$

Ist also für einen Punkt x:

$$|x - c_h\omega^s| < \theta,$$

so folgt für jeden Wert von s' und für jedes $k \geqq h$:

$$|x - c_k\omega'^{s'}| > \theta.$$

Demnach gilt die zu beweisende Ungleichung für jeden Punkt x, dessen Abstand von den Punkten c_h größer ist als θ.

291. Allgemeiner: Ist $f(x)$ eine ganze Funktion von endlichem ν-Index, so läßt sich, wenn die Größen $\theta \leqq 1$, ε willkürlich gewählt werden, eine Größe R von der Art angeben, daß für jeden Punkt x, dessen Abstand vom Anfangspunkte und von den Nullstellen der Funktion $f(x)$ größer ist als R bezw. θ, die Ungleichung stattfindet:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\nu+\varepsilon}}.$$

Setzen wir:

$$f(x) = e^{g(x)}\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine einfache Funktion mit denselben Nullstellen und folglich

mit demselben λ-Index bedeutet wie $f(x)$, so ist (Art. 290) im Hinblick darauf (Art. 265), daß $\lambda \leqq \nu$, für alle Punkte x, die den Bedingungen des Satzes genügen:

$$|\varphi(x)| > e^{-\xi^{\lambda+\varepsilon}} \geqq e^{-\xi^{\nu+\varepsilon}}.$$

Weiterhin ist (Art. 271) $g(x)$ ein Polynom von einem Grade $\leqq \nu$, und man hat somit, unter Anwendung des Satzes in Art. 270 auf das Polynom $-g(x)$, für jedes x von hinreichend großem absolutem Betrage:

$$\Re(-g(x)) < \xi^{\nu+\varepsilon}$$

oder auch:

$$\Re g(x) > -\xi^{\nu+\varepsilon};$$

daher ist:

$$|e^{g(x)}| = e^{\Re g(x)} > e^{-\xi^{\nu+\varepsilon}}.$$

Für die Punkte x, welche den Bedingungen des Satzes genügen, folgt daraus:

$$|f(x)| > e^{-2\xi^{\nu+\varepsilon}}$$

oder auch, wenn man den Wert von ε ändert:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\nu+\varepsilon}}$$

292. Ist:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \tag{1}$$

eine ganze Funktion und wird:

$$f_k(x) = \sum_{h=0}^{k} a_h x^h \tag{2}$$

gesetzt, so läßt sich nach beliebiger Wahl zweier Größen θ, ε eine bestimmte ganze und positive Zahl K von der Art finden, daß für jedes $k > K$ und für jede Nullstelle x_0 von $f_k(x)$ von kleinerem absolutem Betrage als $k^{\frac{1}{\nu+\varepsilon}}$ eine solche Nullstelle x von $f(x)$ angegeben werden kann, daß $|x - x_0| < \theta$.

Ist x_0 eine Nullstelle von (2) und $|x_0| < k^{\frac{1}{\nu+\varepsilon}}$ und setzen wir:

$$|x_0| = k^{\sigma} \quad \left(\sigma < \frac{1}{\nu+\varepsilon}\right),$$

$$f(x) = f_k(x) + \psi_k(x),$$

so folgt daraus, da $f_k(x_0) = 0$ ist:

$$f(x_0) = \psi_k(x_0) = \sum_{h=k+1}^{\infty} a_h x_0^h.$$

Gäbe es keine Nullstelle von $f(x)$, deren Abstand von x_0 kleiner wäre als θ, so hätte man (Art. 290) für hinreichend große x_0:

$$|f(x_0)| > e^{-|x_0|^{\nu+\varepsilon'}} = e^{-k^{(\nu+\varepsilon')\sigma}}$$

oder auch:

(3) $$|\psi_k(x_0)| > e^{-k^{(\nu+\varepsilon')\sigma}}.$$

Andrerseits ist:

$$|\psi_k(x_0)| \leqq \alpha_{k+1} k^{\sigma(k+1)} + \alpha_{k+2} k^{\sigma(k+2)} + \cdots.$$

Da nun (Art. 281) $\mu = \frac{1}{\nu}$, so hat man für jedes hinreichend große h:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\frac{1}{\nu} - \varepsilon''}},$$

daher ist für jedes hinreichend große k:

$$|\psi_k(x_0)| < \left[\frac{k^\sigma}{(k+1)^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon''}}\right]^{k+1} + \left[\frac{k^\sigma}{(k+2)^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon''}}\right]^{k+2} + \cdots.$$

Wird ε'' so klein vorausgesetzt, daß $\sigma < \frac{1}{\nu} - \varepsilon''$ ist, und schreibt man $\sigma = \frac{1}{\nu} - \varepsilon'' - \varepsilon'''$, so ist:

$$|\psi_k(x_0)| < \frac{1}{k^{\varepsilon'''(k+1)}} + \frac{1}{k^{\varepsilon'''(k+2)}} + \cdots$$

und, wenn k so groß genommen wird, daß $k^{\varepsilon'''} > 2$ wird:

$$|\psi_k(x_0)| < \frac{\frac{1}{k^{\varepsilon'''(k+1)}}}{1 - \frac{1}{k^{\varepsilon'''}}} < \frac{2}{k^{\varepsilon'''(k+1)}}.$$

Durch Vergleich mit (3) erhalten wir für jedes hinreichend große k:

$$\frac{2}{k^{\varepsilon'''(k+1)}} > e^{-k^{(\nu+\varepsilon')\sigma}} = e^{-k^{(\nu+\varepsilon')\left(\frac{1}{\nu}-\varepsilon''-\varepsilon'''\right)}},$$

woraus folgt, wenn man der Kürze wegen den Exponenten von k mit τ bezeichnet:

$$\varepsilon'''(k+1)\lg k < \lg 2 + k^{\tau},$$

oder auch:

$$\frac{\varepsilon'''(k+1)}{k} \frac{\lg k}{k^{\tau-1}} < \frac{\lg 2}{k^{\tau}} + 1.$$

Wäre nun $\tau \leqq 1$, so nähme die linke Seite zugleich mit k unbeschränkt zu, während die rechte Seite unbeschränkt abnimmt, und die Ungleichung könnte von einem gewissen Werte von k an nicht mehr stattfinden; es muß daher:

$$(\nu + \varepsilon')\left(\frac{1}{\nu} - \varepsilon'' - \varepsilon'''\right) > 1$$

sein. Andrerseits lassen sich offenbar die Zahlen ε', ε'', ε''' so wählen, daß die linke Seite der letzten Ungleichung kleiner wird als 1, was zum Widerspruch führt. Demnach hat x_0 wenigstens von einer der Nullstellen von (1) einen kleineren Abstand als θ.

293. Der Vergleich der Gleichungen (1), (2) des vorigen Artikels gibt noch zu folgender Betrachtung Anlaß.

Es sei q eine ganze Zahl, größer als ν, und es werde $k = q$ gemacht, ferner sei ($a_0 = 1$ vorausgesetzt):

$$f(x)f(\omega x)\cdots f(\omega^{q-1}x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{d_h}\right) = F(y), \text{ [1]}$$

$$f_q(x)f_q(\omega x)\cdots f_q(\omega^{q-1}x) = F_q(y),$$

wo $y = x^q$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ ist. Wir setzen weiterhin:

$$F(y) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h y^h,$$

$$F_q(y) = \sum_{h=0}^{q} b'_h y^h.$$

Sind $c_1, c_2, \cdots$ die Nullstellen der Funktion $f(x)$, $c'_1, c'_2, \cdots, c'_q$ die der Funktion $f_q(x)$, so hat man:

---

1) Da der ν-Index der Funktion $F(y)$, wie leicht ersichtlich, kleiner als 1 wird, so ist sie notwendigerweise eine einfache Funktion vom Range 0.

$$b_0 = b_0' = 1,$$

$$b_1 = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^q}, \qquad b_1' = -\sum_{h=1}^{q} \frac{1}{c_h'^q}.$$

Nun ist leicht zu ersehen, daß b_1 nur von $a_0, a_1, \cdots, a_q$ abhängt, so daß b_1 unverändert bleibt, wenn sich die Werte von $a_{q+1}, a_{q+2}, \cdots$ ändern, wenn also beispielsweise alle diese Koeffizienten gleich Null gesetzt werden; demnach ist $b_1 = b_1'$, d. h.:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^q} = \sum_{h=1}^{q} \frac{1}{c_h'^q}.$$

D. h.: Für jede ganze Zahl $q > \nu$ ist die Summe der q-ten Potenzen der reziproken Werte der Wurzeln von $f(x) = 0$ gleich der Summe der q-ten Potenzen der reziproken Werte der Wurzeln von $f_q(x) = 0$.

Ist q nicht die kleinste ganze Zahl, die größer als ν ist, so sei $\bar{q}$ eine zweite ganze Zahl, die größer als ν, aber kleiner als q ist. Bezeichnen wir mit $\bar{c}_h'$ die Wurzeln der Gleichung:

$$f_{\bar{q}}(x) = 0,$$

so erhalten wir, wie früher:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\bar{q}}} = \sum_{h=1}^{\bar{q}} \frac{1}{\bar{c}_h'^{\bar{q}}}.$$

Wird der Kürze wegen:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^m} = s_m, \quad \sum_{h=1}^{q} \frac{1}{c_h'^m} = s_m', \quad \sum_{h=1}^{\bar{q}} \frac{1}{\bar{c}_h'^m} = \bar{s}_m'$$

gesetzt, so sind die s_m', $\bar{s}_m'$ durch die den **Newtonschen Formeln** analogen Gleichungen bestimmt:

$$\begin{cases} s_1' + a_1 = 0, \\ s_2' + a_1 s_1' + 2a_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ s_m' + a_1 s_{m-1}' + \cdots + a_{m-1} s_1' + m a_m = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{s}_1' + a_1 = 0, \\ \bar{s}_2' + a_1 \bar{s}_1' + 2a_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ \bar{s}_m' + a_1 \bar{s}_{m-1}' + \cdots + a_{m-1} \bar{s}_1' + m a_m = 0. \end{cases}$$

Ist $m \leqq \bar{q} < q$, so fallen beide Gleichungssysteme zusammen, und für jedes $m \leqq \bar{q}$ hat man daher $\bar{s}'_m = s'_m$. Im besondern ist $\bar{s}'_{\bar{q}} = s'_{\bar{q}}$ und mithin $s_{\bar{q}} = s'_{\bar{q}}$. Man hat also folgenden Satz, der den vorhergehenden umfaßt:

Für jede ganze Zahl $q > \nu$ und für jede ganze Zahl $\bar{q}$ von der Art, daß $q \geqq \bar{q} > \nu$ ist, ist die Summe der $\bar{q}$-ten Potenzen der reziproken Werte der Wurzeln von $f(x) = 0$ gleich der entsprechenden Summe für $f_q(x) = 0$.

294. Der soeben bewiesene Satz gestattet, in gewissen einfachen Fällen ein System von notwendigen Bedingungen dafür aufzustellen, daß alle Nullstellen einer gegebenen Funktion reell oder daß sie positiv sind.

a) Damit alle Nullstellen reell sind, ist offenbar notwendig, daß s_{2i} reell und positiv ist für jeden Wert von $2i$, der größer als ν ist.

Ist im besondern $\nu < 2$, die Funktion mithin (Art. 271) von der Höhe 0 oder 1, so hat man:

$$s_2 > 0, \; s_4 > 0, \; \cdots.$$

Nach dem letzten Satz ist $s_2 = s'_2 = a_1^2 - 2a_2$, folglich:

(1) $$a_1^2 - 2a_2 > 0.$$

Sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung sämtlich reell, und setzt man:

$$f(x) = e^{Ax}\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine einfache Funktion ist, so ergibt die Division von $f'(x)$ durch $\varphi(x)$, daß A reell sein muß. Es folgt dann (Art. 225), daß die Nullstellen von $f'(x)$ sämtlich reell sind. Da aber der ν-Index dieser Funktion gleichfalls < 2 ist (Art. 286), so ist ihre Höhe 0 oder 1, ferner sind die Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung sämtlich reell; es läßt sich also auf sie die obige Schlußweise wiederum anwenden. Man kann daher schließen, daß sämtliche Ableitungen von $f(x)$ von der Höhe 0 oder 1 sind und lauter reelle Nullstellen besitzen. Beachten wir nunmehr, daß:

$$\frac{1}{r!\,a_r} f^{(r)}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+r}{h} \frac{a_{h+r}}{a_r} x^h,$$

und wenden wir (1) auf $\frac{1}{(r-1)!\,a_{r-1}} f^{(r-1)}(x)$ an, so erhalten wir nach einer unwesentlichen Vereinfachung:

(2) $$r a_r^2 - (r+1) a_{r-1} a_{r+1} > 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots).$$

Die Ungleichung (2) liefert uns ein System von notwendigen Bedingungen dafür, daß alle Nullstellen von $f(x)$ reell sind.

b) Damit alle Nullstellen positiv sind, muß s_i reell und positiv sein für jeden Wert von i, der größer als ν ist.

Ist im besondern $\nu < 1$ und $f(x)$ somit vom Range 0, so hat man:

$$s_1 > 0, \; s_2 > 0, \; \cdots.$$

Nach dem letzten Satz ist $s_1 = s_1' = -a_1$, also:

$$a_1 < 0.$$

Durch die obige Schlußweise findet man allgemein:

$$a_{r-1} a_r < 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots).$$

Dieses System von notwendigen Bedingungen dafür, daß alle Nullstellen positiv sind, läßt sich so ausdrücken: Die Funktion darf lediglich Zeichenwechsel darbieten.

Daraus ergibt sich sofort, daß die Funktion, damit ihre Nullstellen sämtlich negativ sind, nur Zeichenfolgen darbieten darf. Daß diese Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist, zeigt das Beispiel der Funktion e^{-x}.

295. Ist $f(x)$ eine Normalfunktion und wird:

$$f(x) = e^{g(x)} \varphi(x)$$

gesetzt, wo $\varphi(x)$ eine einfache Funktion p-ten Ranges, $g(x)$ aber ein Polynom p-ten Grades ist:

$$g(x) = \sum_{h=0}^{p} b_h x^h,$$

so hat man (vgl. Art. 210):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) - \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{c_h^k} = \sum_{h=0}^{p-1} (h+1) b_{h+1} x^h - \sum_{h=p}^{\infty} s_{h+1} x^h$$

oder auch:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots =$$

$$[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots][b_1 + 2b_2 x + \cdots + p b_p x^{p-1} - s_{p+1} x^p - s_{p+2} x^{p+1} - \cdots];$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0 b_1, \\
2a_2 &= a_1 b_1 + 2a_0 b_2, \\
3a_3 &= a_2 b_1 + 2a_1 b_2 + 3a_0 b_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
pa_p &= a_{p-1} b_1 + 2a_{p-2} b_2 + \cdots + p a_0 b_p, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich (vgl. Art. 215), daß, wenn $f(x)$ einfach ist, $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ ist, und daß umgekehrt, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$, auch $b_1 = b_2 = \cdots b_p = 0$, so daß die Funktion einfach ist. Demnach gilt der Satz: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Normalfunktion $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ von der Höhe p eine einfache Funktion ist, lauten:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0.$$

296. Mit den obigen Untersuchungen hängt eng die Theorie vom Wachstum (croissance) der Funktionen zusammen, von der wir hier einen kurzen Abriß geben wollen.

Es sei $\varphi(\varrho)$ eine reelle und positive Funktion einer reellen und positiven Veränderlichen ϱ; nähert sich, während ϱ dem Unendlichen zustrebt, das Verhältnis $\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^t}$, wo t eine reelle und positive Zahl ist, einer bestimmten und von Null verschiedenen Grenze, so sagt man, $\varphi(\varrho)$ sei t-ter Ordnung. Allgemeiner kann man sagen, $\varphi(\varrho)$ sei t-ter Ordnung, wenn:

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^{t-\varepsilon}} = \infty, \quad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^{t+\varepsilon}} = 0 \tag{1}$$

ist, welches auch die positive Größe ε sein mag.

Die Ordnungen des Unendlichwerdens gehorchen offenbar den Gesetzen der Exponenten, d. h.:

a) Die Ordnung des Produktes mehrerer Funktionen ist die Summe ihrer Ordnungen.

b) Ist $\sigma = \varphi(\varrho)$, $\tau = \psi(\sigma)$ und sind t, t' die Ordnungen von $\varphi(\varrho)$, $\psi(\sigma)$, so ist die Ordnung von $\psi(\varphi(\varrho))$ gleich $t't$.

c) Ist $\sigma = \varphi(\varrho)$ von der Ordnung t, so ist die umgekehrte Funktion $\varrho = \chi(\sigma)$ von der Ordnung $\frac{1}{t}$.

Es gibt unzählige Funktionen, für die es keine Zahl t gibt, die den Formeln (1) genügte. Von dieser Art ist z. B. e^ϱ (siehe Art. 146). Wir wollen deshalb die Definition der Ordnung so erweitern, daß sie eine größere Zahl von Funktionen umfaßt.

Da keine Zahl t so groß ist, daß $\frac{e^\varrho}{\varrho^t}$ einen endlichen Grenzwert besitzt, so ist es natürlich, die Ordnung von e^ϱ mit ω zu bezeichnen (vgl. Art. 74, 75).

Sollen die Gesetze a), b), c) auch noch für das von den endlichen Ordnungen und von ω gebildete System gelten, so müssen wir festsetzen, daß $\omega + t$ oder $t + \omega$ die Ordnung von $e^{\varrho}\varrho^{t} = \varrho^{t}e^{\varrho}$, ω^2 die Ordnung von $e^{e^{\varrho}}$, $\frac{1}{\omega}$ die Ordnung von $\lg\varrho$ bezeichnen. Dann ist ωt die Ordnung von e^{ϱ^t}, dagegen $t\omega$ die von $e^{t\varrho} = (e^{\varrho})^t$.

Man ersieht daraus, daß das Symbol ω nicht durchweg denselben Gesetzen folgt wie das gleichnamige Symbol von Cantor.

Man sagt von einer Funktion, sie sei von regulärem Wachstum, wenn sie eine Ordnung besitzt, die sich mittels eines aus ω, $\frac{1}{\omega}$ und endlichen Zahlen gebildeten Polynoms darstellen läßt. Ist z. B. $\varphi(\varrho)$ eine solche Funktion, daß für jeden hinreichend großen Wert von ϱ:

$$e^{\varrho^t} > \varphi(\varrho) > e^{\varrho^{t'}}$$

ist, wo t und t' mit ϱ zugleich variieren und ein Klassenpaar bilden, dessen Trennungselement mit t'' bezeichnet werde (vgl. Art. 5), so ist $\varphi(\varrho)$ von regulärem Wachstum und von der Ordnung $\omega t''$.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion und behält $M(\varrho)$ die übliche Bedeutung, so sagt man, $f(x)$ sei von regulärem Wachstum, falls es $M(\varrho)$ ist.

297. Sei $f(x)$ eine Normalfunktion, so daß für sie $\lambda = \nu$ ist (Art. 265). Es ergibt sich aus der Schlußbemerkung des Art. 264, daß für alle hinreichend großen Werte von h:

$$\gamma_h > h^{\frac{1}{\lambda} - \varepsilon} \tag{1}$$

ist, während es beliebig große Werte von h gibt, für die:

$$\gamma_h < h^{\frac{1}{\lambda} + \varepsilon} \tag{2}$$

ist. Ferner besteht für jedes ϱ oberhalb eines bestimmten Wertes R die Beziehung:

$$M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}} = e^{\varrho^{\lambda+\varepsilon}}, \tag{3}$$

während es zugleich beliebig große Werte ϱ gibt, für die:

$$M(\varrho) > e^{\varrho^{\nu-\varepsilon}} = e^{\varrho^{\lambda-\varepsilon}} \tag{4}$$

ist.

Ist λ nicht ganzzahlig, und gilt (2) für alle hinreichend großen Werte von h, dann gilt (4) für alle hinreichend großen Werte von ϱ, so daß $f(x)$ von regulärem Wachstum und zwar von der Ordnung $\omega\lambda$ ist, und umgekehrt.

Nehmen wir an, (4) gelte nicht für jeden hinreichend großen Wert von ϱ, es gebe also beliebig große Werte von ϱ, für die:

$$M(\varrho) < e^{\varrho^{\sigma+\varepsilon}}$$

ist, wo $\sigma < \lambda$. Durch Wiederholung des Schlußverfahrens des Art. 265 findet man alsdann, daß es beliebig große Werte von h gibt, für die $\frac{h}{\gamma_h^{\sigma+\varepsilon}}$ unterhalb einer festen Grenze liegt, die man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich 1 annehmen kann, indem man ε in passender Weise variiert. Für alle diese Werte von h folgt dann:

$$\gamma_h > h^{\frac{1}{\sigma}-\varepsilon'} > h^{\frac{1}{\lambda}+\varepsilon};$$

daher kann (2), entgegen der Voraussetzung, nicht für jeden hinreichend großen Wert von h statthaben.

Zum Beweise der Umkehrung genügt es, den Beweis in Art. 273 mit geringen Veränderungen zu wiederholen.

298. In betreff des Wachstums führen wir noch folgende zwei Sätze an[1]):

Ist θ eine ganze positive Zahl, die zugleich mit m, aber nicht so rasch wie $[m(\lg m)^{1-\varepsilon} - m]$ wächst, wo ε positiv und beliebig klein ist, und gibt es unter θ von a_m ab aufeinanderfolgenden Koeffizienten für ein hinreichend großes m stets einen a_{m_1}, für den:

$$\sqrt[m_1]{a_{m_1}} = \frac{1}{m_1^{\frac{1}{\nu}+\varepsilon_1}} \tag{1}$$

wird, wo ε_1 positiv und beliebig klein ist, so ist die Funktion von regulärem Wachstum.

Wächst θ zugleich mit m, aber rascher als $[m^{1+\varepsilon} - m]$, und gibt es für unendlich viele Werte von m unter θ von a_m ab aufeinanderfolgenden Koeffizienten einen a_{m_1}, der die Gleichung (1) befriedigt, so ist die Funktion von irregulärem Wachstum.

299. Der ν-Index einer Funktion drückt aus, in welcher Art der absolute Betrag der Funktion wächst, wenn x dem Unendlichen zustrebt. Ist der ν-Index unendlich groß, so kann dennoch in bestimmten Fällen die Art des Wachstums der Funktion noch durch endliche Zahlen dargestellt werden.

1) Wegen der Beweise siehe Maillet 285.

Es sei:

$$e_1(x) = e^x, \quad e_2(x) = e^{e^x} \quad \text{usw.}$$

Ist eine Funktion $f(x)$ so beschaffen, daß für jedes hinreichend große ϱ:

(1) $$M(\varrho) < e_k(\varrho^{\nu+\varepsilon})$$

und für beliebig große Werte ϱ:

(2) $$M(\varrho) > e_k(\varrho^{\nu-\varepsilon})$$

wird, so kann man sagen, der ν-Index der Funktion sei (k, ν).

Ist:

$$M(\varrho) < e_k(\varrho^{\varepsilon}),$$

ferner für jedes beliebige σ:

$$M(\varrho) > e_{k-1}(\varrho^{\sigma-\varepsilon}),$$

so kann man sagen, der ν-Index der Funktion sei $(k, 0)$.

Man hat offenbar:

$$(1, \nu) = \nu.$$

Sind (k, ν), (k', ν') die ν-Indices zweier Funktionen, so sagt man, (k, ν) sei größer als (k', ν'), wenn entweder $k > k'$, oder $k = k'$, $\nu > \nu'$ ist.

Der Satz des Art. 287 gilt auch im gegenwärtigen Falle (vgl. S. 275, Anm.); es läßt sich ferner beweisen (vgl. S. 273, Anm. 2), daß der Index der Ableitung nicht größer ist als derjenige der ursprünglichen Funktion[1]).

300. Ganz neuerdings hat Kraft[2]) einige wichtige Untersuchungen über ganze Funktionen von unendlichem ν-Index angestellt, deren Ergebnisse wir kurz zusammenfassen wollen.

Setzt man:

$$M(\varrho) = e^{\varrho^{\theta(\varrho)}},$$

so ist wegen der Stetigkeit von $M(\varrho)$ (S. 76, Anm.) die Funktion $\theta(\varrho)$ stetig, es läßt sich aber nicht behaupten, daß sie beständig wachsend sei, obschon $M(\varrho)$ es ist; gleichwohl strebt sie zugleich mit ϱ dem Unendlichen zu, wenn die betrachtete Funktion von unendlichem ν-Index ist. Es erweist sich als vorteilhaft, anstatt $\theta(\varrho)$ eine Funktion $\nu(\varrho)$

1) Wahrscheinlich gilt sogar der Satz: Der Index der Ableitung ist gleich dem der ursprünglichen Funktion.

2) Kraft 231. S. a. Boutroux 539.

von regelmäßigerem Verlaufe zu betrachten, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\nu(\varrho) > \theta(\varrho)$ für alle hinreichend großen Werte von ϱ;
2. $\nu(\varrho) < [\theta(\varrho)]^{1+\varepsilon}$ für unendlich viele beliebig große Werte von ϱ;
3. $\frac{\nu(\varrho)}{\varrho}$ nimmt beständig zu oder ab.

Es empfiehlt sich ferner, $\nu(\varrho)$ zwei weiteren Bedingungen zu unterwerfen, deren Wiedergabe in dieser Übersicht überflüssig erscheint.

Die Funktion $\nu(\varrho)$ kann als ν-Index der Funktion $f(x)$ bezeichnet werden. Man hat:

$M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu(\varrho)}}$ für alle hinreichend großen Werte von ϱ;

$M(\varrho) > e^{\varrho^{[\nu(\varrho)]^{1-\varepsilon}}}$ für unendlich viele beliebig große Werte von ϱ.

Wir haben gesehen (Art. 208), daß bei der Wahl der Konvergenzzahlen große Willkür herrscht. Kraft bestimmt sie folgendermaßen:

$$r_h = E\left(\frac{K \lg h}{\lg \gamma_h}\right) + 1,$$

wo $K > 1$ und $\gamma_h = |c_h|$ ist und $E(x)$ die größte in x enthaltene ganze Zahl bedeutet. Als einfache Funktion läßt sich alsdann eine Funktion von der Form:

$$\prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}$$

bezeichnen.

Es möge nunmehr eine reelle und positive Funktion $\sigma(\varrho)$ der positiven Veränderlichen ϱ in folgender Weise definiert werden:

Für $\varrho = \gamma_h$ sei $\sigma(\varrho) = r_h$;

Für ϱ zwischen γ_h und γ_{h+1} sei:

$$\sigma(\varrho) = r_h + \frac{r_{h+1} - r_h}{\gamma_{h+1} - \gamma_h}(\varrho - \gamma_h) \text{ [1]}.$$

Auch diese Funktion läßt sich durch eine andere $\lambda(\varrho)$ von regelmäßigerem Verlaufe ersetzen, die zu ihr in denselben Beziehungen steht wie $\nu(\varrho)$ zu $\theta(\varrho)$. Man kann $\lambda(\varrho)$ als den λ-Index der Funktion $f(x)$ bezeichnen.

---

1) Ein geometrisches Bild dieser Funktion ergibt sich, wenn man in der Ebene die Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten γ_h, r_h der Reihe nach durch geradlinige Strecken verbindet.

Für die so definierten Funktionen gelten folgende Sätze, deren Ähnlichkeit mit einigen früher aufgestellten Sätzen ersichtlich ist:

Ist $f(x)$ irgend eine ganze Funktion, so hat man für alle hinreichend großen Werte von ϱ:

$$\sigma(\varrho) < [\nu(\varrho)]^{1+\varepsilon}.$$

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion, so hat man für alle hinreichend großen Werte von ϱ:

$$\theta(\varrho) < [\lambda(\varrho)]^{1+\varepsilon}.$$

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion, so hat man für unendlich viele beliebig große Werte von ϱ:

$$[\nu(\varrho)]^{1-\varepsilon} < \lambda(\varrho) < [\nu(\varrho)]^{1+\varepsilon}.$$

Ist $f(x)$ eine einfache Funktion und bezeichnet $m(\varrho)$ wie früher den kleinsten Wert von $|f(x)|$ für $|x| = \varrho$, so hat man für unendlich viele hinreichend große Werte von ϱ:

$$m(\varrho) > e^{-\varrho^{[\lambda(\varrho)]^{1+\varepsilon}}};$$

es ist ferner für jede beliebige ganze Funktion $f(x)$:

$$m(\varrho) > e^{-\varrho^{[\nu(\varrho)]^{1+\varepsilon}}}.$$

Die Sätze von Picard und deren Verallgemeinerungen[1]).

301. Im Jahre 1879 stellte Picard die zwei folgenden sehr bemerkenswerten, nach ihm benannten Sätze auf:

I. Eine ganze Funktion $f(x)$ nimmt in der Ebene alle möglichen Werte an, höchstens einen ausgenommen. Oder: Ist $f(x)$ eine ganze Funktion und gibt es zwei verschiedene Größen A, B von der Art, daß die Funktionen $f(x) - A$, $f(x) - B$ keine Nullstellen besitzen, so ist $f(x)$ eine Konstante.

II. Ist $f(x)$ eine ganze Funktion und gibt es zwei verschiedene Größen A, B von der Art, daß die Funktionen

1) Borel 43, 47, 75, 76, Cazzaniga 116, Desaint 134, Farkas 154, Kraft 231, Landau 584, Maillet 284, 296, Picard 372, 374, 377, 378, 379, Remoundos 424, Schaper 437.

Erst nachdem dieser Bogen gesetzt war, gelangte ich in den Besitz einer Arbeit von Schottky (632ter), in welcher er den Picardschen Satz auf Grund des Cauchyschen beweist. Nach Aussage des Verfassers ist sein Beweis größtenteils nur eine Umformung des Borelschen.

$f(x) - A$, $f(x) - B$ je eine endliche Anzahl von Nullstellen besitzen, so ist $f(x)$ ein Polynom.

Der von Picard für diese Sätze gegebene Beweis stützt sich auf die Theorie der elliptischen Funktionen. Erst 1896 gelang es Borel, Satz I durch ein Verfahren zu begründen, das von jeder speziellen Theorie unabhängig ist. Borels Beweis soll, etwas abgeändert und vereinfacht, Gegenstand der folgenden Darlegung sein[1]).

302. Wir bemerken zunächst, daß stets $A = 0$, $B = 1$ vorausgesetzt werden kann; es würde nämlich genügen, in jedem Falle statt der Funktion $f(x)$ die Funktion $\frac{f(x) - A}{B - A}$ in Betracht zu ziehen.

Wir setzen also voraus, daß es eine ganze Funktion $f(x)$ gebe, die weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt. Sie müßte (Art. 203) gleichzeitig die folgenden beiden Formen haben:

$$f(x) = e^{\varphi(x)}, \quad f(x) = -e^{\psi(x)} + 1,$$

in denen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ganze Funktionen sind; mithin müßte:

$$e^{\varphi(x)} + e^{\psi(x)} = 1 \tag{1}$$

sein. Da nicht $e^{\varphi(x)} = 0$ sein kann, so kann auch nicht $e^{\psi(x)} = 1$ sein, und $\psi(x)$ kann folglich keinen der Werte $2n\pi i$ annehmen, wo n die Null oder eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet; es ist demnach:

$$\psi(x) = 2n\pi i + e^{\chi_n(x)}, \tag{2}$$

wo $\chi_n(x)$ eine von n abhängige ganze Funktion ist.

Setzt man:

$$\varphi(x) = Q + iR = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad a_h = a_h' + i a_h'',$$

und bezeichnet man mit $M(\varrho)$, $C(\varrho)$, $D(\varrho)$ den größten absoluten Betrag von $\varphi(x)$, den größten positiven Wert von Q und den absoluten Wert des größten negativen Wertes von Q für $|x| = \varrho$, so hat man (Art. 129):

---

1) Landau (584) hat durch eine leichte Modifikation des Borelschen Gedankenganges den folgenden allgemeineren Satz bewiesen:

Wenn man die Gesamtheit der im Punkte $x = 0$ regulären Funktionen $f(x)$ betrachtet, für welche $f(0)$ einen und denselben, von 0 und 1 verschiedenen Wert a_0 und $f'(0)$ einen und denselben nicht verschwindenden Wert a_1 hat, so gibt es eine feste, nur von a_0 und a_1 abhängige Zahl R, so daß im Kreise $|x| < R$ jede dieser Funktionen $f(x)$ entweder eine singuläre Stelle hat oder einen der beiden Werte 0, 1 annimmt.

$$(3) \qquad |\varphi(x)| \leqq |a_0'| + |a_0''| + 4\left[C(\varrho) + \frac{1}{2}|a_0'|\right]\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^h =$$
$$= |a_0'| + |a_0''| + 4\left[C(\varrho) + \frac{1}{2}|a_0'|\right]\frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

ferner, wenn man:

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} < \xi < \varrho$$

voraussetzt:

$$(5) \qquad \frac{\xi}{\varrho - \xi} > 1.$$

Es ist außerdem für ein hinreichend großes ϱ:

$$2|a_0'| < C(\varrho), \quad |a_0'| + |a_0''| < C(\varrho),$$

mithin wegen (5):

$$|a_0'| + |a_0''| < C(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Aus (3) folgt dann:

$$|\varphi(x)| < 6\,C(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

In derselben Weise erhält man:

$$|\varphi(x)| < 6\,D(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Diese Ungleichungen lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$(6) \qquad M(\xi) < 6\,C(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

$$(7) \qquad M(\xi) < 6\,D(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Bezeichnen M', C', D' die M, C, D entsprechenden Größen für die Funktion $\psi(x)$, so ist:

$$(8) \qquad M'(\xi) < 6\,C'(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

$$(9) \qquad M'(\xi) < 6\,D'(\varrho)\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Sind weiterhin μ_n, γ_n, δ_n die M, C, D entsprechenden Größen für $\chi_n(x)$ und wird:

$$\psi(0) = b_0' + ib_0'', \quad \chi_n(0) = c_{n0}' + ic_{n0}''$$

gesetzt, so folgt aus (2):

$$b_0' + ib_0'' = 2n\pi i + e^{c_{n0}' + ic_{n0}''}$$

und mithin:

$$\tfrac{1}{2}\lg\left[b_0'^2 + (b_0'' - 2n\pi)^2\right] = |c_{n0}'|.$$

Nun ist für ein hinreichend großes $|n|$, wenn der Kürze wegen $|n| = \nu$ gesetzt wird:

$$|b_0''| < 2\nu\pi, \quad |b_0'| < |2n\pi - b_0''|,$$

(10) $$4\sqrt{2}\pi < \nu, \quad \pi < \lg\nu \text{ [1]},$$

mithin:

$$|b_0'| < 4\nu\pi, \quad |2n\pi - b_0''| < 4\nu\pi$$

und folglich:

$$|c_{n0}'| < \lg(4\sqrt{2}\,\nu\pi) < 2\lg\nu.$$

Ferner kann stets:

$$|c_{n0}''| \leqq \pi$$

vorausgesetzt werden, da ja die Addition eines positiven oder negativen Vielfachen von $2\pi i$ zu $\chi_n(x)$ den Wert von $e^{\chi_n(x)}$ nicht ändert. Denkt man sich also für $\chi_n(x)$ eine (3) entsprechende Formel geschrieben, so erhält man:

$$|\chi_n(x)| < 2\lg\nu + \pi + 4[\gamma_n(\varrho) + \lg\nu]\frac{\xi}{\varrho - \xi}$$

$$< 3\lg\nu + 4[\gamma_n(\varrho) + \lg\nu]\frac{\xi}{\varrho - \xi};$$

daraus folgt wegen (5):

$$|\chi_n(x)| < [7\lg\nu + 4\gamma_n(\varrho)]\frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

und um so mehr:

$$|\chi_n(x)| < 7[\gamma_n(\varrho) + \lg\nu]\frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\mu_n(\xi) < 7[\gamma_n(\varrho) + \lg\nu]\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Für die in endlicher Anzahl vorhandenen Werte von n, durch welche die Ungleichungen (10) nicht befriedigt werden, kann man schreiben:

$$|c_{n0}'| = h_n\lg\nu, \quad \pi = j_n\lg\nu,$$

---

1) Diese Bedingung schließt die vorhergehende ein, weil $e^{\pi} > 4\sqrt{2}\pi$ ist.

wo h_n, j_n von n abhängige positive Größen sind. Alsdann ist:

$$|\chi_n(x)| < h_n \lg \nu + j_n \lg \nu + 4[\gamma_n(\varrho) + \tfrac{1}{2} h_n \lg \nu] \frac{\xi}{\varrho - \xi}$$
$$< [(j_n + 3h_n) \lg \nu + 4\gamma_n(\varrho)] \frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

und, wenn man mit λ den größten der Werte von $(j_n + 3h_n)$, welche den betrachteten Werten von n entsprechen, oder aber die Zahl 4 bezeichnet, falls diese größer ist als jener größte Wert:

$$|\chi_n(x)| < \lambda[\gamma_n(\varrho) + \lg \nu] \frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Man hat also für alle Werte von n:

$$\mu_n(\xi) < \lambda[\gamma_n(\varrho) + \lg \nu] \frac{\xi}{\varrho - \xi}, \tag{11}$$

wo λ von n unabhängig ist.

Sei x_0 ein Wert von x vom absoluten Betrage ϱ, für den $Q = -D(\varrho)$[1]), mithin wegen (1):

$$|e^{\psi(x_0)} - 1| = e^{-D(\varrho)}$$

wird. Wächst ϱ über alle Grenzen, so wächst auch $D(\varrho)$ über alle Grenzen, und $\psi(x_0)$ nähert sich somit entweder der Null oder einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$, etwa $2\pi i s$, oder, mit andern Worten, die Differenz $\psi(x_0) - 2\pi i s$ kann für einen passenden Wert von s kleiner gemacht werden als irgend ein bestimmter Wert, wenn man ϱ in entsprechender Weise wachsen läßt. Vorausgesetzt, daß:

$$|\psi(x_0) - 2\pi i s| \leqq 1$$

ist, hat man (Art. 145):

$$|e^{\psi(x_0) - 2\pi i s} - 1| = \theta\,|\psi(x_0) - 2\pi i s|$$

oder auch:

$$e^{-D(\varrho)} = \theta\,|\psi(x_0) - 2\pi i s|, \tag{12}$$

wo:

$$\tfrac{1}{4} < \theta < \tfrac{7}{4}.$$

Die gewonnene Beziehung kann mit Rücksicht auf (2) auch so geschrieben werden:

$$e^{-D(\varrho)} = \theta\,|e^{\chi_s(x_0)}|$$

oder auch:

$$-D(\varrho) = \lg \theta + \Re \chi_s(x_0).$$

---

1) Ein derartiger Wert ist immer vorhanden, s. Art. 101.

Wählt man eine Größe k zwischen 0 und 1, so kann man r so groß nehmen, daß:

$$|\lg\theta| < (1-k)D(\varrho)$$

wird; nun ist:

$$\left|\Re\chi_s(x_0)\right| \geqq \left|D(\varrho) - |\lg\theta|\right|,$$

mithin:

$$|\Re\chi_s(x_0)| > kD(\varrho),$$

und daher:

$$(13) \qquad \mu_s(\varrho) > kD(\varrho).$$

Andrerseits folgt aus (12), wenn $|s| = \sigma$ gesetzt wird:

$$2\pi\sigma \leqq \frac{1}{\theta}e^{-D(\varrho)} + |\psi(x_0)| \leqq \frac{1}{\theta}e^{-D(\varrho)} + M'(\varrho);$$

ist ϱ von der Art, daß:

$$\frac{1}{\theta}e^{-D(\varrho)} < (2\pi - 1)M'(\varrho),$$

so ist:

$$(14) \qquad \sigma < M'(\varrho)$$

und somit:

$$(15) \qquad \lg\sigma < \lg M'(\varrho).$$

Bezeichnet ferner x_1 einen Wert x vom absoluten Betrage ϱ, für den:

$$\Re\chi_s(x_1) = \gamma_s(\varrho)$$

wird, so ist wegen (2), (14):

$$e^{\gamma_s(\varrho)} < |\psi(x_1)| + 2\pi\sigma \leqq M'(\varrho) + 2\pi\sigma < (2\pi+1)M'(\varrho) < 8M'(\varrho),$$

mithin, wenn ϱ so groß ist, daß $8 < M'(\varrho)$ ist:

$$\gamma_s(\varrho) < 2\lg M'(\varrho).$$

Durch Addition zu (15) ergibt sich:

$$(16) \qquad \gamma_s(\varrho) + \lg\sigma < 3\lg M'(\varrho).$$

Wegen (16) wird aus (11) für $n = s$:

$$\mu_s(\xi) < 3\lambda\lg M'(\varrho)\frac{\xi}{\varrho-\xi};$$

mithin folgt aus (13), indem man $\frac{3\lambda}{k} = h$ setzt:

$$(17) \qquad D(\xi) < h\lg M'(\varrho)\frac{\xi}{\varrho-\xi}.$$

Man hat weiterhin wegen (7):

$$C(\xi) \leqq M(\xi) < 6\,D(\varrho)\,\frac{\xi}{\varrho - \xi}. \tag{18}$$

Es ergibt sich ferner aus (1):

$$|\,e^{Q} - 1\,| \leqq e^{C'(\varrho)},$$

und folglich:

$$|\,e^{C(\varrho)} - 1\,| \leqq e^{C'(\varrho)}$$

oder:

$$|\,e^{C(\varrho) - C'(\varrho)} - e^{-C'(\varrho)}\,| \leqq 1;$$

und analog:

$$|\,e^{C'(\varrho) - C(\varrho)} - e^{-C(\varrho)}\,| \leqq 1.$$

Diese beiden Beziehungen zeigen, daß $|\,C'(\varrho) - C(\varrho)\,|$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur ϱ entsprechend wachsen läßt; es folgt für ein hinreichend großes ϱ und ein willkürliches l:

$$(1 - l)\,C(\varrho) \leqq C'(\varrho) \leqq (1 + l)\,C(\varrho),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$C'(\varrho) = (1 + j)\,C(\varrho), \tag{19}$$

wo $|j| \leqq l$ ist.

Nun wählen wir ξ', ϱ' so, daß:

$$\tfrac{1}{2}\xi < \xi' < \xi, \quad \tfrac{1}{2}\varrho' < \varrho < \varrho' \tag{20}$$

wird, und setzen in (8) ξ', ξ statt ξ, ϱ, in (19) ξ statt ϱ und in (17) ϱ, ϱ' statt ξ, ϱ; dann erhalten wir:

$$M'(\xi') < 6\,C'(\xi)\,\frac{\xi'}{\xi - \xi'},$$

$$C'(\xi) = (1 + j)\,C(\xi),$$

$$D(\varrho) < h \lg M'(\varrho')\,\frac{\varrho}{\varrho' - \varrho},$$

mithin wegen (18):

$$M'(\xi') < p\,\frac{\xi\,\xi'\,\varrho}{(\varrho' - \varrho)(\varrho - \xi)(\xi - \xi')} \lg M'(\varrho'),$$

wo $p = 36\,(1 + j)\,h$.

Wählen wir die Größen ξ', ξ, ϱ' so, daß:

$$\varrho' - \varrho = \varrho - \xi = \xi - \xi' = \frac{\varrho' - \xi'}{3} \tag{21}$$

wird, so haben wir:

$$M'(\xi') < 27p \frac{\xi\xi'\varrho}{(\varrho'-\xi')^3} \lg M'(\varrho')$$
$$< 27p \frac{\varrho'^3}{(\varrho'-\xi')^3} \lg M'(\varrho').$$

Nun ist aber für ein hinreichend großes ϱ' (Art. 146):

(22) $$M'(\varrho') > [\lg M'(\varrho')]^2,$$

folglich:

(23) $$M'(\varrho') > \frac{1}{729p^2}\left(\frac{\varrho'-\xi'}{\varrho'}\right)^6 [M'(\xi')]^2.$$

Ist ξ' so groß, daß:

$$M'(\xi') > (12^3 p)^2$$

wird, so ist:

(24) $$\frac{6\sqrt[3]{p}}{\sqrt[6]{M'(\xi')}} = \tau(\xi') < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1-\tau(\xi')} = v(\xi') < 2;$$

und, wenn:

$$\varrho' = \xi' \cdot v(\xi')$$

gesetzt wird, woraus wegen (21):

$$\xi = \frac{2+v(\xi')}{3}\xi', \quad \varrho = \frac{1+2v(\xi')}{3}\xi'$$

folgt, so ist leicht nachzuweisen, daß die Formeln (5), (20) befriedigt sind. Dann ist:

$$\frac{\varrho'-\xi'}{\varrho'} = \tau(\xi'),$$

und aus (23) ergibt sich somit:

(25) $$M'(\varrho') > 2^6 M'(\xi').$$

Nehmen wir ferner:

$$\varrho'' = \varrho' \cdot v(\varrho'),$$

so erhalten wir:

$$M'(\varrho'') > 2^6 M'(\varrho') > 2^{12} M'(\xi').$$

Ist:

$$\varrho^{(i)} = \varrho^{(i-1)} \cdot v(\varrho^{(i-1)}),$$

so folgt daraus allgemein:

(26) $$M'(\varrho^{(i)}) > 2^{6i} M'(\xi').$$

Nun ist wegen (24), (25):

$$\frac{\tau(\varrho')}{\tau(\xi')} = \frac{\sqrt[6]{M'(\xi')}}{\sqrt[6]{M'(\varrho')}} < \frac{1}{2},$$

mithin:

$$\varrho^{(i)} = \xi' \frac{1}{[1-\tau(\varrho^{(i-1)})][1-\tau(\varrho^{(i-2)})]\cdot\ \cdot[1-\tau(\varrho')][1-\tau(\xi')]}$$

$$< \xi' \frac{1}{[1-\tau(\xi')]\left[1-\frac{1}{2}\tau(\xi')\right]\cdots\left[1-\frac{1}{2^{i-1}}\tau(\xi')\right]}.$$

Bekanntlich[1]) konvergiert das unendliche Produkt:

$$[1-\tau(\xi')]\left[1-\frac{1}{2}\tau(\xi')\right]\left[1-\frac{1}{2^2}\tau(\xi')\right]\cdots,$$

und sein Wert ist (wenn $\tau(\xi') < 1$) positiv und kleiner als 1; bezeichnen wir ihn mit ω, so hat man für jeden Wert von i:

$$[1-\tau(\xi')]\left[1-\frac{1}{2}\tau(\xi')\right]\cdots\left[1-\frac{1}{2^{i-1}}\tau(\xi')\right] > \omega.$$

Daraus folgt für alle Werte von i:

(27) $$\varrho^{(i)} < \frac{1}{\omega}\xi'.$$

Die Formel (26) im Verein mit (27) zeigt, daß die Funktion $\psi(x)$ innerhalb eines Kreises um den Anfangspunkt mit dem endlichen Radius $\frac{1}{\omega}\xi'$ Werte von einem absoluten Betrage annimmt, der größer ist als jeder beliebige bestimmte Wert. Also ist die gemachte Voraussetzung widersinnig, und der Satz ist bewiesen.

303. Es lohnt sich der Mühe, den langen Beweis[2]) in wenige Zeilen zusammenzufassen.

Zuerst ergeben sich unter den Bedingungen (4) für jede beliebige ganze Funktion $\varphi(x)$ die Relationen (6), (7), aus denen (18) folgt. Die analogen Relationen (8), (9) gelten für die ganze Funktion $\psi(x)$. Findet ferner zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Beziehung (1) statt, so

1) Euler, Introd. in anal. infinitorum, T. I, § 313; Enzyklop. d. math. Wiss., Bd. I, S. 116.

2) Der vorstehende Beweis erscheint länger als derjenige, den man in Borels Originalabhandlung liest. Beim Vergleich wird aber der Leser bemerken, daß wir viele Punkte, die sich dort nur angedeutet finden, weiter ausführen und verschiedene Einzelheiten hinzufügen mußten.

sind die auf dieselben bezüglichen Maximalgrößen durch die Relationen (17), (19) verbunden.

Wählt man also zwei Größen ξ', ϱ' derart, daß ξ' zu ξ und ϱ' zu ϱ sich so verhält, wie ξ zu ϱ, und daß (21) gilt, und schreibt man (19) für die Größe ξ, (8), (17), (18) für die Größenpaare ξ', ξ; ϱ, ϱ'; ξ, ϱ, so folgt durch Kombination dieser Ungleichungen mit der bekannten Beziehung (22) das Hauptergebnis (23), welches allein die Größen ξ', ϱ' enthält und sich durch weitere Hypothesen über die Beziehung zwischen diesen Größen auf die ganz einfache Form (25) bringen läßt.

Nimmt man nun eine unbeschränkte Folge von Größen ϱ'', ϱ''', $\cdots$ an, deren jede sich zur vorhergehenden ebenso verhält wie ϱ' zu ξ' und ϱ'' zu ϱ', so zeigt die aus (25) unmittelbar folgende Relation (26), daß $M'(\varrho^{(h)})$, d. h. das Maximum des absoluten Betrages von $\psi(x)$ für $|x| = \varrho^{(h)}$, mit h unbeschränkt zunimmt, während andererseits die Größen $\varrho^{(h)}$ eine bestimmte endliche Grenze nicht übersteigen. Es läßt sich hieraus schließen, daß $\psi(x)$, gegen die Annahme, keine ganze Funktion ist.

304. Beschränkt man sich auf Funktionen von endlicher Höhe, so läßt sich ein Satz beweisen, der die des Art. 301 umfaßt:

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion von endlicher Höhe und sind $P(x)$, $Q(x)$ zwei verschiedene Polynome, so ist $f(x)$ ein Polynom, falls jede der beiden Gleichungen:

$$f(x) = P(x), \quad f(x) = Q(x)$$

eine endliche Anzahl von Wurzeln hat.

Es muß sein (Art. 205):

$$f(x) - P(x) = A(x)e^{\varphi(x)}, \quad f(x) - Q(x) = B(x)e^{\psi(x)},$$

wo $A(x)$, $B(x)$ Polynome sind; da ferner $f(x)$ von endlicher Höhe ist und $P(x)$, $Q(x)$ Polynome sind, so sind (Art. 287) auch $f(x) - P(x)$, $f(x) - Q(x)$ von endlicher Höhe; folglich sind $\varphi(x)$, $\psi(x)$ Polynome. Bildet man demnach die $h + 1$ successiven Ableitungen der Gleichung:

$$A(x)e^{\varphi(x)} - B(x)e^{\psi(x)} = P(x) - Q(x),$$

wo h den größeren der Grade der beiden Polynome $A(x)$, $B(x)$ bezeichnet, so ergibt sich schließlich:

$$A_1(x)e^{\varphi(x)} - B_1(x)e^{\psi(x)} = 0$$

oder auch:

$$e^{\varphi(x) - \psi(x)} = \frac{B_1(x)}{A_1(x)},$$

wo $A_1(x)$, $B_1(x)$ Polynome sind. Daraus folgt, daß $\varphi(x) - \psi(x)$ eine Konstante:

$$\varphi(x) - \psi(x) = c$$

und somit:

$$e^{\psi(x)}[e^c A(x) - B(x)] = P(x) - Q(x)$$

ist; hieraus aber ergibt sich, daß $\psi(x)$ und folglich auch $\varphi(x)$ konstant ist. Also reduziert sich $f(x)$ in der Tat auf ein Polynom.

305. Noch allgemeiner ist der folgende Satz:

Es sei $f(x)$ eine Funktion von endlichem ν-Index; sind die entsprechenden Indices ν_1, ν_2 zweier Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ niedriger als ν, so ist der λ-Index aller Funktionen:

$$\varphi_1(x) f(x) - \varphi_2(x) \tag{1}$$

gleich ν, wenn ν nicht ganz ist, während es, wenn ν ganz ist, mindestens ein Paar von Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ von der Art gibt, daß der λ-Index der Funktion (1) niedriger ist als ν.

Wir wissen (Art. 287, 288), daß der ν-Index der Funktion (1) zugleich der von $f(x)$ ist. Dasselbe kann folglich (Art. 271), wenn ν nicht ganzzahlig ist, vom λ-Index behauptet werden, der unter dieser Voraussetzung mit dem ν-Index zusammenfällt.

Sei ν jetzt ganzzahlig, und es werde vorausgesetzt, es gebe zwei Paare von Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$; $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ von der Art, daß der λ-Index der beiden Funktionen:

$$\varphi_1(x) f(x) - \varphi_2(x), \quad \psi_1(x) f(x) - \psi_2(x)$$

niedriger ist als ν. Da ihr ν-Index gleich dem von $f(x)$ ist, so gilt:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) f(x) - \varphi_2(x) = \varphi(x) e^{P(x)}, \\ \psi_1(x) f(x) - \psi_2(x) = \psi(x) e^{Q(x)}, \end{cases} \tag{2}$$

wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ einfache Funktionen sind, deren λ-Indices kleiner sind als ν, und somit $P(x)$, $Q(x)$ zwei Polynome bezeichnen, deren Grad genau gleich ν ist. Aus den Gleichungen (2) folgt:

$$\varphi(x)\psi_1(x) e^{P(x)} - \psi(x)\varphi_1(x) e^{Q(x)} = \varphi_1(x)\psi_2(x) - \psi_1(x)\varphi_2(x),$$

oder einfacher:

$$M(x) e^{P(x)} + N(x) e^{Q(x)} = L(x), \tag{3}$$

wo der ν-Index von $M(x)$, $N(x)$, $L(x)$ kleiner ist als derjenige von $f(x)$. Durch Differentiation erhält man:

$$(M' + MP')e^P + (N' + NQ')e^Q = L';$$

daraus ergibt sich, falls der Nenner nicht identisch Null ist:

$$(4)\qquad \begin{cases} e^P = \dfrac{LN' - NL' + LNQ'}{MN' - NM' + MN(Q' - P')}, \\[2ex] e^Q = \dfrac{ML' - LM' - LMP'}{MN' - NM' + MN(Q' - P')}. \end{cases}$$

Betrachten wir beispielsweise den ersten dieser Ausdrücke. Zähler und Nenner sind ganze Funktionen mit gleichen Wurzeln, deren ν-Indices kleiner sind als der von $f(x)$; bezeichnen wir sie mit $\gamma(x)e^{\alpha(x)}$, beziehentlich $\gamma(x)e^{\beta(x)}$, wo $\gamma(x)$ eine einfache Funktion ist, so ist:

$$P(x) = \alpha(x) - \beta(x);$$

das ist aber unmöglich, weil P vom Grade ν ist, während die Grade von α und β niedriger sind als ν.

Ist der gemeinsame Nenner der Ausdrücke (4) Null:

$$MN' - NM' + MN(Q' - P') = 0,$$

so kann man mit $\frac{1}{M^2} e^{Q-P}$ multiplizieren und schreiben:

$$\frac{M[N'e^{Q-P} + N(Q' - P')e^{Q-P}] - M'Ne^{Q-P}}{M^2} = 0.$$

Nun ist die linke Seite (Art. 168) die Ableitung von $\frac{Ne^{Q-P}}{M}$, folglich hat man, wenn c eine Konstante bezeichnet:

$$\frac{Ne^{Q-P}}{M} = c.$$

Aus (3) wird alsdann:

$$(1 + c)Me^P = L,$$

woraus sich ergibt:

$$e^P = \frac{1}{1+c} \cdot \frac{L}{M};$$

das ist aber aus demselben Grunde wie vorher unmöglich.

Damit ist der Satz bewiesen.

306. Der vorstehende Beweis stützt sich lediglich auf die beiden Sätze, daß der ν-Index der Summe zweier Funktionen niemals größer ist als der der betrachteten Funktionen, und daß der ν-Index der Ableitung einer Funktion höchstens dem der letzteren gleich ist. Der Beweis kann somit unmittelbar auf alle Funktionen von unendlichem ν-Index, von denen in Art. 299 die Rede gewesen, übertragen werden.

307. Wir haben im vorhergehenden Kapitel (Art. 300) auf die neueren Untersuchungen Krafts über ganze Funktionen von unendlichem ν-Index hingewiesen. Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse beweist er den folgenden Satz, der Picards Sätze als Sonderfälle umfaßt:

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion, a eine Konstante und $\lambda_a(\varrho)$ der λ-Index der Funktion $f(x)-a$, so hat die Beziehung:

$$\theta(\varrho) < \lambda_a(\varrho)$$

für alle Werte von a Geltung mit Ausnahme höchstens eines einzigen.

Über gewisse Verallgemeinerungen der ganzen Funktionen[1]).

308. In den letzten Jahren sind einige Eigenschaften der ganzen Funktionen auf etwas allgemeinere Funktionenklassen übertragen worden. Wir wollen diese Übertragungen, die im allgemeinen keine beträchtlichen Schwierigkeiten darbieten, ziemlich kurz behandeln.

Wir betrachten zunächst die meromorphen Funktionen (C3a unserer Klassifikation). Eine solche Funktion ist (Art. 248) der Quotient zweier ganzen Funktionen. Für diese Funktionen nimmt Picards Satz I folgende Gestalt an:

Ist $f(x)$ eine meromorphe Funktion und gibt es drei verschiedene Konstanten A, B, C von der Art, daß die Funktionen $f(x)-A$, $f(x)-B$, $f(x)-C$ keine Wurzeln haben, so ist $f(x)$ eine Konstante[2]).

Wir können auch hier $A=0$, $B=1$ voraussetzen.

Es sei:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei ganze Funktionen darstellen. Die Gleichungen, welche der Voraussetzung nach nicht bestehen können, nehmen folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=0,\\ \varphi(x)-\psi(x)&=0,\\ \varphi(x)-C\psi(x)&=0.\end{aligned}$$

---

1) Borel 42, 48, 56, 534, Maillet 284, 285, 286, 287, 288, 289, 291, 292, Painlevé 356, Pincherle 616.

2) Der Unterschied von dem Falle der ganzen Funktionen hängt ersichtlich mit dem Umstande zusammen, daß in letzterem Falle außer den beiden ausdrücklich hervorgehobenen Gleichungen auch die Gleichung $f(x)=\infty$ keine Wurzeln hat.

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi(x) = e^{\Phi(x)}, \quad \varphi(x) - \psi(x) = e^{\Psi(x)}, \quad \varphi(x) - C\psi(x) = e^{\Lambda(x)},$$

wo $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, $\Lambda(x)$ ganze Funktionen sind, und somit durch Elimination von $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$(C-1)e^{\Phi(x)} - Ce^{\Psi(x)} + e^{\Lambda(x)} = 0,$$

wofür man schreiben kann:

$$(1) \qquad e^{\alpha(x)} + e^{\beta(x)} = 1,$$

indem man:

$$\alpha(x) = \Phi(x) - \Psi(x) + \lg \frac{C-1}{C},$$

$$\beta(x) = \Lambda(x) - \Psi(x) - \lg C$$

setzt. Nun ist die Unmöglichkeit von (1), wenn $\alpha(x)$, $\beta(x)$ keine Konstanten sind, bereits bewiesen worden (Art. 302), und es ist leicht zu ersehen, daß, wenn $\alpha(x)$, $\beta(x)$ Konstanten sind, auch $f(x)$ eine Konstante ist.

309. Die im vorigen Kapitel behandelten Verallgemeinerungen des Picardschen Satzes können auf meromorphe Funktionen ausgedehnt werden.

Es ist indes notwendig, eine Bemerkung vorauszuschicken.

Ist eine meromorphe Funktion $f(x)$ gegeben, so ist ihre Darstellung als Quotient zweier ganzen Funktionen:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

nicht völlig bestimmt, auch dann nicht, wenn festgesetzt wird, daß Zähler und Nenner keine gemeinsamen Wurzeln besitzen sollen; in der Tat kann man auch schreiben:

$$f(x) = \frac{e^{\omega(x)}\varphi(x)}{e^{\omega(x)}\psi(x)},$$

wo $\omega(x)$ eine beliebige ganze Funktion ist.

Ist $\psi(x)$ von endlicher Höhe, so werden wir die Darstellung (1) (bis auf einen konstanten Faktor) in unzweideutiger Weise bestimmen, indem wir festsetzen, daß $\psi(x)$ *eine einfache Funktion* sei.

Vorausgesetzt, daß dieser Bedingung genügt ist, werden wir als *Index* der meromorphen Funktion $f(x)$ den größten der ν-Indices der beiden ganzen Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bezeichnen, falls diese Indices endlich sind. Wenn wir dann von ganzen Funktionen sprechen, werden wir statt ν-*Index* öfter bloß *Index* sagen.

310. Ist $f(x)$ eine meromorphe Funktion vom Index ν, und sind $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ ganze Funktionen, deren Indices kleiner sind als ν, so hat auch die meromorphe Funktion:

$$f_1(x) = \frac{\alpha(x)f(x) + \beta(x)}{\gamma(x)f(x) + \delta(x)}$$

den Index ν.

Es sind nämlich in dem Ausdruck:

$$f_1(x) = \frac{\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\psi(x)}{\gamma(x)\varphi(x) + \delta(x)\psi(x)}$$

Zähler und Nenner ganze Funktionen, deren Indices nicht größer sind als ν, mithin kann dasselbe von $f_1(x)$ behauptet werden; da andrerseits:

$$f(x) = \frac{-\delta(x)f_1(x) + \beta(x)}{\gamma(x)f_1(x) - \alpha(x)}$$

ist, so kann der Index von $f(x)$ denjenigen von $f_1(x)$ nicht übersteigen; also sind beide Indices gleich.

311. Ist $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlichem Index und gibt es drei verschiedene Paare von Polynomen $P_i(x)$, $Q_i(x)$ $(i=1,2,3)$ von der Art, daß die Gleichungen:

$$f(x) - \frac{P_i(x)}{Q_i(x)} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

eine endliche Anzahl von Wurzeln besitzen, so ist $f(x)$ eine rationale Funktion.

Nach den Voraussetzungen des Satzes hat man, wenn $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gesetzt wird:

$$\varphi(x)Q_i(x) - \psi(x)P_i(x) = H_i(x)e^{K_i(x)},$$

wo $H_i(x)$, $K_i(x)$ Polynome bedeuten. Durch Elimination von $\varphi(x)$, $\psi(x)$ erhält man:

$$\begin{vmatrix} Q_1(x) & P_1(x) & H_1(x)e^{K_1(x)} \\ Q_2(x) & P_2(x) & H_2(x)e^{K_2(x)} \\ Q_3(x) & P_3(x) & H_3(x)e^{K_3(x)} \end{vmatrix} = 0,$$

wofür man schreiben kann:

$$A(x)e^{K_1(x)-K_3(x)} + B(x)e^{K_2(x)-K_3(x)} = C(x),$$

wo $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ Polynome darstellen. Hiernach läßt sich der Beweis wie in Art. 304 zu Ende führen.

312. Ist $f(x)$ eine meromorphe Funktion vom Index ν, so gibt es höchstens zwei meromorphe Funktionen $g(x)$ mit niedrigerem Index als ν von der Art, daß die Reihe der Nullstellen der Gleichung:

$$f(x) - g(x) = 0 \tag{1}$$

einen Konvergenzexponenten λ besitzt, der kleiner ist als ν.

Wir setzen:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \quad g(x) = \frac{\chi(x)}{\omega(x)}$$

und betrachten die Gesamtheit I der Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{\alpha(x) f(x) + \beta(x)}{\gamma(x) f(x) + \delta(x)}, \tag{2}$$

wo $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ ganze Funktionen von niedrigerem Index als ν sind.

Es können drei Fälle eintreten, die wir der Reihe nach betrachten wollen.

1) In der Gesamtheit I kommt keine ganze Funktion vor.

Wir nehmen an, es gebe eine Funktion $g(x)$ von der Beschaffenheit, daß für die entsprechende Gleichung (1) $\lambda < \nu$ ist. Alsdann ist der λ-Index der ganzen Funktion $\omega\varphi - \chi\psi$ kleiner als ν; wird nun:

$$\omega\varphi - \chi\psi = \theta e^{\mu}$$

gesetzt, wo θ eine einfache Funktion ist, so ist der λ-Index und mithin der ν-Index von θ kleiner als ν. Man kann aber setzen, indem man $\gamma = \omega$, $\delta = -\chi$ nimmt:

$$\theta f_1 = \frac{\theta\alpha f + \theta\beta}{\omega f - \chi} = (\alpha\varphi + \beta\psi)e^{-\mu},$$

so daß also θf_1 eine ganze Funktion ist, während sie der Gesamtheit I angehört, da die Indices von $\theta\alpha$, $\theta\beta$ kleiner als ν sind. Also ist die gemachte Voraussetzung in dem betrachteten Falle widersinnig.

2) Die Gesamtheit I enthält eine ganze Funktion $\varrho(x)$, aber diese ist derart, daß es kein Paar von ganzen Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ von niedrigerem Index als ν gibt, für welches der λ-Index der Funktion:

$$\varphi_1(x)\varrho(x) - \varphi_2(x) \tag{3}$$

kleiner ist als ν.

Ist:

$$\varrho(x) = \frac{A(x) f(x) + B(x)}{C(x) f(x) + D(x)},$$

so kann (2) geschrieben werden:

$$f_1 = \frac{(\alpha D - \beta C)\varrho + (-\alpha B + \beta A)}{(\gamma D - \delta C)\varrho + (-\gamma B + \delta A)} = \frac{M}{N}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ sind die Wurzeln von $M = 0$, für die nicht zugleich $N = 0$ ist; es genügen aber die $M = 0$, $N = 0$ gemeinsamen Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha D - \beta C & -\alpha B + \beta A \\ \gamma D - \delta C & -\gamma B + \delta A \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(AD - BC) = 0,$$

deren Index kleiner ist als ν; mithin ist der Konvergenzexponent der Reihe dieser Wurzeln kleiner als ν, und der der Wurzeln von $f_1 = 0$ stimmt mit dem der Wurzeln von $M = 0$ überein. Nun ist der Konvergenzexponent der Reihe der Wurzeln von $M = 0$ nach der über ϱ gemachten Voraussetzung genau ν, ausgenommen den Fall, daß:

$$\alpha D - \beta C = 0$$

oder $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{C}{D}$ ist. Beachtet man, daß der Gleichung $f_1 = 0$ die Gleichung $f = -\frac{\beta}{\alpha}$ entspricht, so kann man schließen, daß für die Gleichung (1) nur dann $\lambda < \nu$ ist, wenn:

$$g(x) = -\frac{D(x)}{C(x)}$$

ist.

3) Die Funktion $\varrho(x)$ ist der Art, daß es ein Funktionenpaar $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ von niedrigerem Index als ν gibt, für welches der λ-Index von (3) kleiner ist als ν.

Wir setzen:

$$\varrho_1(x) = \varphi_1\varrho - \varphi_2 = \frac{(\varphi_1 A - \varphi_2 C)f + (\varphi_1 B - \varphi_2 D)}{Cf + D} = \frac{A_1 f + B_1}{Cf + D};$$

es muß dann sein:

$$\varrho_1 = \theta e^P,$$

wo θ eine einfache Funktion von einem Index $< \nu$ und P ein Polynom vom Grade ν bedeutet, der notwendigerweise eine ganze Zahl ist. Daraus folgt:

$$f = \frac{D\varrho_1 - B_1}{-C\varrho_1 + A_1} = \frac{D\theta e^P - B_1}{-C\theta e^P + A_1} = \frac{D_1 e^P - B_1}{-C_1 e^P + A_1},$$

$$e^P = \frac{A_1 f + B_1}{C_1 f + D_1},$$

woraus sich ergibt, daß die Gesamtheit I in dem betrachteten Falle eine Exponentialfunktion enthält; ferner ist:

$$f_1 = \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta} = \frac{(\alpha D_1 - \beta C_1) e^P + (-\alpha B_1 + \beta A_1)}{(\gamma D_1 - \delta C_1) e^P + (-\gamma B_1 + \delta A_1)} = \frac{M}{N}.$$

Man ersieht hieraus wie vorher, daß der Konvergenzexponent der Reihe der Wurzeln von $f_1 = 0$ nichts andres ist als der λ-Index der Funktion M. Nun ist:

$$M = (\alpha D - \beta C)\varrho_1 + (-\alpha B_1 + \beta A_1);$$

da aber ϱ_1 die einzige Funktion von der Form (3) ist, für die $\lambda < \nu$, so hat man für M die Gleichung $\lambda = \nu$. Eine Ausnahme bilden nur die beiden Fälle:

$$\alpha D - \beta C = 0, \quad -\alpha B_1 + \beta A_1 = 0,$$

denen beziehungsweise entsprechen:

$$g(x) = -\frac{D}{C}, \quad g(x) = -\frac{B_1}{A_1}.$$

313. Maillet hat den Funktionen mit einer endlichen Anzahl von singulären Punkten (C2 unserer Klassifikation) den Namen halbganze Funktionen (fonctions quasi-entières) gegeben. Sind $a_0, a_1, \ldots, a_k, \infty$ die singulären Punkte und bezeichnen:

$$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x), g_{k+1}(x)$$

ganze Funktionen, so ist die allgemeine Form der betrachteten Funktionen:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} g_i\left(\frac{1}{x - a_i}\right) + g_{k+1}(x).$$

Die Funktion $f(x)$ läßt sich noch auf eine andre Form bringen. Es möge I die Menge ihrer Nullstellen bezeichnen; die abgeleitete Menge I' kann (Art. 159) keinen von den Punkten a_i $(i = 0, 1, \cdots, k)$, ∞ verschiedenen Punkt enthalten. Nun zerlegen wir I in $k + 2$ Teilmengen I_i $(i = 0, 1, \cdots, k + 1)$, von denen jede einen der betrachteten Punkte als einzige Grenzstelle besitzt (einige von diesen Mengen können unter Umständen fehlen). Setzen wir dann:

$$I_i = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots) \qquad (i = 0, 1, \cdots, k + 1),$$

$$\frac{1}{x - a_i} = y_i, \quad \frac{1}{c_{ih} - a_i} = d_{ih} \qquad (i = 0, 1, \cdots, k),$$

$$x = y_{k+1}, \quad c_{k+1,h} = d_{k+1,h},$$

und bilden wir die einfache Funktion $\varphi_\iota(y_i)$ mit den Nullstellen d_{ik}, so hat das Produkt:

$$\varphi_0\left(\frac{1}{x-a_0}\right)\varphi_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)\cdots\varphi_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)\varphi_{k+1}(x)$$

dieselben Nullstellen wie $f(x)$, und es ist, wie leicht zu schließen:

$$f(x)=\varphi_0\left(\frac{1}{x-a_0}\right)e^{\psi_0\left(\frac{1}{x-a_0}\right)}\varphi_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)e^{\psi_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)}\cdots$$

$$\cdots\varphi_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)e^{\psi_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)}\varphi_{k+1}(x)e^{\psi_{k+1}(x)}\times$$

$$\times(x-a_0)^{\alpha_0}(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_k)^{\alpha_k},$$

wo die ψ ganze Funktionen und die α positive oder negative Zahlen bedeuten.

Als Index von $f(x)$ in bezug auf den Punkt a_ι bezeichnet man den Index ν_ι der Funktion $g_i(x)$; es läßt sich beweisen, daß auch die Funktion $\varphi_\iota(x)e^{\psi_\iota(x)}$ denselben Index hat.

Für die halbganzen Funktionen gilt folgender Satz:

Ist $f(x)$ eine halbganze Funktion, deren Indices sämtlich kleiner sind als 2, und besitzt sie eine endliche Anzahl imaginärer Nullstellen, so findet dasselbe für ihre Ableitung statt; ferner liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden reellen Nullstellen von $f(x)$ von hinreichend großem absolutem Betrage eine einzige Nullstelle von $f'(x)$.

Auch die Sätze des vorigen Kapitels lassen sich auf halbganze Funktionen übertragen.

314. Ganz neuerdings hat Maillet den Namen halbganze Funktionen (fonctions quasi-entières) denjenigen Funktionen erteilt, für welche der Punkt im Unendlichen ein isolierter singulärer Punkt ist.

Wird um den Anfangspunkt mit dem Radius R ein Kreis beschrieben, der alle in endlicher Entfernung gelegenen Singularitäten der Funktion enthält, so ist die allgemeine Form der betrachteten Funktionen (Art. 180):

$$f(x)=\varphi(x)+\psi\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze Funktion, $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ aber eine außerhalb des Kreises

R konvergierende Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ohne konstantes Glied ist. Als Index von $f(x)$ wird der ν-Index von $\varphi(x)$ bezeichnet. Da sich $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ der Null nähert, wenn x dem Unendlichen zustrebt, so hat man für ein hinreichend großes ξ:

$$|f(x)| < e^{\xi^{\nu+\varepsilon}}.$$

Die Funktion $f(x)$ läßt sich auf die Form:

$$f(x) = x^{\alpha}\omega(x)e^{f_1(x)}$$

bringen, wo $f_1(x)$ eine Funktion von derselben Natur wie $f(x)$, α eine ganze Zahl und $\omega(x)$ eine einfache ganze Funktion ist, deren Nullstellen die außerhalb des Kreises R liegenden Nullstellen von $f(x)$ sind.

Auch auf die hier betrachteten Funktionen können die im vorigen Artikel angeführten Sätze übertragen werden.

315. Maillet nennt halbmeromorphe Funktionen (fonctions quasi-méromorphes) diejenigen Funktionen, die außer einer endlichen Anzahl von wesentlich singulären Punkten eine unendliche Anzahl von Polen besitzen (C3b unserer Klassifikation). Er beweist, daß jede halbmeromorphe Funktion der Quotient zweier halbganzer Funktionen ist, und überträgt auf die neuen Funktionen die bekannten Sätze.

Funktionen mit beschränktem Existenzbereich (Lückenfunktionen)[1].

316. Die theoretische Möglichkeit analytischer Funktionen, deren Existenzbereich nicht die ganze Ebene bedeckt, folgt aus der Definition der analytischen Funktion selbst. Andrerseits besitzen die Funktionen, die gewöhnlich in der Analysis betrachtet werden (die rationalen, die elementaren transzendenten und die elliptischen Funktionen), mit Ausnahme einer endlichen oder unendlichen Menge von Punkten, die weder Flächen noch Linien bilden, die ganze Ebene als Existenzbereich. Es erhebt sich demnach die Frage, ob es wirklich analytische Funktionen gibt, die in bestimmten Teilen der Ebene, die sowohl Linien (Unstetigkeitslinien oder singuläre Linien) als auch Flächen (Lücken) sein können, nicht existieren.

---

1) D'Arone 8, Cayley 114, Fredholm 158, Gillet 168, Goursat 173, 174, 175, Homén 208, Krygowski 233, 234, Lerch 256, 258, Mittag-Leffler 329, 330, Poincaré 395, 396, Pszeborski 419, Stäckel 464, Stieltjes 465, Teixeira 472, 473, Weierstraß 517.

Ein tieferes Studium der Theorie der elliptischen Funktionen hat erkennen lassen, daß der Modul einer elliptischen Funktion, als analytische Funktion des Verhältnisses ihrer Perioden betrachtet, nur für diejenigen Werte dieses Verhältnisses existiert, in denen der Koeffizient von i positiv ist, d. h. nur in der oberhalb der reellen Achse liegenden Halbebene der komplexen Zahlenebene. Von dieser Funktion aus kann man durch eine lineare Substitution (vgl. Art. 198) zu einer Funktion gelangen, die nur in dem Innen- oder nur in dem Außengebiete eines gegebenen Kreises existiert. Funktionen dieser Art sind auch direkt konstruiert worden[1]), und auf einige von ihnen werden wir gelegentlich weiter unten stoßen. Für jetzt genügt es, unter den vielen **Beispielen** für die Konstruktion von Funktionen mit beschränktem Existenzbereich oder **Lückenfunktionen** dasjenige von Poincaré in seinen Einzelheiten darzustellen, das eins der allgemeinsten ist.

317. Die Aufgabe, die sich Poincaré stellt, ist folgende:

Gegeben ist ein Bereich C, dessen Umfang eine einfache konvexe Linie l sei; man soll eine analytische Funktion bilden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Bereiches C existiert.

Man nehme eine Folge von reellen oder komplexen Größen $a_1, a_2, \ldots$ von der Art, daß die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} |a_h|$ konvergent ist, und eine abzählbare Menge von Punkten $c_1, c_2, \ldots$, die C oder dessen Umfang angehört und auf jedem Teile von l überall dicht ist, und bilde den arithmetischen Ausdruck:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{x - c_h}.$$

Es sei x_0 ein Punkt außerhalb C, ϱ der Radius des um x_0 beschriebenen, l von außen berührenden Kreises γ; da l konvex ist, so ist dieser Kreis eindeutig bestimmt und liegt mit Ausnahme des Berührungspunktes x_1 vollständig außerhalb C. Man hat somit für alle Werte von h:

$$|c_h - x_0| \geqq \varrho$$

und daher, wenn x ein Punkt innerhalb des Kreises γ ist:

$$|x - x_0| < \varrho \leqq |c_h - x_0|,$$

1) Am wichtigsten sind unter ihnen die **Fuchsschen**, deren Untersuchung man **Poincaré** verdankt; sie existieren unter gewissen Umständen nur im Innern des Einheitskreises (so pflegt man den mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis zu bezeichnen).

folglich:

$$\frac{1}{x-c_h}=\frac{1}{(x-x_0)-(c_h-x_0)}=$$

$$=-\frac{1}{(c_h-x_0)\left(1-\dfrac{x-x_0}{c_h-x_0}\right)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{(c_h-x_0)^{k+1}}$$

und:

$$F(x)=-\sum_{h=1}^{\infty}\left[a_h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{(c_h-x_0)^{k+1}}\right]=-\sum_{h=1}^{\infty}\mathfrak{P}_h(x-x_0),$$

wo:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}_h(x-x_0)=a_h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{(c_h-x_0)^{k+1}}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\mathfrak{P}_h(x-x_0)$ konvergiert gleichmäßig für alle Werte von x, für die $|x-x_0|=\varrho'$ ist, wobei ϱ' eine beliebige Größe bedeutet, die kleiner als ϱ ist. Es ist nämlich:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{(c_h-x_0)^{k+1}}\right|\leqq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^k}{|c_h-x_0|^{k+1}}\leqq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varrho'^k}{\varrho^{k+1}}=\frac{1}{\varrho-\varrho'},$$

folglich:

$$\left|\sum_{h=m}^{\infty}\mathfrak{P}_h(x-x_0)\right|=\left|\sum_{h=m}^{\infty}a_h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{(c_h-x_0)^{k+1}}\right|\leqq\frac{1}{\varrho-\varrho'}\sum_{h=m}^{\infty}|a_h|;$$

nun läßt sich nach Annahme einer beliebigen Größe σ stets eine Zahl m von der Art angeben, daß:

$$\sum_{h=m}^{\infty}|a_h|<\sigma(\varrho-\varrho')$$

ist; folglich hat man für alle betrachteten Werte von x:

$$\left|\sum_{h=m}^{\infty}\mathfrak{P}_h(x-x_0)\right|<\sigma.$$

Man darf demnach auf die Reihe (1) den Hilfssatz von Weierstraß anwenden und erhält für alle Punkte innerhalb γ:

$$(2)\qquad F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k,$$

wo:

$$b_k = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}}.$$

$F(x)$ wird demnach durch eine analytische Funktion dargestellt, die sich in jedem Punkte außerhalb C regulär verhält.

Es erübrigt noch zu beweisen, daß diese Funktion im Sinne von Art. 157 nicht über die Linie l hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, oder auch, daß für jeden beliebigen Punkt außerhalb C der Konvergenzkreis des diesem Punkte entsprechenden Elementes der analytischen Funktion genau der l von außen berührende Kreis γ ist. Es genügt zu diesem Zwecke nachzuweisen, daß die Reihe (2) für:

$$|x - x_0| = \varrho$$

nicht unbedingt konvergent ist.

Wir nehmen zunächst an, der Berührungspunkt x_1 von γ und l sei einer der Punkte c, z. B. c_r. Wir wählen ε willkürlich, bestimmen eine Zahl m von der Art, daß für jedes $n > m$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h| < \varepsilon$$

wird, und wählen eine Zahl n, die größer ist als m und r. Bezeichnet ferner δ den kleinsten unter den Abständen der Punkte:

$$c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, c_{r+1}, \ldots, c_n$$

von dem Punkte x_0, so ist $\delta > \varrho$, und man kann folglich eine Größe ϱ_1 von der Art annehmen, daß:

$$\delta > \varrho_1 > \varrho.$$

Alsdann ist:

$$\left| \sum_{h=1}^{r-1} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}} + \sum_{h=r+1}^{n} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}} \right| <$$

$$< \frac{1}{\varrho_1^{k+1}} \{ |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{r-1}| + |a_{r+1}| + \cdots + |a_n| \} < \frac{S}{\varrho_1^{k+1}},$$

wo:

$$S = \sum_{h=1}^{n} |a_h|.$$

Da andrerseits $|c_h - x_0| > \varrho$ für jedes von r verschiedene h ist, so ist:

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}}\right| < \frac{1}{\varrho^{k+1}} \sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h| < \frac{\varepsilon}{\varrho^{k+1}},$$

folglich:

$$\left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| < \frac{S}{\varrho_1^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{\varrho^{k+1}}$$

und:

$$\varrho^k \left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| < \frac{S}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{k+1} + \frac{\varepsilon}{\varrho}.$$

Läßt man k über alle Grenzen wachsen, so strebt $\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{k+1}$ der Null zu, folglich ist:

$$\lim_{k=\infty} \varrho^k \left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{\varrho};$$

da aber ε willkürlich ist, so folgt:

$$\lim_{k=\infty} \varrho^k \left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| = 0,$$

oder auch, mit Rücksicht darauf, daß $|c_r - x_0| = \varrho$:

$$\lim_{k=\infty} |b_k| \varrho^k = \lim_{k=\infty} \varrho^k \left| \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| = \frac{|a_r|}{\varrho} \neq 0,$$

woraus folgt, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \varrho^k$ nicht konvergent sein kann.

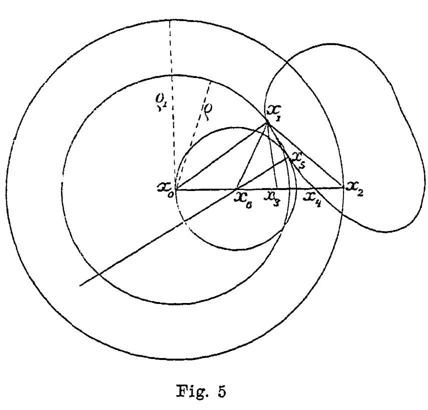

Fig. 5

Es sei jetzt x_1 von sämtlichen Punkten c verschieden, und es werde angenommen, daß der Konvergenzradius der Reihe (2) nicht ϱ, sondern $\varrho_1 > \varrho$ sei. Es werde ein Radius $x_0 x_2$ des Kreises ϱ_1 gezogen und über $x_1 x_2$ als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben, dessen Spitze x_3 auf $x_0 x_2$ liegen möge. Offenbar läßt sich der Winkel $x_1 x_0 x_2$ so klein nehmen, daß, wenn wir den Schnittpunkt von $x_0 x_2$ und l mit

x_4 bezeichnen, die Normale von l in einem beliebigen Punkte x_5 des Bogens $x_1 x_4$ den Radius $x_0 x_2$ in einem Punkte x_6 der Strecke $x_0 x_3$ treffe[1]). Man hat sodann $x_6 x_2 > x_6 x_1$ und folglich um so mehr $x_6 x_2 > x_6 x_5$. Da nun die Menge der Punkte c auf jedem Teile von l überall dicht ist, so können wir voraussetzen, daß x_5 einer dieser Punkte ist. Nach dem, was oben festgestellt worden, ist der Konvergenzradius des Elementes der analytischen Funktion, welches dem (auf der Normale zu l in einem Punkte c gelegenen) Punkte x_6 entspricht, genau $x_6 x_5$, so daß der bezügliche Konvergenzkreis vollständig innerhalb desjenigen liegt, der dem Punkte x_0 entspricht; nun ist das (Art. 152) unmöglich, folglich ist die gemachte Annahme falsch.

Es ist sonach der Beweis geliefert, daß der Bereich C für die durch den arithmetischen Ausdruck $F(x)$ dargestellte analytische Funktion eine Lücke ist.

318. Poincaré hat als Beispiel für die Anwendung seiner Methode den Fall behandelt, in welchem der Bereich C ein konvexes Polygon von beliebiger Seitenzahl ist. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ p Punkte und ist C ein konvexes Polygon, welches einige der Punkte α zu Ecken hat, während die übrigen Punkte α auf seinen Seiten oder in seinem Innern liegen, so stellt der arithmetische Ausdruck:

$$F(x) = \sum \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2} \cdots a_p^{h_p}}{x - \dfrac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \cdots + h_p \alpha_p}{h_1 + h_2 + \cdots + h_p}},$$

wo die $h_1, h_2, \ldots, h_p$ alle ganzen, nicht negativen Werte mit Ausnahme der Kombination $0, 0, \ldots, 0$ durchlaufen und $a_1, a_2, \ldots, a_p$ p konstante Größen von kleinerem absolutem Betrage als 1 sind, eine analytische Funktion dar, die sich in allen Punkten außerhalb C und lediglich in diesen Punkten regulär verhält.

Im besondern gewinnt man so für $p = 2$ eine Funktion, die eine Unstetigkeitslinie (die Strecke $\alpha_1 \alpha_2$) besitzt.

Es möge z. B. eine Funktion gebildet werden, die den negativen Teil der reellen Achse zur Unstetigkeitslinie hat. Wir gehen von dem allgemeinen Ausdrucke:

$$F(x) = \sum \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{x - \dfrac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2}{h_1 + h_2}}$$

1) Es würde beispielsweise genügen, so zu verfahren, daß x_3 innerhalb des Bereiches C fiele.

aus und wenden auf diesen die lineare Substitution:

$$y = \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2}$$

oder:

$$x = \frac{\alpha_2 y - \alpha_1}{y - 1}$$

an, durch welche den Werten α_1, α_2 von x beziehentlich die Werte 0 und ∞ von y, den zwischen α_1 und α_2 liegenden Werten von x negative Werte von y zugeordnet werden. Man hat dann:

$$F(x) = \Phi(y) = \sum \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{\frac{\alpha_2 y - \alpha_1}{y - 1} - \frac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2}{h_1 + h_2}} = \frac{y-1}{\alpha_2 - \alpha_1} \sum \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{h_1 y + h_2};$$

anstatt dieser Funktion darf man aber die andre:

$$\Psi(y) = \sum \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{h_1 y + h_2}$$

in Betracht ziehen.

Setzt man insbesondere:

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{e},$$

so ergibt sich die Funktion:

$$\Omega(y) = \sum \frac{e^{-h_1 - h_2}}{h_1 y + h_2}.$$

319. Die obigen Betrachtungen gelten, wie leicht zu sehen, auch dann noch, wenn l nicht konvex ist, vorausgesetzt, daß es keine einspringenden Winkel besitzt.

Daraus folgt, daß man einen gegebenen Kurvenbogen so auffassen kann, als ob er, doppelt genommen, den Umfang einer Lücke vom Flächeninhalt Null bilde; daher läßt sich mit Hilfe der Poincaréschen Methode eine Funktion bilden, welche diesen Kurvenbogen als Unstetigkeitslinie besitzt.

320. Ist in der Ebene eine endliche Anzahl getrennter, von konvexen Begrenzungen eingeschlossener Bereiche $C_1, C_2, \ldots, C_p$ gegeben, so lassen sich p analytische Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ so bilden, daß $f_h(x)$ nur außerhalb C_h existiert. Dann ist die analytische Funktion $\sum_{h=1}^{p} f_h(x)$ in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Bereiche $C_1, C_2, \ldots, C_p$ regulär.

321. Lerch hat einige allgemeinere Sätze aufgestellt, die zur Bildung von Lückenfunktionen führen. Es möge hier der folgende angeführt werden:

Es seien $m_0, m_1, m_2, \ldots$ ganze positive Zahlen, von denen jede ein Teiler der folgenden sein möge, $\mathfrak{P}_0(x), \mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), \ldots$ Potenzreihen, welche innerhalb des Einheitskreises konvergieren und auf dessen Umfang höchstens den singulären Punkt $x = 1$ besitzen; außerdem sei die Reihe:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathfrak{P}_h(x^{m_h})$$

von der Art, daß sie innerhalb des Einheitskreises in eine konvergente Potenzreihe verwandelt werden kann und für unendlich viele Zahlen n der Beziehung:

$$\lim_{x=1} \sum_{h=n}^{\infty} \mathfrak{P}_h(x^{m_h}) = \infty$$

genügt. Alsdann ist $f(x)$ eine analytische Funktion, die nur innerhalb des Einheitskreises existiert.

Als Spezialfälle dieses Satzes findet man die Funktionen:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^{2^h}, \quad \sum_{h=0}^{\infty} x^{h!}.$$

Divergente Reihen[1]).

322. Divergente Reihen, welche die alten Mathematiker ohne Bedenken verwendeten, wurden aus der Analysis verbannt, seitdem Abel und Cauchy gezeigt hatten, daß ihr Gebrauch gefährlich ist und zu falschen Ergebnissen führen kann. Man erkannte aber in den letzten Jahren, daß sich die divergenten Reihen unter bestimmten Umständen als brauchbares Werkzeug für analytische Untersuchungen erweisen.

---

1) Barnes 527, Borel 40, 44, 50, 51, 52, 53, 57, 60, 61, 62, 534, Cesàro 119, Fejer 549, Galvani 551, Hadamard 184, Hardy 560, 565, 566, Joachimescu 216, Kluyver 225, Maillet 295, Oldenburg 337, Padé 344, 345, Pincherle 393, 614, 615, Poincaré 398, Le Roy 429, 430, 431, 432, Servant 454, Thomé 479, Vivanti 494, Woronoi 522. — Die Theorie der divergenten Reihen ist noch ziemlich unvollständig; wir haben es jedoch im Hinblick auf ihre große Wichtigkeit für geboten erachtet, ihr einige Seiten zu widmen, die allerdings nur einen provisorischen Charakter besitzen.

Wir setzen nämlich voraus, es lasse sich jeder divergenten Reihe mit konstanten Gliedern eine Zahl und jeder divergenten Reihe von Funktionen eine Funktion — die als Summe der Reihe bezeichnet werden kann — so zuordnen, daß die Summe der Reihe, die man erhält, wenn man mit gegebenen Reihen eine bestimmte arithmetische Operation vornimmt, die nämliche Größe ist, die man erhält, wenn man dieselbe Operation mit den Summen dieser Reihen vornimmt. Ist z. B. eine Differentialgleichung:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

gegeben, und läßt sich eine Reihe von Funktionen von x auffinden, die, an Stelle von y gesetzt, die Gleichung formal befriedigt, so ist, wenn diese Reihe divergiert, ihre Summe (in dem soeben dem Worte beigelegten Sinne) ein Integral der Gleichung. Führt man nämlich an der Reihe die in das Symbol F zusammengefaßten Operationen aus, so erhält man der Voraussetzung gemäß eine Reihe mit lauter Nullelementen, folglich muß man, wenn dieselben Operationen an ihrer Summe ausgeführt werden, als Resultat die Summe einer Reihe mit lauter Nullelementen oder Null finden. Wir werden also durch den Gebrauch der divergenten Reihen in den Stand gesetzt, Integrale der vorgegebenen Gleichung aufzufinden.

Diese hier kurz angedeuteten Gesichtspunkte sollen in der Folge genauer bestimmt werden.

323. Läßt sich für eine gegebene reelle Funktion $f(x)$ eine solche Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{-h}$ bilden, daß für alle Werte von n:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left(f(x) - \sum_{h=0}^{n} a_h x^{-h} \right) = 0$$

wird, wo selbstverständlich x lauter reelle und positive Werte annimmt, so sagt man, die Reihe stelle die Funktion $f(x)$ asymptotisch dar.

Man kann nicht behaupten, daß jede beliebige Funktion eine asymptotische Darstellung besitzt, dagegen läßt sich beweisen, daß, wenn eine asymptotische Darstellung überhaupt existiert, es nur eine einzige gibt. In der Tat sind ihre Koeffizienten durch die Formeln:

$$\lim_{x=\infty} f(x) = a_0, \quad \lim_{x=\infty} x(f(x) - a_0) = a_1, \quad \lim_{x=\infty} x^2 \left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} \right) = a_2, \cdots$$

der Reihe nach bestimmt, falls die auftretenden Grenzwerte existieren.

Keineswegs aber stellt umgekehrt jede Reihe eine einzige Funktion asymptotisch dar.

Um dies zu zeigen, wollen wir die asymptotische Darstellung der Funktion e^{-x} aufsuchen. Man hat (Art. 146):

$$a_0 = \lim_{x=\infty} e^{-x} = 0, \quad a_1 = \lim_{x=\infty} x(e^{-x} - a_0) = \lim_{x=\infty} xe^{-x} = 0$$

und in gleicher Weise $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ usw., so daß die asymptotische Darstellung der Funktion e^{-x} eine Reihe ist, deren Koeffizienten sämtlich Null sind.

Demnach kann man unter Beachtung der Sätze, die wir im folgenden Artikel auseinandersetzen werden, schließen: Besitzt $f(x)$ eine asymptotische Darstellung, so besitzen alle Funktionen $f(x) + Ce^{-x}$, wo C eine beliebige Konstante bedeutet, ein und dieselbe Darstellung.

324. Besitzen zwei Funktionen eine asymptotische Darstellung, so besitzt auch ihre Summe eine solche Darstellung, und zwar ist sie die Summe der asymptotischen Darstellungen der beiden Funktionen.

Besitzt eine Funktion $f(x)$ eine asymptotische Darstellung und ist C eine Konstante, so besitzt auch $Cf(x)$ eine asymptotische Darstellung, welche das Produkt der asymptotischen Darstellung von $f(x)$ in C ist.

Wir übergehen den Beweis dieser Sätze, der sich äußerst einfach gestaltet.

Besitzen zwei Funktionen asymptotische Darstellungen, so besitzt auch ihr Produkt eine solche, und zwar ist sie das Produkt der asymptotischen Darstellungen der beiden Funktionen.

Der Beweis gestaltet sich dem für die Multiplikation konvergenter Reihen üblichen analog.

325. Besitzt die Funktion $f(x)$ die asymptotische Darstellung $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{-h}$ und hat die Potenzreihe $\sum_{r=0}^{\infty} c_r f^r$ den Konvergenzradius $\varrho > |a_0|$, so besitzt diese Potenzreihe, als Funktion von x betrachtet, eine asymptotische Darstellung, die man erhält, wenn man in die Reihe statt f seine Darstellung einführt und nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ordnet.

Zunächst kann, da $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = a_0$ ist, x so groß genommen werden, daß $|f(x)| < \varrho$ wird, so daß die Reihe für alle Werte von x, die größer sind als ein bestimmter Wert, konvergiert und deshalb eine endliche Funktion von x darstellt, die wir mit $F(x)$ bezeichnen wollen.

Da ferner die Reihe für jedes $f \leqq \varrho' < \varrho$ gleichmäßig konvergiert, so ist:

$$\lim_{x=\infty} F(x) = \lim_{x=\infty} \sum_{r=0}^{\infty} c_r f^r = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \lim_{x=\infty} f^r = \sum_{r=0}^{\infty} c_r a_0^r.$$

Bezeichnen wir diese Summe mit A_0, so ist weiterhin:

$$F(x) - A_0 = \sum_{r=1}^{\infty} c_r (f^r - a_0^r),$$

folglich:

$$\lim_{x=\infty} x(F(x) - A_0) = \lim_{x=\infty} x \sum_{r=1}^{\infty} c_r (f^r - a_0^r) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \lim_{x=\infty} x(f^r - a_0^r).$$

Nun ist:

$$\lim_{x=\infty} x(f^r - a_0^r) = \lim_{x=\infty} x(f - a_0) \cdot \lim_{x=\infty}(f^{r-1} + a_0 f^{r-2} + \cdots + a_0^{r-2} f + a_0^{r-1}) =$$
$$= r a_0^{r-1} a_1,$$

mithin:

$$\lim_{x=\infty} x(F(x) - A_0) = a_1 \sum_{r=1}^{\infty} r c_r a_0^{r-1},$$

eine Größe, die mit A_1 bezeichnet werde. In derselben Weise kann man fortfahren, der Reihe nach die übrigen Koeffizienten $A_2, A_3, \cdots$ der asymptotischen Darstellung von $F(x)$ zu bestimmen, und es bestätigt sich ohne Schwierigkeit, daß diese mit der Reihe zusammenfällt, die man erhalten würde, wenn man $\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_r \left(\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^{-h}\right)^r$ nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ordnete.

326. Besitzt $f(x)$ eine asymptotische Darstellung $\varphi(x) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^{-h}$ und ist $a_0 \neq 0$, so besitzt auch $\frac{1}{f(x)}$ eine asymptotische Darstellung, die man erhält, wenn man $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ entwickelt.

Man kann schreiben:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \cdots} = \frac{1}{a_0(1 + \psi(x))},$$

indem man:

$$\psi(x) = \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \cdots$$

setzt. Nun kann, da $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = a_0$ ist, x so groß genommen werden, daß $|\psi(x)| < 1$ wird; alsdann ist:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{a_0}(1 - \psi(x) + [\psi(x)]^2 - \cdots),$$

was in eine konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\sum\limits_{h=0}^{\infty} b_h x^{-h}$, verwandelt werden kann. Man beweist dann ohne Mühe, daß $\sum\limits_{h=0}^{\infty} b_h x^{-h}$ die asymptotische Darstellung von $\frac{1}{f(x)}$ ist.

327. Wenn eine Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $f'(x)$ asymptotische Darstellungen besitzen, so erhält man die Darstellung von $f'(x)$ durch gliedweise Differentiation der Darstellung von $f(x)$[1].

Sind $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^{-h}$, $\sum\limits_{h=0}^{\infty} b_h x^{-h}$ die asymptotischen Darstellungen von $f(x)$, $f'(x)$, so ist:

$$(1)\begin{cases} a_0 = \lim\limits_{x=\infty} f(x), \quad a_1 = \lim\limits_{x=\infty} x(f(x) - a_0), \quad a_2 = \lim\limits_{x=\infty} x^2\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right), \\ \qquad \cdots, \quad a_r = \lim\limits_{x=\infty} x^r\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \cdots - \frac{a_{r-1}}{x^{r-1}}\right), \cdots; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} b_0 = \lim\limits_{x=\infty} f'(x), \quad b_1 = \lim\limits_{x=\infty} x(f'(x) - b_0), \quad b_2 = \lim\limits_{x=\infty} x^2\left(f'(x) - b_0 - \frac{b_1}{x}\right), \\ \qquad \cdots, \quad b_r = \lim\limits_{x=\infty} x^r\left(f'(x) - b_0 - \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} - \cdots - \frac{b_{r-1}}{x^{r-1}}\right), \cdots. \end{cases}$$

1) Man kann aber nicht allgemein behaupten, daß, wenn $f(x)$ eine asymptotische Darstellung besitzt, auch $f'(x)$ eine solche zuläßt.

Aus (1) folgt nach dem letzten Satze in Art. 221[1]):

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = \lim\limits_{x=\infty} f'(x), \quad 0 = \lim\limits_{x=\infty} (f(x) - a_0 + xf'(x)) = \lim\limits_{x=\infty} xf'(x), \\ 0 = \lim\limits_{x=\infty} \left[2x\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right) + x^2\left(f'(x) + \frac{a_1}{x^2}\right)\right] = \\ \quad = \lim\limits_{x=\infty} \left[2x\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right) + x^2 f'(x) + a_1\right], \cdots, \\ 0 = \lim\limits_{x=\infty} \left[rx^{r-1}\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \cdots - \frac{a_{r-1}}{x^{r-1}}\right) + \right. \\ \quad \left. + x^r\left(f'(x) + \frac{a_1}{x^2} + \frac{2a_2}{x^3} + \cdots + \frac{(r-2)a_{r-2}}{x^{r-1}}\right) + (r-1)a_{r-1}\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Daraus ergibt sich zunächst durch Vergleich mit (2):

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -a_1.$$

Wir wollen beweisen, daß allgemein:

$$(4)\qquad b_r = -(r-1)a_{r-1}.$$

Da die Formel für $r = 2$ gültig ist, so können wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden, indem wir die Formel für jeden Index als richtig voraussetzen, der kleiner ist als ein bestimmter Index r, und beweisen, daß sie dann auch für r gültig ist.

Aus der letzten Formel in (3) erhält man mit Rücksicht auf (1), (2) und auf die soeben gemachte Voraussetzung:

$$0 = \lim_{x=\infty} \left[rx^{r-1}\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \cdots - \frac{a_{r-2}}{x^{r-2}}\right) - ra_{r-1}\right.$$

$$\left. + x^r\left(f'(x) - \frac{b_2}{x^2} - \frac{b_3}{x^3} - \cdots - \frac{b_{r-1}}{x^{r-1}}\right) + (r-1)a_{r-1}\right] = b_r + (r-1)a_{r-1},$$

woraus sich (4) ergibt.

Also ist die asymptotische Darstellung von $f'(x)$:

$$-\sum_{h=2}^{\infty} \frac{(h-1)a_{h-1}}{x^h};$$

man erhält sie demnach in der Tat, indem man die asymptotische Darstellung von $f(x)$ gliedweise differentiiert.

1) Die Existenz der in (3) vorkommenden Grenzwerte wird durch die Gleichungen (2) verbürgt.

328. Nach diesen Sätzen können wir die Andeutungen genauer ausführen, die wir oben über die Anwendung der neuen Begriffe auf Differentialgleichungen gemacht haben, welche dank Poincarés Arbeiten in der Mechanik des Himmels zu Ergebnissen von höchster Bedeutung geführt hat.

Es liege eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung vor, und es sei a priori bekannt, daß sie ein Integral besitzt, das zugleich mit seinen Ableitungen 1-ter, 2-ter, ..., n-ter Ordnung einer asymptotischen Darstellung fähig ist. Es läßt sich, im allgemeinen auf mehrere Arten, eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ finden, die formal die Gleichung befriedigt, d. h. die Eigenschaft besitzt, daß man eine Reihe von lauter Nullgliedern erhält, wenn man ebendiese Reihe anstatt y und ihre successiven Ableitungen anstatt $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ einsetzt und die Operationen ausführt, welche die linke Seite der Differentialgleichung vorschreibt. Da nun nach den vorangehenden Sätzen dasselbe Resultat sich ergeben muß, wenn man anstatt y die asymptotische Darstellung des Integrals einführt, und da jede Funktion höchstens eine einzige asymptotische Darstellung besitzt, so folgt, daß eine der gefundenen Reihen die asymptotische Darstellung des Integrals sein muß. Ist die Gleichung im besondern linear mit ganzen rationalen Koeffizienten, so ist die Anzahl der Reihen, die man findet, gleich der Anzahl der verschiedenen Integrale, die einer asymptotischen Darstellung fähig sind, so daß man die asymptotischen Darstellungen aller dieser Integrale erhält.

Die praktische Bedeutung der asymptotischen Reihen besteht ferner darin, daß sie, selbst wenn sie divergent sind, gestatten, die entsprechende Funktion mit um so größerer Annäherung zu berechnen, je größer der Wert der Veränderlichen ist.

329. Der Begriff der Summe einer divergenten Reihe läßt sich noch auf andrem Wege, zunächst für Reihen mit konstanten Gliedern, einführen.

Es liege eine Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h$ vor und es werde, wie üblich:

$$s_0 = a_0, \; s_1 = a_0 + a_1, \cdots, \; s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \cdots$$

gesetzt. Ist die Reihe divergent, während sich die Größe:

$$\frac{1}{n}(s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1})$$

für $\lim n = \infty$ einer bestimmten Grenze s nähert, so kann s die

Summe der Reihe genannt werden. Eine divergente Reihe, für welche die erwähnte Grenze existiert, heißt einfach unbestimmt[1]).

Allgemeiner: Ist:

$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h t^h$$

eine ganze Funktion mit positiven Koeffizienten und nähert sich das Verhältnis:

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h s_h t^h : \sum_{h=0}^{\infty} c_h t^h,$$

während t dem Unendlichen zustrebt, einer bestimmten Grenze s, so heißt die Reihe in bezug auf die Funktion $\varphi(t)$ summierbar und s ihre Summe. Es empfiehlt sich, als Bezugsfunktion $\varphi(t)$ die Exponentialfunktion e^t zu benutzen; alsdann ist die Summe der Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ gegeben durch die Gleichung:

$$s = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s_h t^h}{h!} = \lim_{t=\infty} e^{-t} S(t), \tag{1}$$

falls diese letzte Grenze existiert.

Bilden wir das Integral (Art. 133) der Potenzreihe $S(t)$:

$$V(t) = \int S(t)\,dt = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s_h t^{h+1}}{\overline{h+1}!} = \sum_{h=1}^{\infty} s_{h-1} \frac{t^h}{h!}. \tag{2}$$

Daraus folgt:

$$S(t) - V(t) = s_0 + \sum_{h=1}^{\infty} (s_h - s_{h-1}) \frac{t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h t^h}{h!} = U(t). \tag{3}$$

Aus (1) ergibt sich offenbar, daß $S(t)$, damit die Grenze s existiere, für jeden endlichen Wert von t einen endlichen Wert haben, d. h. eine ganze Funktion sein muß. Dasselbe läßt sich (Art. 133) von $V(t)$ und folglich auch von $U(t)$ behaupten. Die Funktion $U(t)$ heißt die der gegebenen Reihe assoziierte ganze Funktion.

---

1) Cesàro, dem man diese Begriffe verdankt, die dann Borel, wie wir sogleich berichten werden, verallgemeinert hat, beweist, daß das Produkt zweier konvergenten Reihen eine konvergente oder einfach unbestimmte Reihe ist und daß in beiden Fällen die Summe der Produktreihe das Produkt der Summen der Faktorreihen ist.

Aus (2), (3) folgt:

$$S'(t) - V'(t) = S'(t) - S(t) = U'(t) = U'(t) - U(t) + U(t)$$

und, indem mit e^{-t} multipliziert wird:

$$e^{-t}(S'(t) - S(t)) = e^{-t}(U'(t) - U(t)) + e^{-t}U(t). \tag{4}$$

Wir bemerken, daß $e^{-t}(S'(t) - S(t))$ die Ableitung von $e^{-t}S(t)$ und $e^{-t}(U'(t) - U(t))$ die Ableitung von $e^{-t}U(t)$ ist, ferner, daß man für $t = 0$ hat:

$$e^{-t}S(t) = s_0 = a_0, \quad e^{-t}U(t) = a_0;$$

nehmen wir dann auf beiden Seiten von (4) das Integral, so erhalten wir:

$$e^{-t}S(t) = e^{-t}U(t) + \int_0 e^{-t}U(t)\,dt,$$

mithin wegen (1):

$$s = \lim_{t=\infty}\left[e^{-t}U(t) + \int_0 e^{-t}U(t)\,dt\right]. \tag{5}$$

Da nun die Funktion $e^{-t}S(t)$ einer endlichen Grenze zustrebt, so nähert sich ihre Ableitung, wenn sie überhaupt eine Grenze besitzt, der Null (Art. 221), d. h. es ist:

$$\lim_{t=\infty}[e^{-t}S'(t) - e^{-t}S(t)] = 0$$

oder auch:

$$\lim_{t=\infty} e^{-t}S'(t) = \lim_{t=\infty} e^{-t}S(t) = s, \tag{6}$$

sobald $\lim\limits_{t=\infty} e^{-t}S'(t)$ existiert.

Existiert $\lim\limits_{t=\infty}\int_0 e^{-t}U(t)\,dt$, und wird dieser Grenzwert mit σ bezeichnet, so folgt aus (5):

$$\lim_{t=\infty} e^{-t}U(t) = s - \sigma,$$

also (Art. 221) $s - \sigma = 0$ oder:

$$\lim_{t=\infty} e^{-t}U(t) = 0, \qquad s = \lim_{t=\infty}\int_0 e^{-t}U(t)\,dt,$$

was sich nach den in der Integralrechnung üblichen Bezeichnungen schreiben läßt:

$$s = \int_0^\infty e^{-t}U(t)\,dt. \text{ [1]}$$

---

1) Le Roy hat eine Definition der Summierbarkeit aufgestellt, die nur

330. Sind $\sum_{h=0}^{\infty} a_h'$, $\sum_{h=0}^{\infty} a_h''$ zwei summierbare Reihen und s', s'' ihre Summen, so ist auch die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (C' a_h' + C'' a_h''),$$

wo C', C'' zwei beliebige Konstanten sind, summierbar, und ihre Summe ist:

$$C's' + C''s''.$$

Wir ersparen uns den überaus einfachen Beweis.

331. Eine konvergente Reihe ist summierbar, und ihre Summe stimmt mit der im gewöhnlichen Sinne verstandenen Summe überein.

Ist σ die Summe der konvergenten Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$, so kann man eine Zahl n von der Art angeben, daß für jedes $h > n$:

$$\sigma - \varepsilon < s_h < \sigma + \varepsilon$$

---

scheinbar von der hier gegebenen verschieden ist. Er sagt, eine Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ sei summierbar, wenn sich die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{h!}\, \Gamma(hz + 1),$$

wo Γ das bekannte Eulersche Integral 2ter Art:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{u-1} dt$$

ist, einer bestimmten Grenze s nähert, während sich z in zunehmendem Sinne der Eins nähert; und ebendiese Grenze nennt er Summe der Reihe.

Nun ist:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{h!}\, \Gamma(hz + 1) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{h!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{hz} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h t^{hz}}{h!}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t}\, U(t^z)\, dt,$$

mithin, unter gewissen beschränkenden Umständen:

$$\lim_{z=1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{h!}\, \Gamma(hz + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, U(t)\, dt = s;$$

die beiden Definitionen fallen demnach zusammen.

wird, wenn ε willkürlich gegeben ist. Man hat alsdann:

$$\sum_{h=0}^{n} \frac{s_h t^h}{h!} + (\sigma - \varepsilon) \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{t^h}{h!} < S(t) < \sum_{h=0}^{n} \frac{s_h t^h}{h!} + (\sigma + \varepsilon) \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{t^h}{h!},$$

oder auch:

$$e^{-t} \sum_{h=0}^{n} (s_h - \sigma + \varepsilon) \frac{t^h}{h!} + (\sigma - \varepsilon) < e^{-t} S(t) <$$

$$< e^{-t} \sum_{h=0}^{n} (s_h - \sigma - \varepsilon) \frac{t^h}{h!} + (\sigma + \varepsilon);$$

erinnert man sich (Art. 146), daß sich das Produkt von e^{-t} in ein Polynom für $\lim t = \infty$ der Null nähert, so ergibt sich daraus:

$$\sigma = \lim_{t=\infty} e^{-t} S(t) = s.$$

Im besondern gilt der Satz: Eine aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehende Reihe darf als eine summierbare Reihe betrachtet werden, und ihre Summe ist die Summe ihrer Glieder.

332. Eine eigentlich divergente (d. h. weder konvergente noch unbestimmte) Reihe ist nicht summierbar.

Nimmt man eine willkürliche Größe K an, so läßt sich, der Voraussetzung $\lim_{n=\infty} s_n = \infty$ gemäß, eine Zahl n von der Art finden, daß $s_h > K$ für jedes $h > n$ ist. Schreibt man:

$$s_h = K + r_h \qquad (h > n),$$

wo die r_h positiv sind, so hat man:

$$S(t) = \sum_{h=0}^{n} \frac{s_h t^h}{h!} + K \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{t^h}{h!} + \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{r_h t^h}{h!}$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \frac{(s_h - K) t^h}{h!} + K e^t + \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{r_h t^h}{h!},$$

mithin, wenn man beachtet, daß sich das Produkt von e^{-t} in ein Polynom für $\lim t = \infty$ der Null nähert:

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} S(t) = K + \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{r_h t^h}{h!},$$

woraus wegen $r_h > 0$ folgt:

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} S(t) \geqq K.$$

Damit ist die Behauptung erwiesen.

333. Ist die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ summierbar und besitzt sie die Summe s, und ist auch die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ summierbar, so ist die Summe dieser letzteren Reihe $s - a_0$.

Schreiben wir die zweite Reihe in der Form:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h$$

und setzen wir allgemein:

$$\sum_{h=0}^{n} \bar{a}_h = \bar{s}_n,$$

so erhalten wir:

$$\bar{a}_h = a_{h+1}, \quad \bar{s}_n = s_{n+1} - a_0,$$

mithin:

$$\bar{S}(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\bar{s}_h t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s_{h+1} t^h}{h!} - a_0 e^t = S'(t) - a_0 e^t,$$

woraus sich ergibt:

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \bar{S}(t) = \lim_{t=\infty} e^{-t} S'(t) - a_0.$$

Da die erste Grenze existiert, so existiert auch die zweite, und der Wert dieser letzteren ist s (Art. 329, (6)). Es folgt also:

$$\bar{s} = s - a_0 \text{ [1]}.$$

334. Wir schließen zum Zwecke der Erläuterung einige einfache Beispiele an:

1) Betrachten wir die Reihe:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

---

1) Borel (50) hat nachzuweisen versucht, daß aus der Summierbarkeit von $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ die von $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ folgt; aber Hardy (565) bemerkt dazu, daß der Beweis nicht stichhaltig ist, ja noch mehr, daß der Satz nicht allgemein gilt. Er beweist dagegen, daß aus der Summierbarkeit der zweiten Reihe die der ersten folgt.

so haben wir:

$$s_{2n+1} = 0, \quad s_{2n} = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

mithin:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}\right] = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

und folglich:

$$s = \lim_{t=\infty} e^{-t} S(t) = \lim_{t=\infty} \frac{1 + e^{-2t}}{2} = \frac{1}{2}.$$

2) Betrachten wir die Reihe:

$$1 - m + m^2 - m^3 + \cdots,$$

wo $m > -1$, so haben wir:

$$s_h = \frac{1 + (-m)^{h+1}}{1 - m},$$

mithin:

$$S(t) = \frac{1}{1-m}\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} - m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-mt)^h}{h!}\right] = \frac{1}{1-m}\left[e^t - m\, e^{-mt}\right]$$

und daher:

$$s = \lim_{t=\infty} e^{-t} S(t) = \frac{1}{1-m} \lim_{t=\infty} \left(1 - m e^{-(m+1)t}\right) = \frac{1}{1-m}.$$

Im besondern ist die Reihe für $-1 < m < 1$ konvergent und s ihre Summe im gewöhnlichen Sinne des Wortes.

335. Es liege jetzt eine Potenzreihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ vor; man nehme einen Kreis, der durch den Anfangspunkt O hindurchgehen und in dem Existenzbereich der durch die Potenzreihe erzeugten analytischen Funktion $f(x)$ liegen möge. Dann ist die Reihe, auch wenn dieser Kreis über den Konvergenzkreis der Potenzreihe hinausreicht, in allen Punkten des von O ausgehenden Durchmessers desselben summierbar.

Es sei OM dieser Durchmesser, C der Mittelpunkt des Kreises; c sei die durch den Punkt C dargestellte Größe. Wir schreiben:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad \mathfrak{P}(x|c) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h (x - c)^h,$$

wo $\mathfrak{P}(x|c)$ mittelbar oder unmittelbar aus $\mathfrak{P}(x)$ durch Transformation

entstanden sein möge. Da der Kreis um C mit dem Radius CO vollständig innerhalb des Existenzbereiches von $f(x)$ liegt, so enthält der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|c)$ in seinem Innern den Punkt O, und wir können mithin aus $\mathfrak{P}(x|c)$ unmittelbar $\mathfrak{P}(x|c,0)$ herleiten.

Setzt man $\overline{OC} = r$, so läßt sich mit einem Radius $r' > r$ um C ein Kreis beschreiben, der vollständig innerhalb des Existenzbereiches von $f(x)$ enthalten ist; bezeichnet man mit x einen Punkt im Innern dieses Kreises, mit $\mathfrak{M}$ den auf den Umfang ebendieses Kreises bezogenen Mittelwert, so ist (Art. 131, 135):

$$\mathfrak{P}(x|c) = \mathfrak{M}\frac{r'f(r')}{r'-(x-c)}, \quad \frac{1}{h!}\mathfrak{P}^{(h)}(x|c) = \mathfrak{M}\frac{r'f(r')}{[r'-(x-c)]^{h+1}}.$$

Im besondern hat man für $x = 0$:

$$\mathfrak{P}(0|c) = \mathfrak{M}\frac{r'f(r')}{r'+c}, \quad \frac{1}{h!}\mathfrak{P}^{(h)}(0|c) = \mathfrak{M}\frac{r'f(r')}{(r'+c)^{h+1}}.$$

Indem man diese Werte in die Formel (Art. 147):

$$\mathfrak{P}(x|c,0) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\mathfrak{P}^{(h)}(0|c)x^h$$

einsetzt und erwägt, daß (Art. 150) $\mathfrak{P}(x|c,0)$ mit $\mathfrak{P}(x)$ zusammenfallen muß, erhält man:

$$a_h = \mathfrak{M}\frac{r'f(r')}{(r'+c)^{h+1}}.$$

Die der Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ assoziierte ganze Funktion ist:

$$U(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{a_h x^h t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{x^h t^h}{h!}\mathfrak{M}\frac{r'f(r')}{(r'+c)^{h+1}} =$$

$$= \mathfrak{M}\left[\frac{r'f(r')}{r'+c}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{x^h t^h}{h!(r'+c)^h}\right] = \mathfrak{M}\left[\frac{r'f(r')}{r'+c}e^{\frac{xt}{r'+c}}\right],$$

mithin:

$$e^{-t}U(x,t) = \mathfrak{M}\left[\frac{r'f(r')}{r'+c}e^{t\left(\frac{x}{r'+c}-1\right)}\right].$$

Ist:

(1) $$\mathfrak{R}\frac{x}{r'+c} < 1-\varepsilon,$$

wo ε beliebig klein ist, so folgt leicht, daß:

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} U(x,t) = 0$$

und daß $\lim_{t=\infty} \int\limits_0 e^{-t} U(x,t)\,dt$ einen endlichen Wert hat.

Erinnern wir uns, daß in den vorstehenden Formeln das unter dem Funktionszeichen $\mathfrak{M}$ stehende r' irgend einen der Punkte der Kreislinie vom Radius r' um C, auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt bezogen, darstellt, so folgt, daß $r' + c$ den irgend einem Punkte K dieser Kreislinie entsprechenden Wert darstellt. Setzt man also:

$$x = \xi e^{i\varphi}, \quad r' + c = \eta e^{i\psi},$$

so wird aus (1) für ein beliebig kleines ε:

$$\frac{\xi}{\eta} \cos(\varphi - \psi) < 1 - \varepsilon,$$

oder auch:

$$\xi \cos(\varphi - \psi) < \eta.$$

Ist also P der einem Werte x entsprechende Punkt, HL die durch K senkrecht zu OK gezogene Gerade, so muß sich P mit O auf derselben Seite der Geraden HL befinden.

Denken wir uns durch alle Punkte der Kreislinie um C mit dem Radius r' sämtliche zu HL analogen Geraden gezogen, so hüllen alle diese Geraden[1]) eine Ellipse ein, deren Mittelpunkt C und deren einer Brennpunkt O ist; damit also (1) von allen Punkten K befriedigt wird, muß sich P im Innern dieser Ellipse befinden. Nun enthält diese Ellipse, um wie wenig sich auch r' von r unterscheidet, doch stets die Strecke OM in ihrem Innern, mithin ist bewiesen, daß in allen Punkten dieser Strecke die betrachtete Reihe summierbar ist.

336. Besitzt eine analytische Funktion einen einzigen singulären Punkt, so ist die Potenzreihe, durch die sie in der Umgebung des Anfangspunktes dargestellt wird, in allen Punkten der Ebene summierbar, die sich auf derselben Seite wie der Anfangspunkt in bezug auf die Gerade befinden, die im singulären Punkte auf seiner Verbindungslinie mit dem Anfangspunkt senkrecht steht.

Sind die singulären Punkte in endlicher Anzahl vorhanden, so erhält man dadurch, daß man die vorige Konstruktion für jeden einzelnen von ihnen ausführt, ein endliches oder nicht endliches Polygon, das den Anfangspunkt enthält und in dessen sämtlichen Punkten die Reihe summierbar ist. Es wird das Summierbarkeitspolygon der Reihe genannt.

1) S. z. B. Enzyklopädie der math. Wiss., III C1, Nr. 30

Über den Begriff der analytischen Fortsetzung[1]).

337. Ist eine analytische Funktion in einem Bereiche C regulär und sind alle Punkte des Umfangs l für sie singuläre Punkte, so kann die Funktion nicht über die geschlossene Linie l hinaus fortgesetzt werden. Liegt andrerseits ein arithmetischer Ausdruck vor, der in zwei, etwa durch eine geschlossene Linie l getrennten Bereichen A, B konvergiert, und sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ die analytischen Funktionen, welche denselben beziehentlich in den beiden Bereichen darstellen, so würde man versucht sein, die eine der Funktionen als die analytische Fortsetzung der andern über die Linie l hinweg aufzufassen. Allerdings haben wir gesehen, daß sich, wenn man die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ in durchaus willkürlicher Weise annimmt, stets ein arithmetischer Ausdruck finden läßt, den sie in A bezw. B darstellen, so daß es nicht angebracht erscheint, von zwei Funktionen, zwischen denen kein Zusammenhang besteht, die eine die Fortsetzung der andern zu nennen. Nichtsdestoweniger darf man fragen, ob sich nicht, wenn man einen arithmetischen Ausdruck zweckmäßigen einschränkenden Bedingungen unterwirft, zwischen den ihn in getrennten Bereichen darstellenden analytischen Funktionen notwendige Beziehungen ergeben, so daß die einen mit einem gewissen Rechte als analytische Fortsetzungen der andern betrachtet werden dürfen. Borel hat diese Frage folgendermaßen behandelt.

338. Vorausgesetzt, daß die Summanden eines arithmetischen Ausdruckes in einfache Brüche zerlegt sind und daß die Reihe dadurch nicht aufhört, konvergent zu sein, so läßt sich als die allgemeine Form eines arithmetischen Ausdruckes die folgende annehmen:

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}},$$

wo die c_h nicht sämtlich verschieden zu sein brauchen.

Wir wollen $F(x)$ folgenden Bedingungen unterwerfen:

Die ganzen und positiven Zahlen m_h sollen ein endliches Maximum m besitzen;

die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|$ soll konvergent sein;

---

1) Borel 46, 51, 52, 56, 58, 63, 64, 68, 69, 77, 78, Fabry 148, 151, Goursat 172, Hadamard 184, Hill 570, 571 bis, von Koch 582, Krygowski 235, Lindelöf 274, 276, 590, Painlevé 346, 349, Picard 373, Pompeiu 401.

die Menge I der Punkte c_h soll auf einer geschlossenen Linie l liegen und auf dieser ganzen Linie überall dicht sein[1]).

Bezeichnen wir durch A, B den Innen- bezw. Außenraum der Linie l. A' sei irgend ein Bereich innerhalb A, δ die untere Grenze der Abstände der Punkte des Bereiches A' von l. Nehmen wir nun eine positive Größe ε an, die zugleich kleiner als 1 und als δ sein möge, so erhalten wir für alle Punkte x des Bereiches A' und für jeden Wert von h:

$$|x - c_h| > \varepsilon,$$

folglich:

$$|x - c_h|^{m_h} > \varepsilon^{m_h}$$

und, weil $m_h \leqq m$, $\varepsilon < 1$:

$$|x - c_h|^{m_h} > \varepsilon^{m}.$$

Daraus folgt für alle Punkte x von A' und für jeden beliebigen Wert von p:

$$\left|\sum_{h=p+1}^{\infty} \frac{a_h}{(x-c_h)^{m_h}}\right| < \frac{1}{\varepsilon^m} \sum_{h=p+1}^{\infty} |a_h|;$$

nimmt man aber σ willkürlich an, so läßt sich n immer so wählen, daß:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h| < \sigma \varepsilon^m$$

ist; folglich hat man für alle Punkte des Bereiches A':

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{a_h}{(x-c_h)^{m_h}}\right| < \sigma,$$

und die Reihe (1) ist in jedem Bereiche A' innerhalb A gleichmäßig konvergent.

Auf dieselbe Weise würde man zeigen, daß sie in jedem Bereiche B' innerhalb B gleichmäßig konvergiert.

Es sei nun d ein Punkt von l, der mit keinem der Punkte c zusammenfallen möge. Wir beschreiben, wenn dies möglich ist, in dem Bereiche A einen Kreis, der l in d berührt und weder in seinem Innern noch auf seinem Umfange einen zweiten Punkt von l enthält;

1) Man kann auch zulassen, daß es Punkte c_h gebe, die nicht auf l fallen, wenn nur die Häufungsstellen der Menge dieser Punkte nicht auf l fallen und weder Flächen noch Linien bilden. Das würde in den folgenden Erörterungen nur geringfügige Änderungen nach sich ziehen.

es sei x_0 der Mittelpunkt, ϱ der Radius dieses Kreises. Wählt man die Zahl n wie oben und bezeichnet η eine positive Größe, die zugleich kleiner als 1 und als der kleinste Abstand der Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_n$ von der Geraden $x_0 d$ ist, so hat man:

$$\left| \sum_{h=1}^{n} \frac{a_h}{(x_0 - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{S}{\eta^m},$$

wo:

$$S = \sum_{h=1}^{\infty} | a_h |;$$

außerdem ist:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{a_h}{(x_0 - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{\sigma \varepsilon^m}{\varrho^m};$$

folglich ist:

$$| F(x_0) | = \left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x_0 - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{S}{\eta^m} + \frac{\sigma \varepsilon^m}{\varrho^m}$$

und:

$$\varrho^m \, | F(x_0) | < \varrho^m \frac{S}{\eta^m} + \sigma \varepsilon^m.$$

Daraus folgt wegen der Willkürlichkeit von σ:

$$\lim_{\varrho = 0} \varrho^m F(x_0) = 0$$

oder auch:

$$\lim_{x_0 = d} (x_0 - d)^m F(x_0) = 0.$$

Ist dagegen d einer der Punkte c, z. B. c_r, so beweist man mittels der soeben dargelegten Schlußweise, daß:

$$\lim_{x_0 = c_r} (x_0 - c_r)^m \left| F(x_0) - \frac{a_r}{(x_0 - c_r)^{m_r}} \right| = 0$$

oder auch:

$$\lim_{x_0 = c_r} (x_0 - c_r)^m F(x_0) = a_r \lim_{x_0 = c_r} (x_0 - c_r)^{m - m_r};$$

folglich ist die Grenze für $m_r < m$ Null, für $m_r = m$ dagegen a_r.

Nun gibt es sicherlich mindestens einen Wert r, für den $m_r = m$ ist; wir dürfen also behaupten, daß es auf der Linie l mindestens einen Punkt d von der Art gibt, daß, wenn x sich ihm längs der im Bereiche A gezogenen Normalen nähert, das Produkt $(x - d)^m F(x)$ nicht die Null als Grenze hat. Die Grenze dieses Produktes ist a_r, wenn d mit dem Punkte c_r zusammenfällt.

Auch diese Erwägungen bleiben noch immer gültig, wenn man anstatt des Bereiches A den Bereich B in Betracht zieht; ferner sind die Grenzen für ein und denselben Punkt von l dieselben.

339. Hieraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Das Produkt $(x-d)^m F(x)$ nähert sich derselben Grenze, mag sich x einem Punkte d von l längs der Normalen innerhalb A oder innerhalb B nähern; und diese Grenze kann nicht für alle Punkte von l Null sein.

Ist $\lim\limits_{x=d}(x-d)^m F(x) = 0$ für alle Punkte von l, so hat der Ausdruck $F(x)$ den konstanten Wert Null (d. h. er wird durch die konstante analytische Null-Funktion dargestellt), und zwar ebensowohl im ganzen Bereiche A wie im ganzen Bereiche B.

Liegt ein arithmetischer Ausdruck $F(x)$ vor, der in allen Punkten des Bereiches A Null ist, so ist er es auch in allen Punkten des Bereiches B und umgekehrt, weil ja, wenn $F(x)$ in A Null ist, die bewußte Grenze für alle Punkte von l Null ist und folglich $F(x)$ in B Null ist.

Werden zwei arithmetische Ausdrücke $F_1(x)$, $F_2(x)$ von der betrachteten Form durch ein und dieselbe Funktion in A dargestellt, so folgt dasselbe in B.

Sind $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ n arithmetische Ausdrücke von der betrachteten Form, welche durch die analytischen Funktionen:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x); \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$$

in A bezw. B dargestellt werden, und besteht zwischen den f für alle Punkte von A eine Beziehung von der Form:

$$\Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0,$$

wo Φ ein Symbol für eine ganze rationale Funktion ist, so besteht zwischen den φ für alle Punkte von B die Beziehung:

$$\Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = 0.$$

Der arithmetische Ausdruck:

$$\Phi(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)),$$

der von derselben Natur ist wie die F, wird nämlich in A durch die analytische Funktion $\Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, in B durch die analytische Funktion $\Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ dargestellt; ist also eine von ihnen identisch Null, so ist es auch die andre.

Die angeführten Tatsachen zeigen, daß, wenn der in Betracht kommende arithmetische Ausdruck gewissen Beschränkungen unterliegt, die analytischen Funktionen, die ihn in den beiden getrennten Bereichen A, B darstellen, nicht mehr vollständig voneinander unabhängig sind, sondern zwischen ihnen gewisse Beziehungen bestehen; sie zeigen ferner, daß die Produkte der Funktionen in die Entfernung von dem Umfange sich einer und derselben Grenze nähern, mag sich nun der bewegliche Punkt von A oder von B her der Begrenzung nahen. Es besteht sonach über die Linie l hinaus eine Art Stetigkeit, und von den beiden Funktionen darf im weiteren Sinne eine die analytische Fortsetzung der andern genannt werden.

Wir werden weiter unten (Art. 361) sehen, wie es Borel, indem er sich auf die neueren Untersuchungen von Mittag-Leffler stützte, gelungen ist, seine Verallgemeinerung des Begriffs der analytischen Fortsetzung genauer zu fassen.

340. Poincaré hat bemerkt, daß man nicht von der analytischen Fortsetzung über eine geschlossene Linie singulärer Punkte hinaus reden könne, falls man nicht etwa jede beliebige Funktion als analytische Fortsetzung jeder andern ansehen wolle. Ist eine analytische Funktion $f_1(x)$ gegeben, die nur innerhalb einer bestimmten geschlossenen Linie l regulär ist, und nimmt man willkürlich eine analytische Funktion $f_2(x)$ an, die nur außerhalb der Linie l regulär ist, so teilt er diese in zwei Teile l_1 und l_2 und bildet zwei Ausdrücke $F_1(x)$ und $F_2(x)$, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte von l_1, beziehentlich l_2 konvergieren. Der Ausdruck:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

konvergiert in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte von l. Poincaré zeigt, daß $F_1(x)$, $F_2(x)$ so gewählt werden können, daß $F(x)$ innerhalb und außerhalb l durch $f_1(x)$ bezw. $f_2(x)$ dargestellt wird.

Im wesentlichen ist das von Poincaré gewonnene Ergebnis kein andres als das bereits von Weierstraß festgestellte (vgl. Art. 193 ff.). Es erschüttert daher keineswegs die Behauptungen Borels, der nur zeigen will, daß, wenn man den arithmetischen Ausdruck beschränkenden Bedingungen unterwirft, die diesen in getrennten Bereichen darstellenden analytischen Funktionen nicht mehr voneinander unabhängig zu sein brauchen und sich alsdann die einen als die analytischen Fortsetzungen der andern auffassen lassen. — Borels Antwort auf Poincarés Bemerkung ist deshalb interessant, weil sie klarlegt, daß der Begriff der eindeutigen Funktion noch erst vertieft werden muß. Sie besteht in folgendem.

341. Ist $e^y = x$, so pflegt man (Art. 146):

$$y = \lg x$$

zu schreiben. Wird $x = re^{i\varphi}$ gesetzt, so hat man:

$$y = \lg r + i\varphi;$$

da mithin ein und demselben Werte von x unendlich viele, in bezug auf 2π miteinander kongruente Werte von φ entsprechen, so ist y eine unendlich vieldeutige Funktion von x. Beschreibt z. B. der Punkt x in positivem Sinne eine geschlossene Kurve, die den Anfangspunkt umschließt, so nimmt y nicht seinen ursprünglichen Wert wieder an, sondern wächst um $2\pi i$. Beschreibt dagegen der Punkt x eine geschlossene Kurve, die den Anfangspunkt nicht umschließt, und setzt man der Einfachheit wegen voraus, daß sich vom Anfangspunkte aus nur zwei Tangenten an sie ziehen lassen, so nimmt das

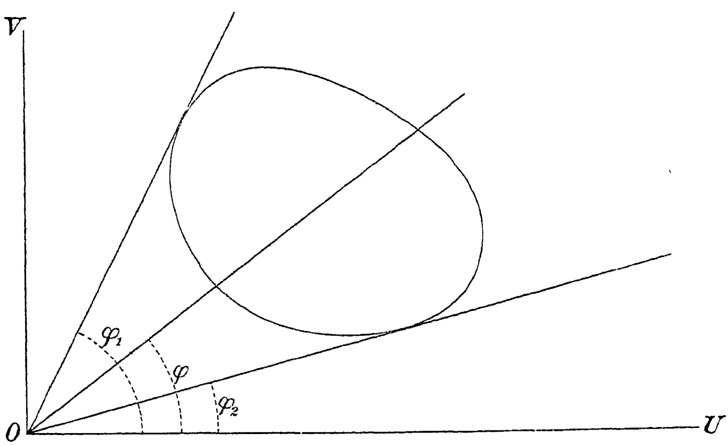

Fig. 6.

Argument φ bis zu einem bestimmten größten Werte φ_1 zu, dann bis zu einem kleinsten Werte φ_2 ab und wächst schließlich von neuem, bis es seinen ursprünglichen Wert wieder annimmt. Dasselbe findet mithin für den imaginären Teil von y statt. Wollen wir daher der Funktion $\lg x$ den Anschein einer eindeutigen Funktion geben, so müssen wir verhindern, daß der bewegliche Punkt geschlossene Kurven um den Anfangspunkt herum durchläuft, indem wir einen künstlichen Schnitt einführen, der von irgend einer Linie gebildet wird, die, ohne sich selbst zu schneiden, vom Anfangspunkte aus nach dem unendlich fernen Punkte läuft. Wir sagen

„einen künstlichen Schnitt“, weil er nicht eine aus singulären Punkten der Funktion bestehende Linie (Unstetigkeitslinie), sondern eine Linie ist, die wir als ihrem Existenzbereiche nicht angehörig betrachten wollen.

Wir wollen mit φ beständig das kleinste positive Argument des Punktes x bezeichnen und festsetzen, daß als Wert der Funktion y in den Punkten oberhalb der reellen Achse genau derjenige gelten soll, in welchem φ das kleinste positive Argument von x ist, was durch folgende Bezeichnung ausgedrückt wird:

$$y = \lg r + i\varphi \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

Wir wählen zunächst als Schnitt den negativen Teil der reellen Achse. Beschreiben wir von einem Punkte x oberhalb der reellen Achse aus um den Anfangspunkt einen Kreisbogen, der den positiven Teil derselben Achse schneidet, so ergibt sich, wenn man mit $x_1 = re^{i\varphi_1}$ einen unterhalb der reellen Achse gelegenen Punkt dieses Kreisbogens bezeichnet, als Wert der Funktion y in x_1:

$$\lg r + i\overline{\varphi}_1,$$

wo $\overline{\varphi}_1$ das numerisch kleinste negative Argument von x_1 ist, d. h.:

$$\lg r + i(\varphi_1 - 2\pi).$$

Bestimmt man also den Schnitt in der angegebenen Weise, so wird die Funktion $\lg x$ eindeutig so definiert:

Ihr reeller Teil ist der arithmetische Logarithmus des absoluten Betrags von x;

Der Koeffizient von i ist für die Punkte oberhalb der reellen Achse das kleinste positive Argument von x, für die Punkte unterhalb dieser Achse das um 2π verminderte kleinste positive Argument, für die Punkte des positiven Teils der reellen Achse Null.

Wir werden diese Funktion mit $\theta_1(x)$ bezeichnen.

Wir wählen jetzt zweitens den positiven Teil der reellen Achse als Schnitt und definieren die Funktion oberhalb dieser Achse wie vorher. Beschreiben wir dann von einem Punkte x oberhalb der reellen Achse aus um den Anfangspunkt einen Kreisbogen, welcher den negativen Teil dieser Achse schneidet, so ergibt sich als Wert der Funktion in dem unterhalb der reellen Achse gelegenen Punkte $x_1 = re^{i\varphi_1}$ dieses Bogens:

$$\lg r + i\varphi_1.$$

In dem vorliegenden Falle wird die Funktion demnach folgendermaßen definiert:

Der reelle Teil ist derselbe wie vorher;

Der Koeffizient von i ist für alle dem Schnitt nicht angehörenden Punkte der Ebene das kleinste positive Argument von x.

Wir werden die so definierte Funktion mit $\theta_2(x)$ bezeichnen.

342. Nach diesen Vorbemerkungen sei $g(x)$ eine ganze Funktion und seien $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei eindeutige analytische Funktionen, die den negativen, beziehentlich positiven Teil der reellen Achse als Unstetigkeitslinien besitzen[1]). Die Funktion:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + g(x)\lg x$$

oder genauer:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + g(x)\,\theta_1(x)$$

ist eindeutig, weil mit der Linie, die wir als künstlichen Schnitt für die Funktion $\theta_1(x)$ gewählt haben, eine Unstetigkeitslinie oder, wie man auch sagen kann, ein natürlicher Schnitt der Funktion $f_1(x)$ zusammenfällt. Mit andern Worten, das Eintreten der Funktion $f_1(x)$, die in den Punkten der negativen reellen Achse nicht regulär ist, hindert den beweglichen Punkt, diese Linie zu überschreiten, und macht es dadurch unmöglich, daß die Vieldeutigkeit der Funktion $\lg x$ zu Tage trete. So kann es vorkommen, daß die Summe einer eindeutigen und einer nicht eindeutigen Funktion doch eine eindeutige Funktion ist.

Dieselben Überlegungen lassen sich auf die Funktion:

$$\varphi_2(x) = f_2(x) - g(x)\,\theta_2(x)$$

anwenden, welche den positiven Teil der reellen Achse zum Schnitt hat.

Die Summe:

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = f_1(x) + f_2(x) + g(x)\,[\theta_1(x) - \theta_2(x)]$$

hat dann die ganze reelle Achse als Schnitt und wird somit oberhalb und unterhalb dieser durch zwei verschiedene analytische Funktionen dargestellt. Es ist nämlich:

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ oberhalb der reellen Achse,} \\ -2\pi i \text{ unterhalb der reellen Achse;} \end{cases}$$

folglich wird $F(x)$ oberhalb der reellen Achse durch die Funktion:

$$f_1(x) + f_2(x),$$

unterhalb der reellen Achse durch die Funktion:

1) Eine solche Funktion haben wir in Art. 318 gebildet.

$$f_1(x) + f_2(x) - 2\pi i g(x)$$

dargestellt. Auch besteht zwischen beiden Funktionen kein Zusammenhang, weil ja $g(x)$ durchaus willkürlich gewählt werden darf.

Das Ergebnis, auf dem Poincaré fußt, verdankt man demnach dem Umstande, daß die Funktionen, auf welche er zurückgeht, allerdings eindeutig sind, es aber erst dadurch geworden sind, daß ein natürlicher Schnitt eines ihrer Summanden mit einem künstlichen eines andern nicht eindeutigen Summanden zusammenfällt.

343. Die paradoxe Tatsache, daß die Summe einer eindeutigen und einer nicht eindeutigen Funktion eine eindeutige Funktion sein kann, zeigt, daß die gewöhnliche Definition der Eindeutigkeit modifiziert werden muß.

Borel schlägt folgende Definition vor:

$F(x)$ sei ein arithmetischer Ausdruck, I die Menge der Pole seiner Glieder. Die $F(x)$ in einem bestimmten zusammenhängenden Bereiche C darstellende analytische Funktion $f(x)$ heißt dann eindeutig, wenn man zwei beliebige Punkte des Bereiches, die weder I noch I' angehören, durch eine keinen Punkt von I enthaltende Linie verbinden kann, auf welcher die Reihe $F(x)$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert.

Der arithmetische Ausdruck $F(x)$ habe wiederum die Form:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}}, \tag{1}$$

und es sei nicht nur $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|$ konvergent, sondern es lasse sich eine Folge von positiven Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ von der Art finden, daß $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$ und $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\varepsilon_h^{m_h}}$ konvergieren[1]). Wir wählen dann eine Zahl n so, daß:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \varepsilon_h < \frac{\sigma}{2}, \quad \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\varepsilon_h^{m_h}} < \sigma, \tag{2}$$

wird, wo σ eine willkürliche positive Größe ist.

Nehmen wir zwei beliebige Punkte p, q an, die weder der Menge I der Punkte c_h noch ihrer Ableitung I' angehören, so können

1) Ist z. B. $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|^{\frac{1}{m_h+1}}$ konvergent, so genügt es, $\varepsilon_h = |a_h|^{\frac{1}{m_h+1}}$ zu setzen.

wir um sie herum zwei Kreise γ, δ mit so kleinem Radius ϱ beschreiben, daß sie keinen Punkt von I oder von I' enthalten. Es sei l der Ort der Mittelpunkte der durch die Punkte p, q hindurchgehenden Kreise, e_h der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte p, q, c_h hindurchgeht. Auf der Geraden l nehmen wir für jeden Punkt e_h, für den $h > n$, eine symmetrische Umgebung η_h von der Länge $2\varepsilon_h$ an; wegen der ersten Ungleichung (2) ist die Summe dieser Umgebungen $2\sum_{h=n+1}^{\infty}\varepsilon_h < \sigma$, und folglich kann eine auf l beliebig angenommene Strecke st von einer Länge $> \sigma$ von den Strecken η_h nicht vollständig bedeckt werden. Zur Vereinfachung des Gedankenganges nehmen wir s und t in gleichem Abstande von dem Schnitt-

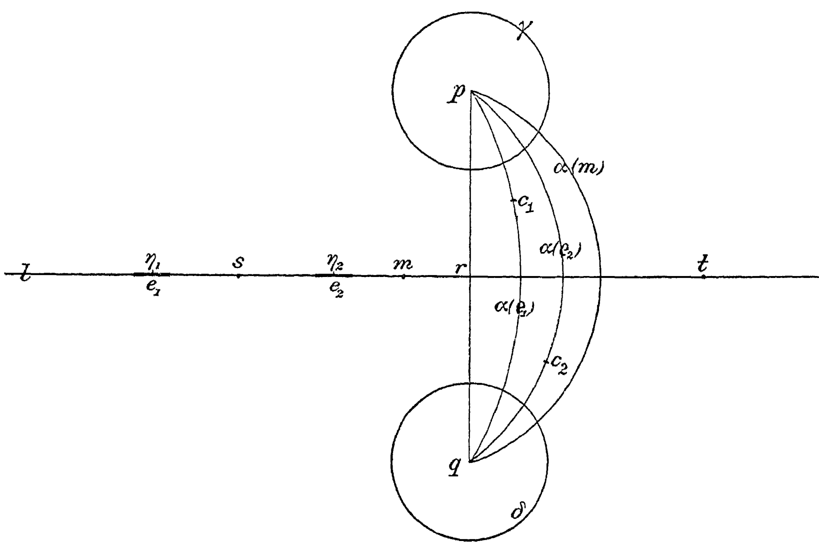

Fig. 7

punkte r der Geraden l mit pq. Es sei ferner m ein Punkt auf l, der außerhalb aller Strecken η_h $(h > n)$ liegen und mit keinem der Punkte $e_1, e_2, \ldots, e_n$ zusammenfallen möge; der Kreisbogen $\alpha(m)$ um m, der durch p und q hindurchgeht, enthält dann keinen der Punkte c_h, und die Abstände seiner Punkte von den Punkten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ besitzen dann ein positives Minimum θ. Bezeichnen wir ferner mit $\alpha_1(m)$ den außerhalb der Kreise γ, δ liegenden Teil von $\alpha(m)$, und in analoger Weise mit $\alpha(e_h)$ und $\alpha_1(e_h)$ den Bogen pq mit dem Mittelpunkt e_h und den außerhalb der Kreise γ, δ liegenden Teil desselben,

endlich mit d den Abstand irgend eines Punktes des Bogens $\alpha(m)$ von irgend einem Punkte des Bogens $\alpha_1(e_h)$, so hat man:

$$d \geqq \tau \cdot m e_h\ ^{1)},$$

1) Um diese Behauptung Borels zu rechtfertigen, bedarf es einer ziemlich weitläufigen Darlegung, die wir unter den Text setzen, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen.

Ist u ein Punkt der Strecke sr, so wollen wir zuvörderst eine untere Grenze für den kleinsten Abstand des Bogens $\alpha(u)$ von $\alpha_1(s)$ auffinden. Wir bezeichnen mit i, v die Schnittpunkte von $\alpha(s)$, bez. $\alpha(u)$ mit rt, mit j, w ihre Schnittpunkte mit dem Kreise γ. Da der Bogen ij kürzer ist als der Bogen vw und überdies einem Kreise mit größerem Radius angehört, so ist $\sphericalangle ipj < \sphericalangle vpw$ und folglich:

$$\sphericalangle ipv < \sphericalangle jpw.$$

Nun ist:

$$jw = 2\varrho \sin \tfrac{1}{2} jpw > \varrho \sin jpw,$$

folglich um so mehr:

$$jw > \varrho \sin ipv.$$

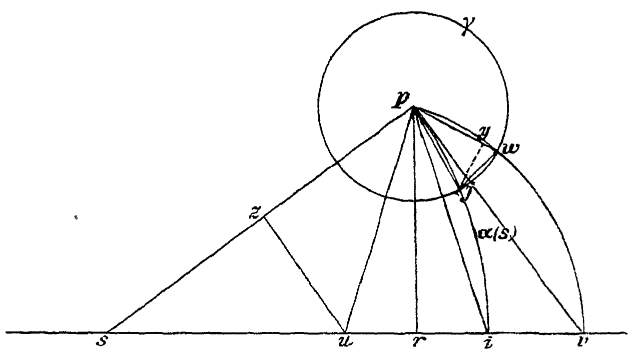

Fig 8

Man hat aber:

$$\sin ipv = \sin rpv \cos rpi - \cos rpv \sin rpi = \frac{rp(rv - ri)}{pv \cdot pi} = \frac{rp \cdot iv}{pv \cdot pi},$$

also, da $pv \leqq rp\sqrt{2} < 2rp$:

$$\sin ipv > \frac{iv}{2pi}.$$

Nun ist:

$$iv = su + uv - si = su - (sp - up);$$

zieht man von u aus uz senkrecht zu sp, so ist $zp < up$, folglich:

$$sz > sp - up;$$

außerdem ergibt sich wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke szu, srp:

$$\frac{sz}{su} = \frac{sr}{sp},$$

wo τ eine positive Konstante ist, die von der Lage der Punkte p, q, s, t und dem Radius ϱ der Kreise γ, δ abhängt und die wir übrigens kleiner als 1 voraussetzen dürfen. — Ist demnach x ein Punkt des Bogens $\alpha(m)$, so hat man, wenn man bedenkt, daß c_h auf $\alpha_1(e_h)$ liegt:

$$\text{für } h \leqq n, \qquad |x - c_h| \geqq \theta;$$
$$\text{für } h > n, \qquad |x - c_h| \geqq \tau \cdot me_h > \tau \cdot \varepsilon_h.$$

Daraus folgt zunächst:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{|a_h|}{|x-c_h|^{m_h}} \leqq \sum_{h=1}^{n} \frac{|a_h|}{\theta^{m_h}},$$

---

folglich:

$$iv > su - sz = su\left(1 - \frac{sr}{sp}\right) = su\,\frac{ri}{sp}$$

und:

$$\sin ipv > \frac{ri}{2sp \cdot pi}\,su,$$

woraus sich schließlich ergibt:

$$jw > \frac{\varrho \cdot ri}{2sp \cdot pi}\,su.$$

Der kleinste Abstand ξ des Bogens $\alpha(u)$ von $\alpha_1(s)$ geht sicher durch j hindurch und liegt zwischen jw und jp; er ist offenbar großer als der Abstand jy des Punktes j von der Geraden pw. Nun ist:

$$jy = jw \cos yjw = jw \cos \tfrac{1}{2} jpw,$$

ferner:

$$jpw + rpj < \frac{\pi}{2},$$

folglich:

$$jy > jw \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,rpj\right) = jw \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,rpj\right) > jw \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,rpi\right)$$

und schließlich:

$$\xi > jy > \frac{\varrho \cdot ri \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,rpi\right)}{2sp \cdot pi}\,su.$$

Setzen wir:

$$\tau = \frac{\varrho \cdot ri \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,rpi\right)}{2sp \cdot pi},$$

so ist:

$$\xi > \tau \cdot su.$$

Die Größe τ hängt lediglich von der Lage der Punkte p, q, von der Länge der Strecke st (die als symmetrisch zu r vorausgesetzt war) und von dem Radius der Kreise γ, δ ab; dagegen ist sie von der Lage des Punktes u unabhängig.

Werden nun auf der Strecke st zwei Punkte s', u' so genommen, daß $s'u'$ zu su gleich und gleichgerichtet ist, so ist offenbar der kleinste Abstand des Bogens $\alpha(u')$ von $\alpha_1(s')$ größer als derjenige des Bogens $\alpha(u)$ von $\alpha_1(s)$; er wird folglich größer sein als $\tau \cdot s'u'$, w. z. b. w.

was eine endliche und bestimmte Größe ist; außerdem ist mit Rücksicht auf die zweite Ungleichung (2), wenn m wieder das Maximum aller m_h ist (Art. 338):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{|x-c_h|^{m_h}} \leqq \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\tau^{m_h}\,\varepsilon_h^{m_h}} \leqq \frac{1}{\tau^m} \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\varepsilon_h^{m_h}} < \frac{\sigma}{\tau^m}.$$

Mithin ist (1) auf dem ganzen Bogen $\alpha(m)$ unbedingt und gleichmäßig konvergent. Man darf daher allgemein sagen, daß die Reihe (1) auf jedem Bogen pq, der durch keinen der Punkte c_h geht, unbedingt und gleichmäßig konvergiert.

Nehmen wir an, die Punkte c_h seien auf der ganzen geschlossenen Linie l überall dicht, so wird $F(x)$ in dem Innengebiete A und dem Außengebiete B derselben durch zwei verschiedene analytische Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ dargestellt. Im Sinne der neuen Definition bilden aber $f_1(x)$ und $f_2(x)$ nur eine einzige eindeutige Funktion, weil sich ja, wenn beziehentlich in A, B zwei beliebige Punkte angenommen werden, stets unendlich viele, diese beiden Punkte verbindende und durch keinen Punkt c_h gehende Kreisbögen finden lassen, und auf jedem dieser Bögen $F(x)$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert.

344. Wir zeigen nun, daß es nach der neuen Definition nicht vorkommen kann, daß die Summe einer eindeutigen und einer nicht eindeutigen Funktion eine eindeutige Funktion ist.

Wir greifen auf die bereits betrachtete Funktion:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + g(x)\theta_1(x)$$

zurück, die den negativen Teil der reellen Achse zum Schnitt hat. Sind p, q zwei Punkte, der eine oberhalb, der andre unterhalb der reellen Achse, so kann es geschehen, daß $f_1(x)$ auf bestimmten Kreisbögen pq, welche die negative reelle Achse schneiden, stetig ist; das kommt vor, wenn $f_1(x)$ einen arithmetischen Ausdruck von der von uns betrachteten Form darstellt, weil es dann, da die Punkte c_h eine abzählbare Menge bilden, unendlich viele Bögen pq gibt, welche die negative reelle Achse in Punkten schneiden, die von diesen Punkten verschieden sind. Gleichwohl ist, welches auch der in Betracht kommende Kreisbogen ist, wenn er nur die negative reelle Achse überschreitet, die Funktion $\lg x$ oder genauer $\theta_1(x)$ auf ihm nicht stetig, da man ja, wenn ε eine beliebig kleine positive Größe bezeichnet, in einem Punkte $x = re^{i(\pi-\varepsilon)}$:

$$\theta_1(x) = \lg r + i(\pi - \varepsilon),$$

in einem Punkte $x = re^{i(\pi+\varepsilon)}$ aber:

$$\theta_1(x) = \lg r + i(-\pi + \varepsilon)$$

erhält, so daß beim Überschreiten der negativen reellen Achse ein Sprung von -2π statthat. Wenn daher ein arithmetischer Ausdruck $F(x)$ vorliegt, der durch die Funktion $\theta_1(x)$ dargestellt wird, so kann diese Funktion auf keinem Bogen pq, der die negative reelle Achse überschreitet, unbedingt und gleichmäßig konvergent sein. Dasselbe läßt sich von einem durch $\varphi_1(x)$ dargestellten arithmetischen Ausdruck sagen; deshalb ist $\varphi_1(x)$ im Sinne der neuen Definition keine eindeutige Funktion.

345. Fabry hat Begriffe aufgestellt, welche denen Borels durchaus ähnlich sind. — Ist d ein Punkt einer Unstetigkeitslinie l einer Funktion $f(x)$, so kann es vorkommen, daß, während x sich d längs einer Linie nähert, die l nicht berührt, $f(x)$ und alle seine Ableitungen sich bestimmten und endlichen Grenzen nähern; in diesem Falle kann man d in dem Sinne einen nicht absolut singulären Punkt nennen, daß, wenn:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}}$$

ein arithmetischer Ausdruck ist, der durch die analytische Funktion $f(x)$ dargestellt wird, d keiner der Punkte c_h ist, sondern nur eine Grenzstelle der Menge dieser Punkte. Es sei demnach l eine geschlossene Linie, welche die Ebene in zwei Bereiche A, B teilt; $f_1(x)$, $f_2(x)$ seien zwei analytische Funktionen, die beziehungsweise in diesen Bereichen existieren. Wenn sich nun, während sich x in der angegebenen Weise einem Punkte d von l nähert, der einer gewissen abzählbaren Punktmenge nicht angehört, die beiden Funktionen und ihre Ableitungen denselben Grenzen nähern, so können die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ als eine einzige Funktion betrachtet werden.

346. Picard behält den Begriff der analytischen Fortsetzung über einen geschlossenen Schnitt hinaus bei, führt diese aber dadurch aus, daß er außerhalb der Ebene der komplexen Variabeln liegende Punkte in Betracht zieht.

Es sei $f(x)$ eine im Innenraume C einer geschlossenen Linie l existierende analytische Funktion. Setzt man $x = u + iv$, so hat man:

$$f(x) = \mu(u, v) + i\nu(u, v),$$

wo $\mu(u, v)$, $\nu(u, v)$ reelle Funktionen der reellen Variablen u, v sind.

Wir versuchen nun eine reelle Funktion dreier reeller Variablen, $\varphi(u, v, w)$, zu bilden, die für $w \neq 0$ und beliebige u und v endlich und stetig ist, sich aber für $w = 0$ und für die Wertepaare u, v, welche den Punkten x des Bereiches C entsprechen, auf $\mu(u, v)$ reduziert. Ist die Funktion $\varphi(u, v, w)$ endlich für $w = 0$ und für alle den Punkten des Außenraumes von l entsprechenden Wertepaare u, v, so bildet die Gesamtheit ihrer Werte für $w = 0$ eine Funktion $\mu_1(u, v)$, die als die analytische Fortsetzung von $\mu(u, v)$ außerhalb der Linie l betrachtet werden kann. Da aber (Art. 160), wenn der reelle Teil einer analytischen Funktion gegeben ist, ihr imaginärer Teil bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, so läßt sich unter gewissen Umständen[1]) in dem Bereiche D eine Funktion $\nu_1(u, v)$ so bestimmen, daß $\mu_1(u, v) + i\nu_1(u, v)$ eine analytische Funktion $f_1(x)$ ist; die willkürliche Konstante wird durch die Bedingung bestimmt, daß, wenn $f(x)$, während sich x in dem Bereiche C einem Punkte d von l nähert, eine bestimmte Grenze hat, $f_1(x)$, während sich x unbegrenzt dem Punkte d im Bereiche D nähert, dieselbe Grenze haben muß.

Es sei z. B. $c_1, c_2, \ldots$ eine abzählbare, auf einer geschlossenen Linie l überall dichte Punktmenge, $f(x)$ die analytische Funktion, die in dem Innengebiete C dieser Linie den arithmetischen Ausdruck:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{x - c_h}$$

darstellt, wo die a_h reelle Zahlen sind. Setzt man $c_h = \alpha_h + i\beta_h$, so hat man innerhalb C:

$$f(x) = F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(u - \alpha_h) + i(v - \beta_h)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h[(u - \alpha_h) - i(v - \beta_h)]}{(u - \alpha_h)^2 + (v - \beta_h)^2},$$

folglich:

$$\mu(u, v) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h(u - \alpha_h)}{(u - \alpha_h)^2 + (v - \beta_h)^2}, \quad \nu(u, v) = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h(v - \beta_h)}{(u - \alpha_h)^2 + (v - \beta_h)^2}.$$

Setzen wir dann:

$$\varphi(u, v, w) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h(u - \alpha_h)}{(u - \alpha_h)^2 + (v - \beta_h)^2 + w^2},$$

---

1) Bekanntlich kann man nicht zu jeder Funktion $\mu_1(u, v)$ eine entsprechende Funktion $\nu_1(u, v)$ angeben; ist das aber möglich, so ist $\nu_1(u, v)$ vollständig bestimmt, wie aus dem Texte erhellt.

so hat $\varphi(u, v, w)$ die verlangten Eigenschaften und kann folglich dazu dienen, die analytische Fortsetzung der Funktion $f(x)$ außerhalb der Linie l zu verwirklichen.

Über die Darstellung einer analytischen Funktion[1]).

347. Die Aufgabe, eine analytische Funktion darzustellen, läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Gegeben ist eine analytische Funktion $f(x)$, deren Existenzbereich C ist; man soll einen arithmetischen Ausdruck $F(x)$ finden, der in allen Punkten des Bereichs C denselben Wert hat wie $f(x)$.

Mittag-Leffler löste die Aufgabe durch den nach ihm benannten Satz, freilich unter einigen Beschränkungen hinsichtlich der Beschaffenheit des Bereichs C oder, was auf dasselbe hinauskommt, hinsichtlich der Beschaffenheit der Menge der singulären Punkte. Ganz allgemeine Lösungen wurden dann von Runge, von Hilbert, von Painlevé und neuerdings von Mittag-Leffler selbst gegeben.

348. Runge stellt zunächst folgenden Satz auf:

Ist P ein zusammenhängender oder nicht zusammenhängender Bereich, Q ein von P getrennter Bereich, $f(x)$ eine analytische Funktion, deren Existenzbereich P enthalten möge, so läßt sich eine rationale Funktion $R(x)$ bilden, so daß $|R(x) - f(x)|$ in allen Punkten von P, $|R(x)|$ aber in allen Punkten von Q kleiner ist als eine vorgegebene Größe σ.

Es sei demnach $f(x)$ eine analytische Funktion, die in einem gegebenen Bereich C regulär sein oder höchstens polare Singularitäten

---

1) Dell'Agnola 2, 3, Borel 46, 50, 52, 55, 69, Bucca 87, Desaints 135, Faber 145, 146, 147, 544bis, Fredholm 159, Goursat 554, Hadamard 184, Hanni 556, 557, Hilbert 205, Kluyver 226, 227, 580, Laurent 242, Leau 245, Mittag-Leffler 307, 314, 318, 320, 321, 323, 324, 326, 327, 328, 602 bis, 603, Montessus de Ballore 605, Mortel 606, Osgood 341, Painlevé 346, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, Phragmén 369, von Puzyna 622, Radelfinger 623, Renaux 425, 426, Runge 435, Vitali 642, 643, 644, Volterra 514, Wiman 654, 655. — Dell' Agnola (3) hat eine Frage behandelt, die in gewissem Sinne die Umkehrung zu der Mittag-Lefflerschen bildet; er hat nämlich gezeigt, daß sich, wenn eine Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h(x) x^h$ gegeben ist, wo die $a_h(x)$ Polynome bezeichnen, ein Stern (vgl. unten Art. 352) mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt bestimmen läßt, in welchem die Reihe konvergiert, und ein zweiter mit dem ersten konzentrischer Stern, der über diesen jedoch nicht hinausreichen darf und die Eigenschaft hat, daß die Reihe in jedem in ihm enthaltenen endlichen Bereiche gleichmäßig konvergiert.

haben möge. Wird der Bereich C als endlich vorausgesetzt (was die Allgemeinheit durchaus nicht beeinträchtigt), so läßt sich eine unendliche Folge von Bereichen $C_1, C_2, \cdots$ bilden, die folgende Eigenschaften haben:

a) Sämtliche Bereiche $C_1, C_2, \cdots$ liegen innerhalb C;

b) C_m liegt innerhalb C_n, sobald $m < n$;

c) Ist ein Punkt x innerhalb C gegeben, so läßt sich eine Zahl n angeben, die so groß ist, daß C_n in seinem Innern x enthält.

Es können dann nach dem soeben ausgesprochenen Satze rationale Funktionen:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$$

gebildet werden, welche die Eigenschaft haben, daß $\varphi_h(x)$ von $f(x)$ innerhalb C_h um weniger als $\frac{1}{h}$ verschieden ist. Alsdann stellt der arithmetische Ausdruck:

$$F(x) = \varphi_1(x) + \sum_{h=1}^{\infty} [\varphi_{h+1}(x) - \varphi_h(x)] = \lim_{h=\infty} \varphi_h(x)$$

die analytische Funktion $f(x)$ im ganzen Bereiche C dar. Es läßt sich nämlich, wenn man in diesem Bereiche einen Punkt x annimmt und eine Größe σ willkürlich wählt, eine Zahl n von der Art finden, daß $\frac{1}{n} < \sigma$ wird und x in dem Bereiche C_n enthalten ist; x ist dann in jedem Bereiche C_h enthalten, für den $h \geqq n$ ist, und man hat $|f(x) - \varphi_h(x)| < \frac{1}{h} \leqq \frac{1}{n} < \sigma$ für jedes $h \geqq n$; folglich ist:

$$f(x) = \lim_{h=\infty} \varphi_h(x)$$

und schließlich:

$$f(x) = F(x).$$

349. Ein weiteres wichtiges Ergebnis, das Runge gewonnen hat, ist folgendes: *Ist ein Bereich C gegeben, welcher der einzigen Bedingung unterliegt, zusammenhängend zu sein, so gibt es stets analytische Funktionen, die C als Existenzbereich besitzen.*

Zum Beweise bildet er auf passende Weise eine Summe unendlich vieler rationaler Funktionen, die in jedem Bereiche innerhalb C gleichmäßig konvergent ist, und zeigt, daß für die diese Summe darstellende analytische Funktion sämtliche Punkte des Umfanges von C wesentlich singuläre Punkte sind.

350. Painlevé und Hilbert sind zu analogen Ergebnissen gelangt wie Runge.

Ist C ein endlicher Bereich, welcher der einzigen Bedingung unterliegt, daß sein Umfang aus einem einzigen Stücke besteht, $f(x)$ eine in C reguläre Funktion, so haben sie bewiesen, daß sich dann eine Reihe von Polynomen finden läßt, die in jedem Bereiche innerhalb C gleichmäßig konvergent ist und in sämtlichen Punkten von C denselben Wert hat wie $f(x)$.

Painlevé hat auch eine Darstellung einer analytischen Funktion mittels eines unendlichen Produktes gegeben:

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{L_h(x)}{M_h(x)} e^{R_h(x)},$$

wo die $L_h(x)$, $M_h(x)$ Polynome, die $R_h(x)$ rationale Funktionen sind.

Diese Darstellungen besitzen eine große Willkürlichkeit; auf der einen Seite bietet das einen Vorteil, weil man über willkürliche Elemente nach eigenem Ermessen gemäß den Zwecken verfügen kann, die man verfolgt, auf der andern einen Nachteil, weil sie oft hindert, die charakteristischen Eigenschaften der dargestellten Funktion aus der Entwicklung selbst abzulesen. Weit geringer ist die Willkürlichkeit in den durch den Satz von Mittag-Leffler vermittelten Entwicklungen, weil sie sich hier auf eine einzige unbestimmte Funktion beschränkt, die überall regulär ist, wo es die gegebene Funktion selbst ist, und außerdem in einer isolierten Menge ihrer singulären Punkte; zugleich läßt die Entwicklung nicht nur eine (abzählbare) Unendlichkeit singulärer Punkte der Funktion, sondern auch die auf diese Punkte bezüglichen Hauptteile der Funktion hervortreten.

351. In seinen neueren Untersuchungen bemerkt Mittag-Leffler, daß in der Weierstraßschen Funktionentheorie ebenso wie bei den üblichen Problemen der Analysis (z. B. bei der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen) eine analytische Funktion durch eins ihrer Elemente (Art. 157) oder, was dasselbe ist, durch die Werte gegeben ist, die sie selbst und alle ihre Ableitungen in einem beliebigen Punkte ihres Existenzbereiches annehmen, so daß es sich empfiehlt, die Aufgabe, um die es sich handelt, in folgender Weise zu formulieren: Es ist eine Folge von Größen $a_0, a_1, a_2, \cdots$ von der Art gegeben, daß die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h t^h$ einen endlichen und von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt; außerdem ist ein

Punkt c gegeben; man soll einen arithmetischen Ausdruck finden, welcher die vom Element $\sum_{h=0}^{\infty} a_h (x-c)^h$ erzeugte analytische Funktion in allen Punkten des größten Bereichs darstellt, in dem sie existiert und eindeutig ist[1]).

352. Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir einige geometrische Betrachtungen vorausschicken.

Man nehme in der Ebene der komplexen Variablen einen Punkt c; es werde dann auf jedem von c ausgehenden Strahl l ein Punkt x_l gewählt, der von c um mehr als eine bestimmte Größe θ entfernt sein möge. Die Größe $|x_l - c|$ läßt sich dann als eine Funktion $\varphi(\lambda)$ des Argumentes λ des Strahles l ansehen. Die so für alle Werte von λ, die nicht kleiner als 0 und kleiner als 2π sind, definierte Funktion $\varphi(\lambda)$ ist reell, positiv und eindeutig; sie kann ∞ zur oberen Grenze haben, während ihre untere Grenze $\geqq \theta$ ist. Ist umgekehrt eine Funktion von solcher Beschaffenheit gegeben, so wird dadurch auf jedem von c ausgehenden Strahl ein Punkt x_l bestimmt. Man sagt, die Menge aller zwischen c und x_l liegenden Punkte der verschiedenen Strahlen l bilde einen Stern mit dem Mittelpunkt c. Die Größe $\varphi(\lambda)$ heißt die Abscisse des Sterns auf dem Strahl vom Argumente λ; die Punkte x_l sind die Ecken des Sterns. Es ist klar, daß ein Stern ein endlicher oder unendlicher zusammenhängender Teil der Ebene ist, der in seinem Innern seinen Mittelpunkt enthält.

Es liege ein Stern E mit dem Mittelpunkt c vor. Nach Annahme einer ganzen positiven Zahl n läßt sich für einen bestimmten Strahl l eine Größe r wählen, die so klein ist, daß jeder Kreis vom Radius r, dessen Mittelpunkt auf l liegt und von c um nicht mehr als $(n-1)r$ entfernt ist, in E liegt[2]). Die Menge aller für einen bestimmten Strahl zulässigen Werte von r hat eine obere Grenze ϱ (die eine Funktion von n und λ ist). Bestimmen wir dann auf jedem Strahl l den von c um $n\varrho$ entfernten Punkt $d = c + n\varrho e^{i\lambda}$, so erhalten wir einen neuen Stern, den wir mit E_n bezeichnen wollen.

Wählt man im besondern $n = 1$, so muß r derartig sein, daß der Kreis vom Radius r um c in E enthalten ist; ϱ ist dann die

1) Während wir bisher gesagt haben, ein arithmetischer Ausdruck werde durch eine analytische Funktion dargestellt, werden wir von nun an, um uns mit den Mittag-Lefflerschen Schriften in Einklang zu setzen, umgekehrt sagen, der Ausdruck stelle die analytische Funktion dar. Es liegt dabei ja nur eine Wortfrage vor, welche das Wesen der Sache keineswegs berührt.

2) Es würde genügen, für alle Radien $r = \dfrac{\theta}{n}$ zu nehmen.

obere Grenze der Radien der in E enthaltenen Kreise um c oder auch die untere Grenze von $\varphi(\lambda)$ und deshalb unabhängig von λ, so daß E_1 ein Kreis vom Radius ϱ um c ist.

Es läßt sich zeigen, daß E_n für jedes n in E_{n+1} enthalten ist. Zerlegen wir nämlich die Strecke cd in n gleiche Teile $c\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}d$ und in $(n+1)$ gleiche Teile $c\beta_1, \beta_1\beta_2, \cdots, \beta_n d$, so liegt jeder Kreis mit dem Radius $\frac{n}{n+1}\varrho$ um einen beliebigen Punkt von $c\beta_n$ innerhalb irgend eines Kreises mit dem Radius ϱ um einen passenden Punkt von $c\alpha_{n-1}$, und somit innerhalb E[1]). Daraus folgt, daß die der Zahl $n+1$ entsprechende Größe r niemals kleiner ist als $\frac{n}{n+1}\varrho$; dasselbe läßt sich mithin von ihrer oberen Grenze behaupten, die wir für den Augenblick mit $\bar{\varrho}$ bezeichnen wollen. Man hat also:

$$(n+1)\bar{\varrho} \geqq n\varrho,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Endlich sind alle E_n in E enthalten. Da nämlich der Kreis um $c+(n-1)re^{i\lambda}$ mit dem Radius r vollständig in E enthalten sein muß, so wird auch der zu ihm gehörige Punkt $c+nre^{i\lambda}$ in E liegen; folglich liegt der Punkt $c+n\varrho e^{i\lambda}$, welcher die Grenzlage dieses Punktes für $\lim r = \varrho$ ist, innerhalb E oder auf der Grenze von E.

Aus dem Sterne E_n können wir n weitere Sterne $E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{nn}$ ableiten, indem wir an Stelle von ϱ beziehentlich die Größen:

$$\varrho_1 = \alpha\varrho,\ \varrho_2 = \alpha^2\varrho,\ \cdots,\ \varrho_n = \alpha^n\varrho$$

treten lassen, in denen α eine positive Größe bedeutet, die kleiner als 1 ist und von n abhängen kann. Es leuchtet ein, daß alle diese Sterne in E_n enthalten sind und daß weiterhin $E_{n,h+1}$ in E_{nh} enthalten ist.

353. Wir nehmen jetzt an, ein Stern E mit dem Mittelpunkt c enthalte in seinem Innern einen gegebenen endlichen Bereich C. Wir wollen einen endlichen Stern A um c bilden, der innerhalb E liegt und in seinem Innern C enthält.

---

1) Für die Punkte von $c\alpha_{n-1}$ ist das einleuchtend. Was die Punkte von $\alpha_{n-1}\beta_n$ betrifft, so genügt die Bemerkung, daß, da:

$$\alpha_{n-1}\beta_n = n\varrho\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n\varrho}{n(n+1)} = \frac{\varrho}{n+1}$$

ist, der kleinste Abstand der Punkte von $\alpha_{n-1}\beta_n$ von der Kreislinie um α_{n-1} mit dem Radius ϱ niemals kleiner ist als $\frac{n}{n+1}\varrho$.

Es ist wohl nützlich, daran zu erinnern, daß ein Bereich M innerhalb eines andren N gelegen heißt, wenn sich eine positive Größe δ von der Art angeben läßt, daß alle Punkte jeder um einen beliebigen Punkt von M mit dem Radius δ gezogenen Kreislinie dem Bereiche N oder dessen Umfange angehören.

Es sei D der Stern um c, der dem Bereiche C umschrieben sein möge, d. h. dessen Abscisse auf jedem beliebigen Strahl die obere Grenze der Abstände von c der C angehörenden Punkte dieses Strahles sei[1]; er ist offenbar endlich. Da C innerhalb E liegt, so läßt sich eine Größe δ angeben, die in Hinsicht auf die Bereiche C, E die soeben angedeutete Eigenschaft besitzt. Es sei außerdem $\varphi(\lambda)$ die Abscisse des Sternes D auf dem Strahl l mit dem Argument λ, d der Endpunkt dieser Abscisse, R die obere Grenze von $\varphi(\lambda)$ (die eine endliche Größe ist), S der Radius eines Kreises um c, der vollständig in E enthalten sein möge. Der Kreis mit dem Radius δ um d liegt vollständig in E, mithin läßt sich dasselbe aus Ähnlichkeitsgründen von dem Kreise um einen beliebigen Punkt x der Strecke cd mit dem Radius:

$$\frac{|x-c|}{\varphi(\lambda)}\delta$$

sagen.

Man beschreibe nun um x einen Kreis mit dem Radius $k\frac{\delta}{R}$, wo:

$$k = \frac{S}{1+\frac{\delta}{R}}.$$

Ist $k \leqq |x-c|$, so ist dieser Kreis in dem vorhergehenden und folglich in E enthalten. Ist $k > |x-c|$, so folgt:

$$|x-c| + \frac{k\delta}{R} < S,$$

woraus erhellt, daß der betreffende Kreis innerhalb des Kreises um c mit dem Radius S und folglich in E enthalten ist.

Beachtet man, daß die Größe $\frac{k\delta}{R}$ nicht nur von dem Punkte x, sondern auch von dem Strahl l unabhängig ist, so kann man behaupten, daß ein Kreis mit dem Radius $\varepsilon = \frac{k\delta}{R}$ um jeden beliebigen Punkt von D in E enthalten ist, woraus folgt, daß D innerhalb E gelegen ist.

1) Enthält ein Strahl keinen Punkt von C, so kann man als bezügliche Abscisse eine beliebige Größe $\theta < R$ annehmen.

Werden alle Abscissen von D in dem Verhältnis $\frac{R+\frac{1}{2}\varepsilon}{R}$ vergrößert, so erhält man einen endlichen Stern A, der gleichfalls innerhalb E liegt. Es ist nämlich:

$$\varphi(\lambda)\frac{R+\frac{1}{2}\varepsilon}{R} = \varphi(\lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\varphi(\lambda)}{R} \leq \varphi(\lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

so daß jeder Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}\varepsilon$ um irgend einen Punkt von A in E enthalten ist.

Ist so der Stern A konstruiert, so können wir eine Zahl n von der Art finden, daß für jedes $h \geqq n$ der Stern A_h (d. h derjenige, der aus A gerade so hergeleitet wird wie E_h aus E) C enthält. Es sei η die Größe, die in bezug auf die Bereiche C, A die Eigenschaft der oben definierten Größe δ besitzt, T der Radius eines Kreises um c, der in seinem Innern C enthält. Nennt man e den Endpunkt der Abscisse von D auf dem Strahl l und teilt man ce in n gleiche Teile $c\gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}e$, so muß, wenn die Abscisse von A_n größer als ce sein soll, jeder Kreis mit dem Radius $c\gamma_1$ um irgend einen Punkt von $c\gamma_{n-1}$ in A enthalten sein. Sicher findet dies statt, wenn die Strecke $c\gamma_1$ oder $\frac{1}{n}ce$ die Größe η nicht übersteigt, oder wenn:

$$n \geqq \frac{ce}{\eta},$$

und um so mehr, wenn:

$$n \geqq \frac{T}{\eta}$$

ist.

Da dann A_h für jedes $h' > h$ in $A_{h'}$ enthalten ist, so läßt sich schließen, daß A_h für jedes $h \geqq n$ den Bereich C enthält.

Nimmt man schließlich für α eine solche Funktion von n, daß sich α^n der 1 nähert, wenn n unbeschränkt zunimmt, so läßt sich ein derartiger Wert von n finden, daß A_{hh} für jedes $h \geqq n$ den Bereich C enthält.

354. Nach diesen Vorbemerkungen kehren wir zur Hauptaufgabe des Art. 351 zurück.

Wir werden als den einem Elemente $\mathfrak{P}(x|c)$ einer analytischen Funktion zugehörigen Stern denjenigen bezeichnen, der c als Mittelpunkt, die untere Grenze der Abstände von c der dem Existenzbereiche der Funktion nicht angehörenden Punkte eines Strahles als Abscisse auf diesem Strahl hat. Die Ecken des Sterns sind offenbar singuläre Punkte der Funktion.

Es sei E der dem gegebenen Elemente zugehörige Stern, C ein in E enthaltener endlicher Bereich; man bilde nach dem auseinandergesetzten Verfahren den entsprechenden Stern A und bestimme n in der Weise, daß A_{hh} für jedes $h \geqq n$ den Bereich C enthält. Wir bezeichnen mit g die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(x)$ in A (den Umfang einbegriffen) und setzen:

$$y = \frac{x-c}{n}, \quad y_h = c + h\frac{x-c}{n} \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Ist x ein Punkt von C, ϱ die bereits mit diesem Buchstaben bezeichnete Größe für den Radius cx und für die Zahl n, so gehört jeder Punkt z, für den:

$$|z - y_{n-1}| \leqq \varrho$$

ist, A an. Da nämlich x innerhalb A_n liegt, so ist $|x - c| < n\varrho$, folglich $|y_{n-1} - c| < (n-1)\varrho$, so daß den aufgestellten Definitionen gemäß jeder Punkt irgend eines Kreises mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt auf cy_{n-1} dem Stern A angehören muß. Daraus folgt, daß der Konvergenzradius der in bezug auf den Punkt y_{n-1} transformierten Reihe:

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})(z - y_{n-1})^{h_1}$$

größer ist als ϱ, woraus sich ergibt (Art. 128):

$$\frac{1}{h_1!}|f^{(h_1)}(y_{n-1})| \leqq \frac{g}{\varrho^{h_1}}.$$

Da x auch A_{n1} angehört, so hat man $|y| < \varrho_1 = \alpha\varrho$ und folglich:

$$(2) \qquad \frac{1}{h_1!}|f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1}| \leqq g\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^{h_1} = g\alpha^{h_1}.$$

Wir beschreiben nun um den Punkt y_{n-2} einen Kreis mit dem Radius ϱ_1 und einen mit dem Radius ϱ; z_1 sei irgend ein Punkt des ersten Kreises, z ein Punkt, der von z_1 um nicht mehr als $\varrho - \varrho_1$ entfernt ist, also innerhalb des zweiten Kreises liegt. In Formeln ausgedrückt, heißt das:

$$|z_1 - y_{n-2}| \leqq \varrho_1, \quad |z - z_1| \leqq \varrho - \varrho_1, \quad |z - y_{n-2}| \leqq \varrho.$$

Da der Kreis um y_{n-2} mit dem Radius ϱ vollständig in A enthalten ist, so ist auch der Kreis mit dem Radius $\varrho - \varrho_1$ um z_1 in A vollständig enthalten. Der Konvergenzradius des dem Punkte z_1 zugehörigen Elementes ist also $> \varrho - \varrho_1$, und die Reihe:

$$f(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(z_1)\,(z - z_1)^{h_1}$$

konvergiert. Es folgt wie oben:

$$\frac{1}{h_1!} \left| f^{(h_1)}(z_1) \right| \leqq \frac{g}{(\varrho - \varrho_1)^{h_1}},$$

und nach Multiplikation mit $|z_1 - y_{n-2}|^{h_1} \leqq \varrho_1^{h_1}$:

$$\frac{1}{h_1!} \left| f^{(h_1)}(z_1)\,(z_1 - y_{n-2})^{h_1} \right| \leqq g\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1}. \tag{3}$$

Andrerseits ist:

$$f^{(h_1)}(z_1) = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\,(z_1 - y_{n-2})^{h_2}$$

und mithin:

$$\frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(z_1)\,(z_1 - y_{n-2})^{h_1} = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\,h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\,(z_1 - y_{n-2})^{h_1+h_2}, \tag{4}$$

woraus mit Rücksicht auf (3) folgt:

$$\frac{1}{h_1!\,h_2!} \left| f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2}) \right| \leqq g\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1} \frac{1}{\varrho_1^{h_1+h_2}}.$$

Nun ist $|y| < \varrho_2 = \alpha\varrho_1$, weil x innerhalb A_{n2} liegt; mithin ist:

$$\frac{1}{h_1!\,h_2!} \left| f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\,y^{h_1+h_2} \right| \leqq g\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1} \alpha^{h_1+h_2}. \tag{5}$$

Fahren wir so fort, so können wir 3, 4, $\cdots$, n Hilfsvariabeln einführen; halten wir uns an den letzten Fall und bezeichnen wir die Variabeln mit:

$$z,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{n-2},\ z_{n-1},$$

so sind diese an die Bedingungen gebunden:

$$|z_{n-1} - c| \leqq \varrho_{n-1}\,^{1)}, \quad |z_{n-2} - z_{n-1}| \leqq \varrho_{n-2} - \varrho_{n-1}, \cdots,$$
$$|z_1 - z_2| \leqq \varrho_1 - \varrho_2, \quad |z - z_1| \leqq \varrho - \varrho_1,$$

und wir gelangen schließlich zu der Beziehung:

$$\frac{1}{h_1!\,h_2!\cdots h_n!} \left| f^{(h_1+h_2+\cdots+h_n)}(c)\,y^{h_1+h_2+\cdots+h_n} \right| \leqq$$
$$\leqq g\,\alpha^{h_1}\cdot\alpha^{h_1+h_2}\cdots\alpha^{h_1+h_2+\cdots+h_{n-2}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1+h_2+\cdots+h_{n-1}}\alpha^{h_1+h_2+\cdots+h_n}.$$

---

1) Wenn nur zwei Variabeln z_1, z eingeführt werden, dann setzt man $|z_1 - y_{n-2}| \leqq \varrho_1$; werden ihrer drei eingeführt, so setzt man $|z_2 - y_{n-3}| \leqq \varrho_2$ usf.; bei n Variabeln muß man schließlich $|z_{n-1} - c| \leqq \varrho_{n-1}$ setzen.

355. Die Entwicklung (1) des vorigen Artikels gilt für jedes z von der Art, daß $|z - y_{n-1}| \leqq \varrho$ ist. Nun ist:

$$x - y_{n-1} = x - c - \frac{n-1}{n}(x - c) = \frac{x-c}{n} = y$$

und $|y| \leqq \varrho$, weil x in A_n liegt; folglich darf man in Art. 354, (1) $z = x$ setzen. Man hat dann:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1}.$$

Setzen wir:

$$\sum_{h_1=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1} = \varepsilon_1,$$

wo m_1 eine später zu bestimmende Zahl ist, so erhalten wir:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{m_1} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1} + \varepsilon_1;$$

ferner wegen (2) Art. 354:

$$|\varepsilon_1| \leqq g \sum_{h_1=m_1+1}^{\infty} \alpha^{h_1} = g\,\frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}.$$

Setzen wir nun in (4) Art. 354 $z_1 = y_{n-1}$, was zulässig ist, weil:

$$|y_{n-1} - y_{n-2}| = |y| \leqq \varrho,$$

so erhalten wir:

$$\frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1} = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\,h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\, y^{h_1+h_2}$$

und, wenn wir von $h_1 = 0$ bis $h_1 = m_1$ summieren:

$$\sum_{h_1=0}^{m_1} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1} = \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\,h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\, y^{h_1+h_2}.$$

Ist dann:

$$\sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{h_1!\,h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\, y^{h_1+h_2} = \varepsilon_2,$$

wo m_2 wiederum eine später zu bestimmende Zahl bezeichnet, so ergibt sich:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=0}^{m_2} \frac{1}{h_1!\,h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\, y^{h_1+h_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

ferner wegen (5) Art. 354:

$$|\varepsilon_2| \leqq g \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=m_2+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1} \alpha^{h_1+h_2} = g \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=m_2+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{h_1} \alpha^{h_2} =$$

$$= g \frac{1-\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_1+1}}{1-\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \frac{\alpha^{m_2+1}}{1-\alpha} = g \frac{\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}} \left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}\right) \frac{\alpha^{m_2+1}}{1-\alpha}.$$

Fahren wir in derselben Weise fort, so werden wir finden:

$$(1) \quad f(x) = \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{h_n=0}^{m_n} \frac{1}{h_1!\, h_2! \cdots h_n!} \times$$

$$\times f^{(h_1+h_2+\cdots+h_n)}(c) \left(\frac{x-c}{n}\right)^{h_1+\cdots+h_n} + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n,$$

wo:

$$|\varepsilon_\mu| \leqq g \frac{\left(\frac{\alpha^\mu}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^\mu}} \frac{\left(\frac{\alpha^{\mu-1}}{1-\alpha}\right)^{m_2}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}} \cdots \frac{\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}} \times$$

$$\times \left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^\mu}\right)^{m_1+1}\right] \left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right] \cdots \left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right] \frac{\alpha^{m_\mu+1}}{1-\alpha}.$$

Beachtet man, daß:

$$\mu m_1 + (\mu-1) m_2 + \cdots + 2 m_{\mu-1} + m_\mu + 1 =$$
$$= 1 + m_1 + (m_1+m_2) + (m_1+m_2+m_3) + \cdots + (m_1+m_2+\cdots+m_\mu),$$

so läßt sich diese Beziehung folgendermaßen schreiben:

$$|\varepsilon_\mu| \leqq g \prod_{k=1}^{\mu-1} \frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right)^{m_k+1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}} \times$$

$$\times \frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha} \frac{\alpha^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}} \frac{\alpha^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}} \cdots \frac{\alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_\mu}}{(1-\alpha)^{m_{\mu-1}}}.$$

356. Es wurde oben angenommen, die Größe α liege zwischen 0 und 1 und sie hänge derart von n ab, daß $\lim\limits_{n=\infty} \alpha^n = 1$ wird. Diesen Bedingungen genügt der Ausdruck:

$$\alpha = e^{-\frac{1}{n\,\omega(n)}},$$

wo $\omega(n)$ eine stets positive, zugleich mit n unbeschränkt zunehmende Größe ist. Man hat dann (Art. 145,(3)):

$$\alpha > 1 - \frac{1}{n\,\omega(n)},$$

oder auch:

$$1 - \alpha < \frac{1}{n\,\omega(n)},$$

ferner, wenn λ eine ganze positive, n nicht übersteigende Zahl bezeichnet:

$$\alpha^{-\lambda} = e^{\frac{\lambda}{n\,\omega(n)}} \leqq e^{\frac{1}{\omega(n)}};$$

hieraus folgt für $\mu \leqq n$, $\mu > k \geqq 1$:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}} < \frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}},$$

und somit:

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1 - \frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right] > \left[1 - \frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right]^{\mu-1} > \left[1 - \frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right]^{n}.$$

Der letzte Ausdruck hat 1 als Grenze für $\lim n = \infty$ [1]); folglich läßt sich nach Annahme einer beliebigen Größe $r > 1$ eine Zahl n so angeben, daß:

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1 - \frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right] > \frac{1}{r}.$$

---

1) Setzt man in Anm. 1 S 261:

$$k = \frac{1}{n}, \quad s = \left(1 - \frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right)^{n},$$

so ergibt sich, wenn man der Kürze halber die Größe $\frac{1}{n\,\omega(n)} \cdot e^{\frac{1}{\omega(n)}}$ durch θ bezeichnet:

$$1 - \theta < 1 + \frac{1}{n}\left[(1-\theta)^n - 1\right],$$

woraus folgt:

$$(1-\theta)^n > 1 - n\theta = 1 - \frac{1}{\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}};$$

die letzte Größe hat aber ersichtlich 1 als Grenze für $\lim n = \infty$, folglich findet dasselbe für $(1-\theta)^n$ statt.

Andrerseits ist:

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right)^{m_k+1}\right]<1;$$

folglich:

$$|\varepsilon_\mu| < gr\frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}\,\frac{\alpha^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}}\,\frac{\alpha^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}}\cdots\frac{\alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_\mu}}{(1-\alpha)^{m_{\mu-1}}}.$$

Setzen wir:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}=\beta,$$

so können wir schreiben:

$$|\varepsilon_\mu| < gr\cdot\alpha^{m_1}\beta\cdot\alpha^{m_2}\beta^{m_1}\cdot\alpha^{m_1+m_3}\beta^{m_2}\cdots\alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_{\mu-2}+m_\mu}\beta^{m_{\mu-1}}=$$

$$=gr\,\alpha^{m_1}\beta\,\alpha^{m_2}\beta^{m_1}\prod_{i=3}^{\mu}\alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_{i-2}+m_i}\beta^{m_{i-1}}.$$

Es mögen nunmehr die Zahlen m in passender Weise gewählt werden. Setzt man der Kürze halber:

$$n\,\omega(n)=\nu,$$

so daß:

$$\alpha=e^{-\frac{1}{\nu}},\quad \beta=\frac{1}{e^{\frac{1}{\nu}}-1},$$

so ergibt sich (Art. 145,(1)):

$$e^{\frac{1}{\nu}}-1>\frac{1}{\nu},$$

folglich:

$$\beta<\nu.$$

Wir wollen nun die m so wählen, daß:

$$m_1\geqq 2\nu\lg\nu,\quad m_2\geqq m_1\nu\lg\nu,$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_{i-2}+m_i\geqq m_{i-1}\nu\lg\nu\quad(i=3,4,\cdots,\mu)$$

wird. Beachtet man, daß $\alpha<1$, so ist dann:

$$\alpha^{m_1}\beta<\alpha^{2\nu\lg\nu}\nu=e^{-2\lg\nu}\nu=\frac{1}{\nu},$$

$$\alpha^{m_2}\beta^{m_1}\leqq(\alpha^{\nu\lg\nu}\beta)^{m_1}<(e^{-\lg\nu}\nu)^{m_1}=1,$$

$$\alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_{i-2}+m_i}\beta^{m_{i-1}}\leqq(\alpha^{\nu\lg\nu}\beta)^{m_{i-1}}<1\quad(i=3,4,\cdots,\mu)$$

und somit:

$$|\varepsilon_\mu|\leqq\frac{gr}{\nu}=\frac{gr}{n\,\omega(n)}\qquad(\mu=1,2,\cdots,n),$$

woraus folgt:

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \leqq \frac{gr}{\omega(n)}.$$

Da $\omega(n)$ unbegrenzt wächst, so können wir eine solche Zahl N annehmen, daß, wenn σ eine beliebig gewählte positive Größe ist, für jedes $n \geqq N$ sich $\frac{gr}{\omega(n)} < \sigma$ ergibt. Man setze dann:

$$c_{nh} = \frac{h!}{n^h} \sum \frac{1}{h_1!h_2!\cdots h_n!},$$

wo an Stelle von $h_1, h_2, \cdots, h_n$ alle Systeme von ganzen und nicht negativen Zahlen treten müssen, welche den Beziehungen:

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h, \; h_1 \leqq m_1, \; h_2 \leqq m_2, \cdots, \; h_n \leqq m_n$$

genügen; ferner:

$$g_n(x) = \sum_h c_{nh} \frac{f^{(h)}(c)}{h!}(x-c)^h = \sum_h c_{nh} a_h (x-c)^h.$$

Vergleicht man mit (1) Art. 355, so ersieht man, daß sich eine Zahl N von der Art angeben läßt, daß für jedes $n \geqq N$ in dem ganzen Bereiche C ist:

(1) $$|f(x) - g_n(x)| < \sigma.$$

Es ist zu beachten, daß die Koeffizienten c_{nh} und die Zahlen m_r von den Konstanten a_h, dem Punkte c und dem Bereiche C durchaus unabhängig sind.

Setzen wir schließlich:

$$G_0(x) = g_0(x) = a_0,$$
$$G_h(x) = g_h(x) - g_{h-1}(x) \quad (h = 1, 2, \cdots),$$

woraus folgt:

(2) $$\sum_{h=0}^{n} G_h(x) = g_n(x),$$

so darf man schreiben:

(3) $$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} G_h(x).$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist in dem Bereiche C gleichmäßig konvergent; man erhält nämlich aus (1), (2) für alle Punkte des Bereiches C und für jedes $n \geqq N$, wenn p eine beliebige positive Zahl ist:

$$\left| f(x) - \sum_{h=0}^{n} G_h(x) \right| < \sigma, \quad \left| f(x) - \sum_{h=0}^{n+p} G_h(x) \right| < \sigma,$$

also:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{n+p} G_h(x) \right| < 2\sigma$$

und endlich:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} G_h(x) \right| \leqq 2\sigma.$$

Das in (3) enthaltene Ergebnis läßt sich so ausdrücken:

Ist E der dem Elemente $\sum_{h=0}^{\infty} a_h (x-c)^h$ zugehörige Stern, so läßt sich die von diesem Elemente erzeugte analytische Funktion in dem ganzen Sterne E mittels einer Reihe von Polynomen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \tag{4}$$

darstellen, die in jedem beliebigen, innerhalb E gelegenen Bereiche gleichmäßig konvergiert. Die Polynome $G_n(x)$ haben die Form:

$$G_n(x) = \sum_h d_{nh} a_h (x-c)^h,$$

wo die Koeffizienten d_{nh} von c und von den a unabhängig und lediglich von den Zahlen n, h abhängig sind.

Die Koeffizienten d_{nh} können wie die c_{nh} unendlich viele voneinander verschiedene Formen annehmen. Zwischen beiden Koeffizientensystemen bestehen folgende Beziehungen:

$$d_{nh} = c_{nh} - c_{n-1,h}.$$

Die Formel (1) läßt sich auch schreiben:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x).$$

Als Zahlen m_h kann man insbesondere die folgenden[1]) annehmen:

$$m_h = n^{2h};$$

man hat dann:

1) Es läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen, daß diese Zahlen die den m_h oben auferlegten Bedingungen erfüllen.

$$(5)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{h_1=0}^{n^2} \sum_{h_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{h_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{h_1!\,h_2!\cdots h_n!} f^{(h)}(c) \left(\frac{x-c}{n}\right)^h,$$

wo:

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n.$$

Man kann auch hinzufügen: Die Reihe (4) kann in keinem irgend eine Ecke von E enthaltenden zusammenhängenden Bereiche gleichmäßig konvergent sein, weil sie dann in diesem Bereiche die Funktion $f(x)$ darstellen würde (Art. 192), während doch die Ecken von E für diese singuläre Punkte sind.

Wir bemerken schließlich, daß aus den besonderen Annahmen:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 1, \quad c = 0$$

folgt:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

so daß unter diesen Annahmen (3), wo:

$$G_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x), \quad g_n(x) = \sum_h c_{nh} x^h$$

ist, die Entwicklung der Funktion $\frac{1}{1-x}$ in eine Reihe von Polynomen liefert, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte der Strecke $1 \cdots \infty$ der reellen Achse konvergiert und in jedem Bereiche gleichmäßig konvergiert, der weder in seinem Innern noch auf seinem Umfange irgend einen Punkt dieser Strecke enthält.

357. Gegeben seien ∞^n Funktionen:

$$f_{h_1 h_2 \cdots h_n} \quad (h_r = 0, 1, \cdots; \; r = 1, 2, \cdots, n)$$

einer Variabeln x. Sind die Reihen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 \cdots h_n} = f_{h_1 \cdots h_{n-1}} \\ \sum\limits_{h_{n-1}=0}^{\infty} f_{h_1 \cdots h_{n-1}} = f_{h_1 \cdots h_{n-2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{h_2=0}^{\infty} f_{h_1 h_2} = f_{h_1} \\ \sum\limits_{h_1=0}^{\infty} f_{h_1} = f \end{cases}$$

für $x = x_0$ sämtlich konvergent, so sagt man:

$$(2) \qquad f = \sum_{h_1=0}^{\infty} \sum_{h_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 h_2 \cdots h_n}$$

sei eine n-fach unendliche, für $x = x_0$ konvergente Reihe. Sind die Reihen (1) in einem bestimmten Bereiche C gleichmäßig konvergent, so sagt man, (2) sei eine n-fach unendliche, in dem Bereiche C gleichmäßig konvergente Reihe.

Nunmehr darf man behaupten, daß sich die Darstellung von $f(x)$ mittels eines solchen Ausdruckes wie (5) des Art. 356, in dem ebensowohl die Anzahl der zu berechnenden Summen wie die Anzahl der Glieder jeder einzelnen Summe unendlich ist, durch eine andre ersetzen läßt, in welcher die Anzahl der Summen endlich ist.

Man beachte zu diesem Zwecke, daß (1) Art. 354 und die daraus hervorgehenden Formeln auch dann noch gelten, wenn man in ihnen y_μ an Stelle von y_{n-1} setzt, wo μ irgend eine Zahl bedeutet, die kleiner als n ist. Hieraus ergibt sich leicht, daß:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_\mu) y^{h_1}$$

in C gleichmäßig konvergent ist, und folglich (s. Art. 165), daß es auch die Reihe:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1+h_2)}(y_\mu) y^{h_1}$$

ist, welches auch h_2 sei. Es sind also alle die folgenden Reihen in C gleichmäßig konvergent:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1}) y^{h_1},$$

$$f^{(h_1)}(y_{n-1}) = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2}) y^{h_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(h_1+h_2+\cdots+h_{n-1})}(y_1) = \sum_{h_n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n!} f^{(h_1+h_2+\cdots+h_n)}(c) y^{h_n},$$

d. h.: Die n-fach unendliche, in C gleichmäßig konvergente Reihe:

$$(3) \qquad \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} \frac{1}{h_1! \ldots h_n!} f^{(h_1+\cdots+h_n)}(c) \left(\frac{x-c}{n}\right)^{h_1+\cdots+h_n},$$

wo $f^{(r)}(c) = r!\ a_r$ ist, stellt für den zu Anfang des Art. 354 bestimmten Wert von n und für alle größeren Werte desselben in C die Funktion $f(x)$ dar.

Ist C in dem Konvergenzkreise der Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h (x-c)^h \tag{4}$$

enthalten, so darf man $n = 1$ nehmen, und (3) reduziert sich auf (4).

358. Wir nehmen jetzt die Bezeichnungen des Art. 354 wieder auf und setzen:

$$y = \frac{x-c}{n}, \quad |y| = r, \quad y_h = c + h\frac{x-c}{n} \quad (h = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

Um die Punkte $c, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ beschreiben wir n Kreise mit dem Radius r; H sei der von diesen Kreisen bedeckte Teil der Ebene. Ist die Reihe (3) des vorigen Artikels in dem Punkte x konvergent, so sollen, nach dem in diesem Artikel Gesagten, die Reihen für die Funktionen $f(x)$, $f(y_{n-1})$ usw. und ihre Ableitungen für $|y| = r$ sämtlich konvergieren; da diese aber nichts anderes sind als die aus dem gegebenen Elemente transformierten Reihen, so folgt hieraus, daß der Existenzbereich der von dem gegebenen Elemente erzeugten analytischen Funktion den Bereich H enthält, oder auch, daß (3) in jedem innerhalb H liegenden Bereiche gleichmäßig konvergiert.

Wir greifen nun einen Punkt x' der Strecke cx heraus, setzen:

$$y' = \frac{x'-c}{n}, \quad |y'| = r', \quad y_h' = c + h\frac{x'-c}{n} \quad (h = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

und bilden den zu H analogen Bereich H'. Nehmen wir zunächst an, es liege H' für jedes x' innerhalb H. Bestimmt man dann auf jedem Strahl die obere Grenze x der Punkte, für welche (3) konvergiert, und bildet den entsprechenden Bereich H, so hat der von sämtlichen Bereichen H bedeckte Teil der Ebene, der nichts andres ist als der Stern E_n, die Eigenschaft, daß (3) innerhalb dieses und nur innerhalb dieses gleichmäßig konvergent ist. Im entgegengesetzten Falle läßt sich das nicht ohne weiteres behaupten.

Nun läßt sich zeigen, daß der erste Fall immer für $n = 1, 2, 3$, aber nicht immer für $n > 3$ statthat.

Für $n = 1$ ist die Behauptung einleuchtend, weil ja H und H' zwei konzentrische Kreise um c mit den Radien r und $r' < r$ sind.

Für $n = 2$ ist der erste der Kreise, die H' erzeugen, konzen-

trisch mit dem ersten der Kreise, die H erzeugen, und innerhalb desselben gelegen; der zweite berührt den zweiten von innen (in c), folglich liegt H' innerhalb H.

Wir setzen nun $n > 2$ voraus. Bezeichnen ξ, η kartesische Koordinaten, deren Ursprung c und deren ξ-Achse cx sein mögen, so sind die Koordinaten der Schnittpunkte der um y_h und y_{h+1} mit dem Radius r gezogenen Kreise:

$$\xi = \frac{2h+1}{2} r \quad (h = 0, 1, 2, \cdots, n-2), \quad \eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r,$$

und die Entfernung des Punktes y'_{n-1} von diesen Punkten ist:

$$\delta_h = \sqrt{\left[\frac{2h+1}{2} r - (n-1) r'\right]^2 + \frac{3}{4} r^2} =$$
$$= \sqrt{(h^2 + h + 1)r^2 - (2h+1)(n-1)rr' + (n-1)^2 r'^2}.$$

Der Bereich H' liegt also immer und nur dann innerhalb H, wenn $\delta_h > r'$ für jedes h ist. Nun hat man:

$$(1) \quad \delta_h^2 - r'^2 = (h^2 + h + 1)r^2 - (2h+1)(n-1)rr' + n(n-2)r'^2.$$

Die Diskriminante der rechten Seite ist:

$$\Delta_h = (2h+1)^2(n-1)^2 - 4(h^2 + h + 1)n(n-2) =$$
$$= (2h+1)^2 - 3n(n-2);$$

ihren größten Wert nimmt sie ersichtlich für $h = n - 2$ an und es ist:

$$\Delta_{n-2} = (2n-3)^2 - 3n(n-2) = n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2,$$

woraus sich $\Delta_{n-2} = 0$ für $n = 3$ und $\Delta_{n-2} > 0$ für $n > 3$ ergibt. Beachtet man, daß die rechte Seite von (1) z. B. für $r = 1$, $r' = 0$ positiv ist, so darf man schließen, daß sie für $n = 3$ stets positiv ist, während sie für $n > 3$ verschiedene Vorzeichen annehmen kann[1]).

Es läßt sich aber in jedem Falle eine zu (3) des vorigen Artikels analoge Reihe bilden, für die ein solcher Bereich existiert, daß die Reihe nur innerhalb desselben gleichmäßig konvergiert.

Ist l ein von c ausgehender Strahl, so beschreiben wir mit den Radien $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ n Kreislinien $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$, deren Mittelpunkte $c, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}$ dem Strahl l angehören, und die folgenden Bedingungen genügen:

Die Kreislinie γ_0 geht durch η_1;

1) Man kann auch beweisen, daß dies wirklich für $r' < r$ geschieht.

Die Kreislinie γ_1 geht durch c;

Die Kreislinie γ_h $(h = 2, 3, \cdots, n-1)$ geht durch η_{h-1};

Die Schnittpunkte von γ_h und γ_{h-1} $(h = 2, 3, \cdots, n-1)$ sind die Berührungspunkte der von c aus an γ_h gezogenen Tangenten.

Nennen wir α_h den Winkel, welchen der Strahl l mit jeder der von c aus an die Kreislinie γ_h gezogenen Tangenten bildet, so ergeben die aufgestellten Bedingungen:

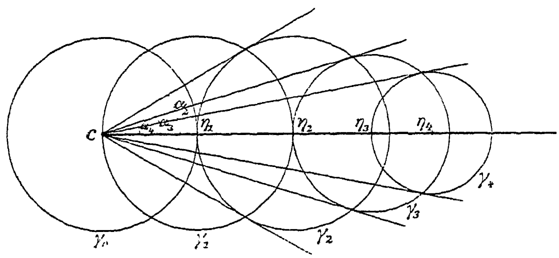

Fig. 9.

$$r_1 = r_0, \quad \sin\alpha_1 = 1, \quad r_{h-1} = 2 r_h \sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_h\right),$$

$$r_{h-1} = (r_1 + r_2 + \cdots + r_{h-1}) \sin\alpha_{h-1}, \quad r_h = (r_1 + r_2 + \cdots + r_h) \sin\alpha_h,$$

woraus folgt:

$$\text{(1)} \qquad \frac{r_h}{r_{h-1}} = \frac{\sin\alpha_h}{\sin\alpha_{h-1}\,(1 - \sin\alpha_h)} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_h\right)};$$

daraus leitet man unschwer ab:

$$\text{(2)} \qquad \sin\alpha_h = -\frac{1}{4}\sin^2\alpha_{h-1} + \frac{1}{4}\sin\alpha_{h-1}\sqrt{8 + \sin^2\alpha_{h-1}}$$

$$(h = 2, 3, \cdots, n-1).$$

Mittels dieser Formeln lassen sich, wenn entweder r_0 oder die Summe $s = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-2} + 2r_{n-1}$ (d. h. der Abstand des zweiten Schnittpunktes x des letzten Kreises mit dem Strahl l von c) gegeben ist, sämtliche Radien r und sämtliche Winkel α bestimmen.

Da sich aus (2) $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$ ergibt und alle folgenden Winkel ersichtlich kleiner sind, so folgt für $h > 1$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_h\right) \geqq \frac{\pi}{6},$$

also:

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_h\right) \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{r_h}{r_{h-1}} \leqq 1,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $h = 2$ gilt. Man ersieht ferner aus (2), daß die Winkel α von dem Werte von s unabhängig sind. Nimmt man also anstatt s einen anderen Wert $s' < s$, so erhält man eine in bezug auf den Mittelpunkt c zur ersten ähnliche und ähnlich gelegene (homothetische) Figur; und da die Radien r_h bei wachsendem h abnehmen, so sieht man leicht, daß die zweite Figur stets innerhalb der ersten liegt.

Es sei nun ϱ die obere Grenze der Werte von r_0, für welche die Gesamtheit der gezeichneten Kreise dem Sterne E angehört; tragen wir auf dem Strahl l die Strecke ab, deren Länge durch den Wert des Ausdrucks:

$$|\eta_{n-1} - c| + r_{n-1}$$

für $r_0 = \varrho$ gegeben ist, und wiederholen wir diese Konstruktion für alle von c ausgehenden Strahlen, so erhalten wir einen Stern, den wir mit $E_{\frac{1}{n}}$ bezeichnen wollen. In bezug auf diesen Stern besitzt die n-fach unendliche Reihe:

$$(3)\qquad \sum_{h_1=0}^{\infty}\sum_{h_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\,h_2!\cdots h_n!} f^{(h_1+h_2+\cdots+h_n)}(c) \times$$
$$\times (\eta_{n-1} - \eta_{n-2})^{h_1+h_2}(\eta_{n-2} - \eta_{n-3})^{h_3}\cdots(\eta_1 - c)^{h_n}$$

die verlangte Eigenschaft ohne Ausnahme.

Nun folgt aus (1):

$$\sin^2\alpha_{h-1} = \frac{2\sin^2\alpha_h}{1 - \sin\alpha_h}$$

und somit:

$$\frac{\sin\alpha_{h-1}}{2\sin\alpha_h} = \frac{\sin\alpha_h}{\sin\alpha_{h-1}(1 - \sin\alpha_h)};$$

daraus ergibt sich wegen (1):

$$\frac{r_h}{r_{h-1}} = \frac{\sin\alpha_{h-1}}{2\sin\alpha_h}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$(4)\qquad r_h = r_1\,\frac{1}{2^{h-1}\sin\alpha_h}.$$

Außerdem ist:

$$s = r_{n-1}\,\frac{1 + \sin\alpha_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}},$$

folglich wegen (4):

$$(5)\qquad s = r_1\,\frac{1 + \sin\alpha_{n-1}}{2^{n-2}\sin^2\alpha_{n-1}}.$$

Andrerseits ist:

$$x = (\eta_{n-1} - \eta_{n-2}) + \eta_{n-1} = c + se^{i\lambda},$$

$$\eta_h = c + (r_1 + r_2 + \cdots + r_h)e^{i\lambda},$$

folglich:

$$\eta_h - \eta_{h-1} = r_h e^{i\lambda} = (x - c)\frac{r_h}{s}$$

und wegen (4), (5):

$$\eta_h - \eta_{h-1} = (x - c)\frac{2^{n-h-1}\sin^2\alpha_{n-1}}{(1+\sin\alpha_{n-1})\sin\alpha_h}.$$

Aus (3) wird also:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=0}^{\infty} e_{h_1\cdots h_n} f^{(h_1+\cdots+h_n)}(c)(x-c)^{h_1+\cdots+h_n},$$

wo (unter Berücksichtigung der Gleichungen $\sin\alpha_1 = 1$, $\sin\alpha_2 = \frac{1}{2}$):

$$e_{h_1} = \frac{1}{h_1!},\quad e_{h_1 h_2} = \frac{1}{h_1!\,h_2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{h_1+h_2},$$

$$e_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{h_1!\,h_2!\,h_3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{h_1+h_2+h_3},$$

$$e_{h_1 h_2\cdots h_n} = \frac{1}{h_1!\,h_2!\cdots h_n!}\left(\frac{\sin^2\alpha_{n-1}}{1+\sin\alpha_{n-1}}\right)^{h_1+h_2+\cdots+h_n}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sin\alpha_{n-1}}\right)^{h_1+h_2}\left(\frac{2}{\sin\alpha_{n-2}}\right)^{h_3}\left(\frac{2^2}{\sin\alpha_{n-3}}\right)^{h_4}\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{2^{\nu-2}}{\sin\alpha_{n+1-\nu}}\right)^{h_\nu}\cdots\left(\frac{2^{n-4}}{\sin\alpha_3}\right)^{h_{n-2}}(2^{n-2})^{h_{n-1}+h_n}.$$

359. Der Unterschied zwischen dem Ausdruck (5) des Art. 356 und dem Ausdruck (3) des Art. 358 besteht darin, daß der erstere als Konvergenzstern den Stern E besitzt, während der andre als solchen $E_{\frac{1}{n}}$ hat.

Wächst n unbeschränkt, so fällt schließlich der Stern $E_{\frac{1}{n}}$ mit E zusammen.

Bezeichnen wir mit $S_n(x\,|\,c)$ den Ausdruck (3) des vorigen Artikels, so hat der Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x\,|\,c)$$

E zum Konvergenzstern.

Man erhält aber an Stelle einer abzählbaren Folge von Ausdrücken und entsprechenden Sternen eine stetige Folge, wenn man den veränderlichen Stern anstatt von der diskontinuierlichen Variabeln n von einer stetigen Variabeln α abhängen läßt.

Indem man von einer passend gewählten Funktion $\varphi(u \mid \alpha)$ ausgeht, welche die erzeugende Funktion genannt wird, konstruiert man innerhalb E auf eine hier nicht näher zu beschreibende Weise einen Stern E_α, so daß E_α für $\lim \alpha = 0$ in E übergeht. Die Reihe:

$$S_\alpha(x \mid c) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x-c),$$

wo:

$$G_n(x-c) = \frac{h_{n-1}^{(1)}}{1!\,\overline{n-1}!} a_1(x-c) + \frac{h_{n-2}^{(2)}}{2!\,\overline{n-2}!} a_2(x-c)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{h_1^{(n-1)}}{\overline{n-1}!\,1!} a_{n-1}(x-c)^{n-1} + \frac{h_0^{(n)}}{n!} a_n(x-c)^n$$

ist und die:

$$h_{n-r}^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \cdots; \; r = 1, 2, \cdots, n)$$

positive Konstanten sind, die lediglich von der erzeugenden Funktion abhängen, besitzt E_α als Konvergenzstern und stellt innerhalb desselben die Funktion $f(x)$ dar; der Ausdruck:

$$\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x \mid c)$$

aber besitzt E als Konvergenzstern und stellt $f(x)$ in allen Punkten desselben dar.

Nimmt man beispielsweise, wie Fredholm vorschlägt, als erzeugende Funktion:

$$\varphi(u \mid \alpha) = \frac{lg\,[1-(1-\alpha)\,u]}{lg\,\alpha},$$

so findet man die Reihe:

$$S_\alpha(x|c) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^n}{n!} \left[k_{n-1}^{(n)} a_1 \frac{x-c}{H} + \cdots + k_1^{(n)} a_{n-1} \left(\frac{x-c}{H}\right)^{n-1} + a_n \left(\frac{x-c}{H}\right)^n\right],$$

wo $H = -lg\,\alpha$ ist und die $k_r^{(n)}$ durch die rekurrierenden Beziehungen:

$$\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1) = \lambda^n + k_1^{(n)}\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}^{(n)}\lambda$$

bestimmt sind.

360. Borel hat für den Satz von Mittag-Leffler einen höchst einfachen, auf die Rungeschen Ergebnisse gegründeten Beweis geliefert. Wir legen ihn hier kurz dar, indem wir uns allerdings statt der krummlinigen Integrale der Mittelwerte bedienen.

Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, der gegebene Bereich enthalte den Anfangspunkt, und das Element $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ der analytischen Funktion $f(x)$ habe einen Konvergenzradius $\varrho > 1$. Ist $\varrho' < \varrho$, so ist für alle Punkte x innerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ' um den Anfangspunkt (Art. 131):

$$f(x) = \mathfrak{M}\,\frac{\varrho' f(\varrho')}{\varrho' - x} = \mathfrak{M}\,\frac{f(\varrho')}{1 - \frac{x}{\varrho'}}.$$

Nehmen wir an, wir hätten nach Runges (oder Painlevés) Verfahren eine Entwicklung von $\frac{1}{1-x}$ in eine Reihe von Polynomen:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \quad P_n(x) = \sum_{m=0}^{m_n} \gamma_{nm} x^m$$

erhalten, so ist:

$$\frac{1}{1-\frac{x}{\varrho'}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{x}{\varrho'}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_n} \gamma_{nm} \left(\frac{x}{\varrho'}\right)^m.$$

Die Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ ist in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Strecke $1 \cdots \infty$ der reellen Achse konvergent und in jedem Bereiche, der innerhalb ihres Konvergenzbereiches liegt, gleichmäßig konvergent. Daraus folgt (Art. 126):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_n} \gamma_{nm} x^m\, \mathfrak{M}\,\frac{f(\varrho')}{\varrho'^m}$$

und endlich (Art. 128):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_n} \gamma_{nm} a_m x^m;$$

diese Entwicklung ist in jedem Bereiche gleichmäßig konvergent, der innerhalb des dem gegebenen Elemente der Funktion $f(x)$ entsprechenden Sternes liegt, so daß sie (Art. 192) $f(x)$ in dem ganzen Sterne darstellt.

361. Ferner hat Borel folgende interessante Bemerkung gemacht.

Es sei wiederum $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ das dem Anfangspunkte entsprechende Element der analytischen Funktion $f(x)$, $\varphi(x)$ die entsprechende Entwicklung von Mittag-Leffler. Reicht der Existenzbereich von $f(x)$ über den Konvergenzbereich von $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ hinaus, so kann man den Wert von $\varphi(x)$ in einem außerhalb dieses Konvergenzkreises gelegenen Punkte x jenes Bereiches als Summe der divergierenden Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ ansehn (vgl. Art. 322 u. ff.); allein darin liegt freilich nichts Befremdliches, da man zu dieser Definition der Summe der divergierenden Reihe auch auf Grund des Begriffes der analytischen Fortsetzung gelangen kann. Es kann gleichwohl vorkommen, daß die Entwicklung $\varphi(x)$ in einem außerhalb des Existenzbereiches von $f(x)$ liegenden Punkte x konvergiert; in diesem Falle darf man ihren Wert wiederum als Summe der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ ansehen; zu dieser Definition aber kann man nicht mit Hilfe der analytischen Fortsetzung gelangen. Aber noch mehr: es gibt Potenzreihen mit einem Konvergenzradius Null, die Entwicklungen $\varphi(x)$ zulassen; die Summe solcher überall divergenten Reihen läßt sich vermittelst der Entwicklung $\varphi(x)$ definieren, während man von analytischer Fortsetzung keineswegs sprechen darf. Man kann somit schließen, daß die Entwicklungen von Mittag-Leffler für die Theorie der divergierenden Reihen eine größere Tragweite haben als die analytische Fortsetzung.

Es liege z. B. der arithmetische Ausdruck:

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{B_h}{x - e^{2\pi i h \sqrt{2}}}$$

vor, wobei $\sum_{h=1}^{\infty} |B_h|$ konvergent sein möge. Offenbar sind die Pole von $\varphi(x)$ auf der ganzen Kreislinie mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt überall dicht, und innerhalb dieser Kreislinie ist $\varphi(x)$ mittels einer konvergenten Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ darstellbar. Geht man von dem Elemente $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ aus, so läßt sich nach Mittag-Lefflers Methode eine Entwicklung in eine Reihe von Polynomen:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} G_h(x)$$

gewinnen. Es werde nun auf der Kreislinie nach beiden Seiten jedes Punktes $2\pi i h\sqrt{2}$ ein Bogen von der Länge $\frac{\pi}{2h^4}$ genommen; die Summe dieser Bögen ist $\pi \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} = \pi \cdot \frac{\pi^4}{90} < 2\pi$; folglich gibt es auf der Kreislinie unendlich viele Punkte, die ihnen nicht angehören. Man beweist, daß bei passender Wahl der B_h die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} G_h(x)$ in sämtlichen Punkten jeder den Anfangspunkt mit einem dieser Punkte verbindenden Geraden unbedingt konvergiert und denselben Wert hat wie $\varphi(x)$.

Bemerkenswert ist auch der arithmetische Ausdruck:

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \frac{\psi(p, p', q)}{x + i\sqrt{2} - \frac{p + ip'}{q}}.$$

Dieser Ausdruck hat unendlich viele Pole, von denen keiner auf der reellen Achse liegt, die aber in der ganzen Ebene überall dicht sind, so daß der Ausdruck in keinem Teile der Ebene eine analytische Funktion definiert. Andrerseits läßt sich durch passende Wahl der Funktion $\psi(p, p', q)$ erreichen, daß er auf jeder endlichen Strecke der reellen Achse gleichmäßig und unbedingt konvergiert und mittels der Formeln von Mittag-Leffler in eine Reihe von Polynomen oder, wie Borel kürzer sagt, in eine (M)-Entwicklung umgeformt werden kann, die nebst ihren abgeleiteten Reihen aller Ordnungen auf jeder endlichen Strecke der reellen Achse gleichmäßig und unbedingt konvergiert. In der (M)-Entwicklung treten an die Stelle der a_h des Art. 351 die Werte von (1) und von:

$$\varphi_h(x) = (-1)^h \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \frac{\psi(p, p', q)}{\left(x + i\sqrt{2} - \frac{p + ip'}{q}\right)^{h+1}} \quad [1]$$

in dem als Mittelpunkt des Sternes angenommenen Punkte x_0 der reellen Achse, der beliebig sein kann. Die Ausdrücke, die Entwicklungen der gedachten Natur zulassen, können (M)-Funktionen

1) Dieser Ausdruck, multipliziert mit $h!$, ist gleich der h-ten Ableitung von $\varphi(x)$, im Sinne der Infinitesimalrechnung.

genannt werden; eine solche Funktion $\varphi(x)$ ist vollständig bestimmt, sobald für einen Punkt x_0 der reellen Achse die Werte:

$$\varphi(x_0), \varphi_1(x_0), \cdots, \varphi_h(x_0), \cdots$$

bekannt sind.

Besitzt eine auf einer beliebigen Strecke r definierte Funktion die Eigenschaft, daß sie sich, wenn die Strecke r durch eine ganze lineare Substitution in eine Strecke der reellen Achse umgeformt wird, in eine (M)-Funktion verwandelt, so sagt man, sie sei eine (M)-Funktion auf der Strecke r.

Schneiden sich zwei Strecken r, r' in einem Punkte p und sind zwei auf den zwei Strecken beziehentlich definierte (M)-Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ von der Art, daß:

$$\varphi(p) = \psi(p),\ \varphi_1(p) = \psi_1(p), \cdots, \varphi_h(p) = \psi_h(p), \cdots, \tag{2}$$

so kann jede der Funktionen als analytische Fortsetzung der andern betrachtet werden. Nach dem, was oben bemerkt worden, ist eine solche Fortsetzung, falls sie vorhanden ist, eindeutig bestimmt.

Es liege nun eine in der ganzen Ebene überall dichte Menge von Geraden r vor, d. h. eine Menge von der Art, daß, wenn man einen beliebigen Punkt der Ebene nimmt und eine positive Größe σ willkürlich bestimmt, stets eine Gerade der Menge vorhanden ist, von welcher der Punkt um weniger als σ entfernt ist. Auf jeder in einem zusammenhängenden Bereiche C enthaltenen Strecke einer Geraden r werde eine (M)-Funktion derart definiert, daß für die Schnittpunkte je zweier Strecken die Beziehungen (2) bestehen. Dann können sämtliche (M)-Funktionen als analytische Fortsetzungen voneinander betrachtet werden; ihre Gesamtheit bildet eine Funktion, die wir wiederum als eine (M)-Funktion bezeichnen wollen, und deren Elemente die auf den einzelnen Strecken definierten (M)-Funktionen sind; sie ist eindeutig bestimmt, wenn irgend eins ihrer Elemente bekannt ist.

Es ist klar, daß dieser Begriff der analytischen Fortsetzung nicht mit dem älteren Begriffe in Widerspruch steht, sondern ihn umfaßt[1]). Liegt nämlich eine in dem Bereiche C reguläre analytische Funktion vor, die nebst allen ihren Ableitungen mit der (M)-Funktion und deren Ableitungen auf den bezüglichen Strecken dem Werte nach übereinstimmt, so stimmen die beiden Funktionen in dem ganzen

1) Siehe indessen über diesen Punkt die Einwürfe Painlevés (346, 349). Übrigens erkennt Borel selbst (69, Seite 365) an, daß sein Begriff der analytischen Fortsetzung noch der Vervollkommnung bedarf.

Bereiche C überein; andrerseits gibt es aber (M)-Funktionen, die keine analytischen Funktionen sind; ferner läßt sich eine in einem zusammenhängenden Bereiche C definierte (M)-Funktion finden, die in zwei getrennten Teilen dieses Bereiches mit zwei verschiedenen analytischen Funktionen zusammenfällt.

Beziehungen zwischen den Singularitäten zweier analytischer Funktionen[1]).

362. Es seien:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \qquad \varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

zwei Potenzreihen mit gleichem endlichen Konvergenzradius ϱ.

Läßt sich eine solche Konstante k finden, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\psi(x) = f(x) - k\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (a_h - k b_h) x^h$$

größer als ϱ ist, so sagt man nach Pincherles Vorschlag, die beiden gegebenen Reihen seien gleichsingulär (egualmente singolari).

Der so eingeführte Gleichheitsbegriff genügt den drei bei andrer Gelegenheit (Art. 12) erwähnten Grundbedingungen, nämlich:

a) Eine Reihe $f(x)$ ist gleichsingulär mit sich selbst, weil für $k = 1$ die Reihe $f(x) - f(x)$, die identisch Null ist, als eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius aufgefaßt werden kann;

b) Ist $f(x)$ gleichsingulär mit $\varphi(x)$, so ist umgekehrt $\varphi(x)$ gleichsingulär mit $f(x)$, weil, wenn $f(x) - k\varphi(x)$ einen Konvergenzradius $\varrho' > \varrho$ hat, derselbe Konvergenzradius der Reihe $\varphi(x) - \frac{1}{k} f(x)$ zukommt, die sich von der früheren nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet;

c) Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ gleichsingulär und ebenso $\varphi(x)$ und $\omega(x)$, so sind es auch $f(x)$ und $\omega(x)$. Lassen sich nämlich zwei Konstanten k, k_1 von der Art finden, daß $f(x) - k\varphi(x)$ und $\varphi(x) - k_1\omega(x)$ die Konvergenzradien ϱ', ϱ'' besitzen, die beide größer als ϱ sind, so kann man anstatt der zweiten Reihe die andre:

$$k\varphi(x) - kk_1\omega(x)$$

1) Dell'Agnola 1, Borel 65, 73, Desaint 128, 134, Faber 147, Fabry 151, Hadamard 191, 192, 193, Hurwitz 209, Leau 243, 244, Lugaro 593, Pincherle 380, 382, 389, 390, 392.

in Betracht ziehen, die sich von ihr nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet; es folgt dann auf Grund des Satzes des Art. 118, daß der Konvergenzradius der Reihe:

$$\theta(x) = [f(x) - k\varphi(x)] + [k\varphi(x) - kk_1\omega(x)] = f(x) - kk_1\omega(x)$$

nicht kleiner als ϱ' oder ϱ'' und sonach größer als ϱ ist, woraus erhellt, daß $f(x)$ und $\omega(x)$ gleichsingulär sind.

363. Sind:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad \varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

zwei gleichsinguläre Potenzreihen und nähert sich das Verhältnis $\frac{a_{h+1}}{a_h}$ für $\lim h = \infty$ einer endlichen und von Null verschiedenen Grenze, so nähert sich $\frac{b_{h+1}}{b_h}$ derselben Grenze.

Setzt man:

$$\lim_{h=\infty} \frac{a_{h+1}}{a_h} = \frac{1}{c}, \quad b_h = l_h a_h, \tag{1}$$

so ist (Art. 115) $|c| = \varrho$ der Konvergenzradius von $f(x)$ und folglich von $\varphi(x)$, während die Reihe:

$$\psi(x) = f(x) - k\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (1 - kl_h) a_h x^h,$$

wo k eine passend gewählte Konstante ist, einen Konvergenzradius $\varrho' > \varrho$ besitzt und daher für jedes x, dessen absoluter Betrag ξ zwischen ϱ und ϱ' liegt, unbedingt konvergiert. Aus der Konvergenz der Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |1 - kl_h|\,|a_h|\,\xi^h$$

folgt:

$$\lim_{h=\infty} (1 - kl_h) a_h \xi^h = 0;$$

nimmt man also eine positive Größe ε willkürlich an, so läßt sich eine Zahl m so bestimmen, daß für jedes $h > m$:

$$|1 - kl_h|\,\alpha_h \xi^h < \varepsilon \tag{2}$$

ist, wo α_h den absoluten Betrag von a_h bezeichnet. Da andrerseits aus der ersten der Gleichungen (1):

$$\lim_{h=\infty} \frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} = \frac{1}{\varrho}$$

folgt, so läßt sich, wenn man eine Größe σ so wählt, daß $\varrho < \sigma < \xi$ ist, eine Zahl n von der Art finden, daß für jedes $h \geqq n$:

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} > \frac{1}{\sigma}$$

ist. Daraus folgt für $h > n$:

$$\frac{\alpha_h}{\alpha_n} > \frac{1}{\sigma^{h-n}}$$

und somit:

$$\alpha_h \xi^h > \alpha_n \sigma^n \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^h.$$

Es ergibt sich hieraus mit Rücksicht auf (2) für jedes h, das größer ist als m und n:

(3) $$|1 - k l_h| < \frac{\varepsilon}{\alpha_n \sigma^n} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^h;$$

nun ist $\lim\limits_{h=\infty} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^h = 0$, folglich:

$$\lim_{h=\infty} (1 - k l_h) = 0$$

oder auch:

$$\lim_{h=\infty} l_h = \frac{1}{k}.$$

Diese Beziehung läßt sich auch so schreiben:

$$\lim_{h=\infty} l_{h+1} = \frac{1}{k};$$

daraus folgt:

$$\lim_{h=\infty} \frac{l_{h+1}}{l_h} = 1$$

oder auch, wenn man statt l_h seinen Wert einsetzt:

$$\lim_{h=\infty} \frac{b_{h+1}}{b_h} = \lim_{h=\infty} \frac{a_{h+1}}{a_h} = \frac{1}{c}.$$

364. Aus (3) des vorigen Artikels folgt:

$$\left| \frac{1}{k} - l_h \right| < \frac{\eta \tau^h}{2\,|k|},$$

wo:

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_n \sigma^n} = \frac{\eta}{2}, \quad \frac{\sigma}{\xi} = \tau < 1$$

gesetzt worden ist; schreibt man dieselbe Beziehung für einen andren Index $i > h$, so hat man:

$$\left|\frac{1}{k} - l_i\right| < \frac{\eta\tau^i}{2|k|} < \frac{\eta\tau^h}{2|k|}$$

und folglich, wenn man beide Beziehungen voneinander subtrahiert:

$$|l_h - l_i| < \frac{\eta\tau^h}{|k|},$$

wo i irgend einen Index bedeutet, der größer als h ist.

365. Ist:

$$c_0, c_1, c_2, \cdots$$

eine Folge von Größen, die eine endliche und von Null verschiedene Grenze c besitzt, und ist $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho' > \varrho$, wo $\varrho = |c|$ ist, so hat die einfache Reihe $P(x)$, in welche die Doppelreihe:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} a_h \left[\frac{x^h}{c_h} + \frac{x^{h+1}}{c_h c_{h+1}} + \cdots\right]$$

umgeformt werden kann[1]), den Konvergenzradius ϱ, den Fall ausgenommen, in welchem die Beziehung:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} = 0$$

besteht; in diesem Falle ist ihr Konvergenzradius mindestens gleich ϱ' [2]).

Man hat:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\left[x^r \sum_{h=0}^{r} \frac{a_h}{c_h c_{h+1} \cdots c_r}\right] = \sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1}\right]$$

oder auch:

$$(2) \qquad P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r},$$

---

1) Es wird hier vorausgesetzt, daß die c_h derartig sind, daß den Bedingungen für die Umformung der Doppelreihe in eine einfache genügt wird.

2) Pincherle beweist diesen und andre Sätze mit Hilfe seiner distributiven Funktionalrechnung; wir haben die Beweise auf eine elementare Form gebracht, um das Verständnis auch den Lesern zu ermöglichen, die die Prinzipien dieser trefflichen Theorie nicht kennen.

wo:

$$b_r = \sum_{h=0}^{r} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1}.$$

Wählt man eine Größe θ so, daß $\varrho < \theta < \varrho'$ ist, so läßt sich eine Zahl n finden, welche die Eigenschaft hat, daß für jedes $h \geqq n$ $|c_h| < \theta$ wird. Alsdann ist:

$$\sum_{h=n}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} = c_0 c_1 \cdots c_{n-1} \sum_{h=n}^{\infty} a_h c_n c_{n+1} \cdots c_{h-1},$$

$$\left| \sum_{h=n}^{\infty} a_h c_n c_{n+1} \cdots c_{h-1} \right| < \frac{1}{\theta^n} \sum_{h=n}^{\infty} a_h \theta^h;$$

die letzte Reihe ist konvergent, weil der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ größer als θ ist, folglich konvergiert die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1}$$

unbedingt, und b_r nähert sich bei unbeschränkt wachsendem r einer bestimmten endlichen Grenze. Setzen wir:

$$\lim_{r=\infty} b_r = \sum_{h=0}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} = p,$$

so läßt sich, wenn man eine Größe $\xi > |p|$ annimmt, eine Zahl m von der Art finden, daß $|b_r| < \xi$ für jedes $r \geqq m$ wird. Ist andrerseits σ positiv und kleiner als ϱ, so läßt sich eine Zahl n von der Art finden, daß $|c_r| > \sigma$ für jedes $r \geqq n$ wird. Man hat dann, wenn s eine Zahl bedeutet, die nicht kleiner als m oder n ist:

$$\sum_{r=s}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r} = \frac{1}{c_0 c_1 \cdots c_s} \sum_{r=s}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_{s+1} c_{s+2} \cdots c_r},$$

$$\left| \sum_{r=s}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_{s+1} c_{s+2} \cdots c_r} \right| < \xi \sigma^s \sum_{r=s}^{\infty} \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^r.$$

Nun konvergiert bekanntlich $\sum_{r=s}^{\infty} \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^r$ für jedes $\xi < \sigma$, und σ unterliegt der einzigen Bedingung, kleiner als ϱ zu sein, folglich konvergiert die Reihe (2) für jedes $|x| < \varrho$, und ihr Konvergenzradius ist daher mindestens gleich ϱ.

Es bleibt nur noch zu beweisen übrig, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Konvergenzradius von (2) größer als ϱ ist, darin besteht, daß (1) befriedigt wird oder, was dasselbe ist, daß p verschwindet.

Wir nehmen an, (2) sei für:

$$|x| = \xi > \varrho$$

konvergent. Hat man eine Zahl n von der Art bestimmt, daß $|c_h| < \xi$ ist für jedes $h \geqq n$, so ist:

$$\sum_{r=n}^{\infty} |b_r| \frac{\xi^r}{|c_0 c_1 \cdots c_r|} =$$

$$= \frac{\xi^n}{|c_0 c_1 \cdots c_n|} \sum_{r=n}^{\infty} |b_r| \frac{\xi^{r-n}}{|c_{n+1} \cdots c_r|} > \frac{\xi^n}{|c_0 c_1 \cdots c_n|} \sum_{r=n}^{\infty} |b_r|;$$

nun ist die links stehende Reihe konvergent, folglich ist es auch $\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|$, woraus folgt:

$$\lim_{r=\infty} b_r = 0$$

oder $p = 0$.

Ist umgekehrt $p = 0$, so kann man schreiben:

$$\sum_{h=0}^{r} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} + \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} = 0$$

oder auch:

$$b_r = -\sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1};$$

folglich ist:

$$P(x) = -\sum_{r=0}^{\infty} \left[x^r \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_{r+1} c_{r+2} \cdots c_{h-1} \right] = -\sum_{r=0}^{\infty} d_r x^r,$$

wo:

$$d_r = \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_{r+1} c_{r+2} \cdots c_{h-1}.$$

Wählt man eine Größe θ so, daß $\varrho < \theta < \varrho'$ ist, so läßt sich eine Zahl n von der Eigenschaft finden, daß $|c_h| < \theta$ ist für jedes $h \geqq n$. Da andrerseits $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ den Konvergenzradius $\varrho' > \varrho$ hat, so

ist (Art. 128), wenn man eine Größe λ so wählt, daß $\theta < \lambda < \varrho'$ ist, und mit M den größten absoluten Betrag der betrachteten Reihe auf der Kreislinie mit dem Radius λ um den Anfangspunkt bezeichnet:

$$\alpha_h \leqq \frac{M}{\lambda^h}.$$

Daraus folgt für jedes $r \geqq n-1$:

$$|d_r| < M \sum_{h=r+1}^{\infty} \frac{\theta^{h-r-1}}{\lambda^h} = \frac{M}{\theta^{r+1}} \sum_{h=r+1}^{\infty} \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^h = \frac{M}{\lambda^r(\lambda-\theta)},$$

also:

$$\left|\sum_{r=n-1}^{\infty} d_r x^r\right| < \frac{M}{\lambda-\theta} \sum_{r=n-1}^{\infty} \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^r,$$

worin die letzte Reihe für jedes $\xi < \lambda$ konvergiert. Nun unterliegt λ der einzigen Bedingung, kleiner als ϱ' zu sein; folglich darf man schließen, daß der Konvergenzradius von $P(x)$ mindestens ϱ' ist.

366. Sind $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ und $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h^{(1)} x^h$ zwei Potenzreihen, deren Konvergenzradien eine bestimmte Größe ϱ übersteigen, und werden aus ihnen nach dem Verfahren des vorigen Artikels beziehentlich die Reihen:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1}\right],$$

$$P^{(1)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h^{(1)} c_0 c_1 \cdots c_{h-1}\right]$$

abgeleitet, die beide den Konvergenzradius ϱ besitzen mögen, so sind diese beiden Reihen gleichsingulär.

Da der Konvergenzradius von $P(x)$ und von $P^{(1)}(x)$ gleich ϱ ist, so muß:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} \neq 0, \qquad \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(1)} c_0 c_1 \cdots c_{h-1} \neq 0$$

sein. Setzen wir demnach:

$$k = \frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1}}{\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h^{(1)} c_0 c_1 \cdots c_{h-1}} \tag{1}$$

und leiten wir aus der Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (a_h - k a_h^{(1)}) x^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(2)} x^h$$

nach der Methode des vorigen Artikels die Reihe:

$$P^{(2)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h^{(2)} c_0 c_1 \cdots c_{h-1} \right] = P(x) - k P^{(1)}(x)$$

ab, so ist wegen (1):

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(2)} c_0 c_1 \cdots c_{h-1} = 0.$$

Daraus folgt, daß der Konvergenzradius von $P^{(2)}(x)$ größer als ϱ ist, und somit, daß die Reihen $P(x)$, $P^{(1)}(x)$ gleichsingulär sind.

367. Ist eine Reihe:

$$\omega(x) = \sum_{h=0}^{\infty} q_h x^h$$

gegeben, deren Konvergenzradius ϱ sein möge, und ist:

$$\lim_{h=\infty} \frac{q_{h+1}}{q_h} = \frac{1}{c},$$

wo $|c| = \varrho$, so kann jede vorgegebene mit $\omega(x)$ gleichsinguläre Reihe aus einer passend gewählten Reihe, deren Konvergenzradius $> \varrho$ sein möge, vermittels des Verfahrens des vorletzten Artikels erhalten werden.

Es sei irgend eine mit $\omega(x)$ gleichsinguläre Reihe $Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ gegeben; wir wollen beweisen, daß sich eine Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} g_h x^h$ mit einem Konvergenzradius $> \varrho$ bilden läßt, aus der nach dem erwähnten Verfahren die Reihe $Q(x)$ hergeleitet werden kann.

Setzen wir:

(1) $$a_h = l_h q_h,$$

so folgt (Art. 363, 364):

(2) $$\lim_{h=\infty} \frac{l_{h+1}}{l_h} = 1, \qquad |l_h - l_i| < \frac{\eta \tau^h}{|k|} \text{ für } i > h.$$

Wir wählen nun die c_h folgendermaßen:

(3) $$\frac{1}{q_0} = c_0, \; \frac{q_0}{q_1} = c_1, \; \frac{q_1}{q_2} = c_2, \cdots, \; \frac{q_{h+1}}{q_h} = c_h, \cdots,$$

woraus sich ergibt:

(4) $$q_h = \frac{1}{c_0 c_1 c_2 \cdots c_h};$$

ferner setzen wir:

(5) $$\begin{cases} l_0 = g_0 \\ l_1 = g_0 + g_1 c_0 \\ l_2 = g_0 + g_1 c_0 + g_2 c_0 c_1 \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ l_h = g_0 + g_1 c_0 + g_2 c_0 c_1 + \cdots + g_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$g_h = \frac{l_h - l_{h-1}}{c_0 c_1 \cdots c_{h-1}}.$$

Nach der zweiten Formel (2) und nach (4) ist dann:

$$|g_h| < \frac{\eta}{|k|} \frac{\tau^{h-1}}{|c_0 c_1 \cdots c_{h-1}|} = \frac{\eta}{|k|} |q_{h-1}| \tau^{h-1},$$

folglich:

$$\sum_{h=1}^{\infty} |g_h| \xi^h < \frac{\eta \xi}{|k|} \sum_{h=0}^{\infty} |q_h| \tau^h \xi^h.$$

Da $\tau < 1$, so können wir ξ so wählen, daß $\varrho < \xi < \frac{\varrho}{\tau}$ ist; dann ist $\tau \xi < \varrho$, und die Reihe auf der rechten Seite ist konvergent, folglich ist es auch die auf der linken Seite. Demnach ist die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} g_h x^h$ für einen bestimmten Wert von x von größerem absoluten Betrage als ϱ unbedingt konvergent, und ihr Konvergenzradius ist daher größer als ϱ.

Wenden wir auf die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} g_h x^h$ das Verfahren des vorletzten Artikels an, wobei die Konstanten c_h durch die Gleichungen (3) bestimmt sind, so erhalten wir die Reihe:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0 c_1 \cdots c_r} \sum_{h=0}^{r} g_h c_0 c_1 \cdots c_{h-1} \right];$$

es ist aber wegen (4), (5):

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r l_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = Q(x),$$

womit der Satz bewiesen ist.

368. Man verdankt Hadamard den folgenden Satz, der später auf andren Wegen von Borel und von Pincherle bewiesen worden ist[1]):

Werden die singulären Punkte der durch die Potenzreihen:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \qquad Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

erzeugten analytischen Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ allgemein mit u, v bezeichnet, so hat die durch die Reihe:

$$R(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$$

erzeugte analytische Funktion $\psi(x)$ im allgemeinen als singuläre Punkte die Punkte uv.

Wegen der Identität:

$$a_h = \sum_{i=0}^{h} \left[\binom{h}{i} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} \right] \text{ }^{2)}$$

1) Hadamard und Borel bedienen sich krummliniger Integrale, Pincherle benutzt seine Funktionalrechnung. Wir geben im wesentlichen den Beweis von Pincherle wieder, gründen ihn aber ausschließlich auf die hier dargelegten Begriffe.

2) Diese Identität läßt sich auf folgende Art beweisen. Wir setzen:

$$\theta = \sum_{i=0}^{h} \left[\binom{h}{i} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} \right];$$

läßt man $i - s$ an die Stelle des r treten und beachtet man, daß:

$$\binom{i}{r} = \binom{i}{i-r},$$

so hat man:

$$\theta = \sum_{i=0}^{h} \left[\binom{h}{i} \sum_{s=0}^{i} (-1)^{i-s} \binom{i}{s} a_s \right] = \sum_{s=0}^{h} \left[a_s \sum_{i=s}^{h} (-1)^{i-s} \binom{h}{i} \binom{i}{s} \right].$$

kann man schreiben:

$$R(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{h} \sum_{r=0}^{i} \binom{h}{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} b_h x^h =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} \lambda_i b_h x^h = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\lambda_i \sum_{h=i}^{\infty} \binom{h}{i} b_h x^h \right]$$

wo:

$$\lambda_i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r};$$

es ist aber:

$$Q^{(i)}(x) = i! \sum_{h=i}^{\infty} \binom{h}{i} b_h x^{h-i},$$

folglich:

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \lambda_i x^i Q^{(i)}(x).$$

Nehmen wir an, wir hätten von den Reihen:

$$P_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h t^h x^h, \quad Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h, \quad R_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h t^h x^h$$

ausgehend, wo t eine beliebige Größe bezeichnet, die soeben ausgeführten Rechnungen wiederholt, und setzen wir:

Nun ist:

$$\binom{h}{i}\binom{i}{s} = \frac{h!}{i!\,\overline{h-i}!}\,\frac{i!}{s!\,\overline{i-s}!} = \frac{h!}{s!\,\overline{h-s}!}\,\frac{\overline{h-s}!}{\overline{h-i}!\,\overline{i-s}!} = \binom{h}{s}\binom{h-s}{i-s},$$

folglich:

$$\theta = \sum_{s=0}^{h} \left[\binom{h}{s} a_s \sum_{i=s}^{h} (-1)^{i-s} \binom{h-s}{i-s} \right],$$

oder, wenn wir $i-s$ durch j ersetzen:

$$\theta = \sum_{s=0}^{h} \left[\binom{h}{s} a_s \sum_{j=0}^{h-s} (-1)^j \binom{h-s}{j} \right];$$

es ist aber ersichtlich:

$$\sum_{j=0}^{h-s} (-1)^j \binom{h-s}{j} = \begin{cases} 1 \text{ für } s = h, \\ (1-1)^{h-s} = 0 \text{ für } s < h; \end{cases}$$

folglich ist $\theta = a_h$.

$$\mu_i(t) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} t^{i-r},$$

so würde sich ergeben:

$$R_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mu_i(t) x^i Q^{(i)}(x),$$

und es sollte zwischen $R_1(x)$ und $R(x)$ die Beziehung:

$$R_1\left(\frac{x}{t}\right) = R(x)$$

stattfinden. Hieraus folgt ein neuer Ausdruck für $R(x)$, nämlich:

(1) $$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mu_i(t) \frac{x^i}{t^i} Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right).$$

Besitzen im besondern alle b_h den Wert 1, so ist:

(2) $$Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x}, \quad R(x) = P(x),$$

folglich:

$$Q^{(i)}(x) = \frac{i!}{(1-x)^{i+1}},$$

und daher:

$$Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{i!}{\left(1-\frac{x}{t}\right)^{i+1}} = \frac{i!\, t^{i+1}}{(t-x)^{i+1}};$$

setzt man diesen Wert in (1) ein und berücksichtigt man die zweite der Gleichungen (2), so ergibt sich:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mu_i(t) \frac{x^i}{t^i} \frac{i!\, t^{i+1}}{(t-x)^{i+1}} = \frac{t}{t-x} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(t) \left(\frac{x}{t-x}\right)^i,$$

oder:

$$P(x) = (1+y) \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(t) y^i = (1+y) S(y),$$

wo:

(3) $$\frac{x}{t-x} = y$$

gesetzt worden ist.

Es sei σ der Konvergenzradius der Potenzreihe $S(y)$. Der in der y-Ebene liegenden Kreislinie um den Anfangspunkt mit dem Radius σ entspricht in der x-Ebene die durch die Beziehung:

$$\left|\frac{x}{t-x}\right| = \sigma$$

bestimmte Kreislinie γ (Art. 198), die der Ort der Punkte ist, deren Abstände vom Anfangspunkte und von dem Punkte t das konstante Verhältnis σ haben; da ferner (3) $y = 0$ für $x = 0$ ergibt, so entspricht von den beiden Gebieten, in die die x-Ebene durch den Kreis γ zerfällt, dasjenige dem Innengebiete des Kreises σ der y-Ebene, das den Anfangspunkt enthält. Bezeichnet man dieses Gebiet mit C, so kann man demnach sagen, der arithmetische Ausdruck:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(t)\left(\frac{x}{t-x}\right)^i$$

oder, was dasselbe ist, der Ausdruck:

$$\frac{t}{t-x}\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(t)\left(\frac{x}{t-x}\right)^i \tag{4}$$

sei in dem ganzen Bereiche C konvergent; es läßt sich durch Anwendung des Satzes des Art. 111 auf $S(y)$ sogar schließen, daß der Ausdruck (4) in jedem Bereiche innerhalb C gleichmäßig konvergent ist. Da aber dieser Ausdruck die Reihe $P(x)$ in deren Konvergenzkreis darstellt, so stellt er in dem ganzen Bereiche C die durch $P(x)$ erzeugte analytische Funktion $f(x)$ dar. Auf der Kreislinie γ besitzt $f(x)$ mindestens einen singulären Punkt $\bar{u}$, und es ist:

$$\left|\frac{\bar{u}}{t-\bar{u}}\right| = \sigma.$$

Ist andrerseits x ein Punkt innerhalb des Konvergenzkreises von $Q(x)$, so hat man für die Punkte x' einer bestimmten Umgebung von x:

$$Q(x') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\, Q^{(i)}(x)(x'-x)^i$$

und daher, wenn man $\frac{x}{t}$, $\frac{x'}{t}$ für x, x' setzt:

$$Q\left(\frac{x'}{t}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\, Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t^i}\,(x'-x)^i.$$

Der Konvergenzkreis dieser Reihe muß durch einen singulären Punkt der Funktion $\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ gehen; nun ist, wenn $x = \bar{v}$ ein singulärer Punkt von $\varphi(x)$ ist, $x = \bar{v}t$ ein singulärer Punkt von $\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$; der Konvergenzradius der betrachteten Reihe ist daher:

$$\tau = |x - \bar{v}t|.$$

Bezeichnet man mit M den größten Wert von $|S(y)|$ auf der Kreislinie $|y| = \sigma' < \sigma$, mit N denjenigen von $\left|Q\left(\frac{x'}{t}\right)\right|$ auf der Kreislinie:

$$|x' - x| = \tau' < \tau,$$

so ist (Art. 128):

$$|\mu_i(t)| \leqq \frac{M}{\sigma'^i}, \quad \frac{1}{i!}\left|Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t^i}\right| \leqq \frac{N}{\tau'^i},$$

folglich:

$$\frac{1}{i!}\left|\mu_i(t)\, Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t^i}\right| \leqq \frac{MN}{\sigma'^i\tau'^i}.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß die Reihe (1) für $|x| < \sigma'\tau'$, folglich für $|x| < \sigma\tau$ oder auch für:

$$|x| < \left|\frac{\bar{u}}{t - \bar{u}}\right| |x - \bar{v}t|$$

unbedingt konvergiert. Diese Ungleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left|\frac{x}{x - \bar{v}t}\right| < \left|\frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{u}\bar{v} - \bar{v}t}\right|.$$

Betrachten wir also die Kreislinie δ, die durch den Punkt $\bar{u}\bar{v}$ hindurchgeht und in bezug auf welche die Punkte 0, $\bar{v}t$ konjugiert sind, so konvergiert der Ausdruck (1) in demjenigen der beiden Gebiete, in welche δ die Ebene teilt, das den Anfangspunkt enthält. Auf der Kreislinie δ liegt folglich im allgemeinen ein singulärer Punkt von $R(x)$. Lassen wir t stetig variieren, so variiert auch die Kreislinie δ stetig, während dasselbe im allgemeinen hinsichtlich $\bar{u}$ und $\bar{v}$ nicht stattfindet; variiert daher δ innerhalb bestimmter Grenzen, so bleibt der Punkt $\bar{u}\bar{v}$ stets derselbe. Dieser Punkt $\bar{u}\bar{v}$, der unendlich vielen Kreislinien δ gemeinsam ist, muß ein singulärer Punkt von $\psi(x)$ sein.

369. Addiert man zu $f(x)$ eine Funktion $f_1(x)$, die sich in dem Punkte $\bar{u}$ regulär verhält und deren dem Anfangspunkt entsprechendes Element $\sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}x^h$ ist, so erzeugt die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty}(a_h + a_{1h})b_h x^h$$

eine analytische Funktion $\omega(x)$ von der Art, daß:

$$\psi_1(x) = \omega(x) - \psi(x)$$

im allgemeinen in den Punkten $\bar{u}\bar{v}$ regulär ist. Da nämlich $\bar{v}$ ein singulärer Punkt von $\varphi(x)$, $\bar{u}$ aber kein solcher von $f_1(x)$ ist, so hat die Funktion $\psi_1(x)$, welche von $f_1(x)$ und $\varphi(x)$ gerade so abhängt wie $\psi(x)$ von $f(x)$ und $\varphi(x)$, in $\bar{u}\bar{v}$ keine Singularität.

Eine Ausnahme würde der Fall bilden, in welchem es zwei singuläre Punkte $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ und zwei andre $\bar{v}$, $\bar{\bar{v}}$ von der Art gäbe, daß $\bar{u}\bar{v} = \bar{\bar{u}}\bar{\bar{v}}$ wäre; ist dann $\bar{\bar{u}}$ singulär für $f_1(x)$, so kann es $\bar{\bar{u}}\bar{v}$ oder $\bar{u}\bar{v}$ für $\psi_1(x)$ sein.

370. Das im vorigen Artikel gewonnene Ergebnis läßt sich dahin aussprechen, daß die Natur der Singularität $\bar{u}\bar{v}$ im allgemeinen durch die der Singularitäten $\bar{u}$, $\bar{v}$ bestimmt wird.

Hat z. B. $f(x)$ in $\bar{u}$ einen Pol m-ter Ordnung, $\varphi(x)$ in $\bar{v}$ einen Pol n-ter Ordnung, so dürfen wir statt $f(x)$, $\varphi(x)$ die Funktionen:

$$\bar{f}(x) = (m-1)!\frac{\bar{u}^m}{(\bar{u}-x)^m},$$

$$\bar{\varphi}(x) = (n-1)!\frac{\bar{v}^n}{(\bar{v}-x)^n}$$

in Betracht ziehen, deren dem Anfangspunkt entsprechende Elemente (vergl. Art. 135) folgende sind:

$$\bar{P}(x) = \sum_{h=m-1}^{\infty} h(h-1)\cdots(h-m+2)\left(\frac{x}{\bar{u}}\right)^{h-m+1} =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\cdots(h+m-1)\left(\frac{x}{\bar{u}}\right)^h,$$

$$\bar{Q}(x) = \sum_{h=n-1}^{\infty} h(h-1)\cdots(h-n+2)\left(\frac{x}{\bar{v}}\right)^{h-n+1} =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\cdots(h+n-1)\left(\frac{x}{\bar{v}}\right)^h.$$

Die Reihe:

$$\overline{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\cdots(h+m-1)(h+1)\cdots(h+n-1)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h$$

erzeugt eine Funktion $\overline{\psi}(x)$, die in $\overline{u}\overline{v}$, wie wir jetzt beweisen werden, einen Pol $m+n-1$-ter Ordnung besitzt.

Der Satz ist offenbar richtig für $n=1$, weil ja dann:

$$\overline{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\cdots(h+m-1)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h = (m-1)!\,\frac{(\overline{u}\,\overline{v})^m}{(\overline{u}\,\overline{v}-x)^m}$$

ist; es genügt demnach, ihn durch vollständige Induktion zu beweisen.

Es ist[1]):

$$\begin{aligned}(h+m)(h+m+1)\cdots(h+m+n-2) &= (h+1)(h+2)\cdots(h+n-1) + \\ &+ \binom{n-1}{1}(h+1)(h+2)\cdots(h+n-2)(m-1) + \\ &+ \binom{n-1}{2}(h+1)(h+2)\cdots(h+n-3)(m-1)m + \cdots + \\ &+ \binom{n-1}{n-2}(h+1)(m-1)m(m+1)\cdots(m+n-4) + \\ &+ (m-1)m(m+1)\cdots(m+n-3),\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}\overline{R}(x) &= \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\cdots(h+m-1)(h+m)\cdots(h+m+n-2)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h - \\ &- \binom{n-1}{1}(m-1)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\cdots(h+m-1)(h+1)\cdots(h+n-2)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h - \\ &- \binom{n-1}{2}(m-1)\,m\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\cdots(h+m-1)\,(h+1)\cdots \\ &\cdots(h+n-3)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h - \cdots - \binom{n-1}{n-2}(m-1)m\cdots(m+n-4)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\cdots \\ &\cdots(h+m-1)(h+1)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h - (m-1)\,m(m+1)\cdots \\ &\cdots(m+n-3)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\cdots(h+m-1)\left(\frac{x}{\overline{u}\,\overline{v}}\right)^h.\end{aligned}$$

---

1) Capelli, Lezioni di algebra complementare, Neapel 1895, S. 99, wo man statt x, y, n beziehentlich $h+1$, $m-1$, $n-1$ setzen muß.

Das erste Glied rechts ist das dem Anfangspunkte entsprechende Element der analytischen Funktion:

$$(m+n-2)!\,\frac{(\overline{u}\,\overline{v})^{m+n-1}}{(\overline{u}\,\overline{v}-x)^{m+n-1}},$$

die ersichtlich in $\overline{u}\overline{v}$ einen Pol $m+n-1$-ter Ordnung besitzt; was die übrigen Glieder betrifft, so sind die in denselben auftretenden Reihen diejenigen, die man aus $\overline{R}(x)$ erhalten würde, wenn man $n-1, n-2, \cdots$ für m setzte; sie sind folglich — da der Satz für alle Werte von n als gültig vorausgesetzt wird, die kleiner sind als der in Betracht gezogene — Elemente analytischer Funktionen, die in $\overline{u}\overline{v}$ beziehentlich einen Pol $n-2$-ter, $n-3$-ter, $\cdots$ Ordnung besitzen. Demnach erzeugt der ganze Ausdruck eine analytische Funktion $\overline{\psi}(x)$, die in $\overline{u}\overline{v}$ genau einen Pol $m+n-1$-ter Ordnung besitzt.

Dasselbe läßt sich nach dem im vorigen Artikel entwickelten Prinzip von der im Sinne des Satzes in Art. 368 von $f(x)$ und $\varphi(x)$ abhängenden Funktion $\psi(x)$ behaupten.

371. Hurwitz hat einen dem Hadamardschen analogen Satz geliefert, der auf andrem Wege auch von Pincherle bewiesen worden ist[1]):

Werden mit u, v allgemein die singulären Punkte der durch die Potenzreihen:

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{a_h}{x^{h+1}},\quad Q\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{b_h}{x^{h+1}}$$

erzeugten analytischen Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ bezeichnet, so hat die durch die Potenzreihe:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{c_h}{x^{h+1}},$$

wo:

$$c_h=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}a_{h-i}b_i=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}a_i b_{h-i},$$

erzeugte analytische Funktion $\psi(x)$ im allgemeinen als singuläre Punkte die Punkte u, v, $u+v$.

---

1) Wir geben auch hier den auf elementare Form gebrachten Beweis Pincherles wieder.

Es ist:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}\frac{a_i b_{h-i}}{x^{h+1}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left[a_i\sum_{h=i}^{\infty}\binom{h}{i}\frac{b_{h-i}}{x^{h+1}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+i}{i}\frac{b_h}{x^{h+i+1}},$$

$$\varphi^{(i)}(x)=(-1)^i\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\cdots(h+i)\frac{b_h}{x^{h+i+1}}=$$

$$=(-1)^i i!\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+i}{i}\frac{b_h}{x^{h+i+1}},$$

folglich:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{a_i}{i!}\varphi^{(i)}(x).$$

Ferner ist:

$$\varphi^{(i)}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\varphi^{(i+r)}(x-t)\,t^r, \tag{1}$$

also:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i!\,r!}a_i\varphi^{(i+r)}(x-t)\,t^r,$$

oder auch, wenn $i+r=n$ gesetzt wird:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a_i t^{n-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n(t)\frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!}, \tag{2}$$

wo:

$$\mu_n(t)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a_i t^{n-i}$$

ist. Nimmt man im besondern:

$$b_0=1,\ b_1=b_2=\cdots=0$$

oder $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ an, so hat man $c_h=a_h$ und folglich:

$$\psi(x)=f(x);$$

da aber in diesem Falle:

$$\varphi^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

ist, so folgt wegen (2):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu_n(t) \frac{1}{(x-t)^{n+1}}.$$

Diese Reihe konvergiert außerhalb desjenigen Kreises um t, der in seinem Innern und auf seinem Umfang alle singulären Punkte von $f(x)$ enthält; bezeichnet man also mit $\bar{u}$ einen von denjenigen unter den singulären Punkten, welche den größten Abstand von t haben, so besitzt die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t) y^n$$

den Konvergenzradius:

$$\sigma = \frac{1}{|t-u|}.$$

Ist andrerseits $\bar{v}$ ein gewisser, für verschiedene Punkte t möglicherweise verschiedener singulärer Punkt von $\varphi(x)$, so konvergiert die Reihe (1) innerhalb des Kreises mit dem Radius:

$$\tau = |x - t - \bar{v}|.$$

Wiederholen wir das in Art. 368 angewendete Schlußverfahren, so läßt sich daraus folgern, daß der Konvergenzradius der Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t) \frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!} z^n$$

mindestens $\sigma\tau$ ist und daß folglich die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t) \frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!}$$

für $1 < \sigma\tau$ oder auch für:

$$1 < \frac{|x-t-\bar{v}|}{|t-\bar{u}|}$$

konvergiert.

Die Gleichung:

$$\frac{|x-t-\bar{v}|}{|t-\bar{u}|} = 1$$

stellt einen Kreis um $t + \bar{v}$ mit dem Radius $|t - \bar{u}|$ dar; man ersieht leicht, daß dieser Kreis durch den Punkt $\bar{u} + \bar{v}$ hindurchgeht. Daraus folgert man ähnlich wie in Art. 368, daß $\bar{u} + \bar{v}$ im allgemeinen ein singulärer Punkt von $\psi(x)$ ist.

Da ferner der Anfangspunkt sowohl für $f(x)$ wie für $\varphi(x)$ ein singulärer Punkt ist, so darf $\bar{u} = 0$ oder auch $\bar{v} = 0$ genommen werden, woraus folgt, daß $\bar{v}$ bezw. $\bar{u}$ singuläre Punkte für $f(x)$ sind.

372. Hadamards Satz (Art. 368) gestattet verschiedene Erweiterungen, von denen hier eine ganz einfache angegeben werden möge.

Ist:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad \mathfrak{P}_k(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^k x^h,$$

so folgt aus dem angeführten Satze, daß die singulären Punkte der durch $\mathfrak{P}_k(x)$ erzeugten Funktion diejenigen der durch $\mathfrak{P}(x)$ erzeugten Funktion sind oder die Punkte, die man aus diesen erhält, wenn man ihre Produkte zu je 2, zu je 3, $\cdots$, zu je k mit Wiederholung bildet. Daraus folgt:

Ist:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad \mathfrak{Q}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} F(a_h) x^h,$$

wo $F(t)$ ein Polynom in t vom Grade k bedeutet, so sind die singulären Punkte der durch die Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ erzeugten Funktion diejenigen der durch $\mathfrak{P}(x)$ erzeugten Funktion oder die Punkte, die man aus diesen erhält, wenn man ihre Produkte zu je 2, zu je 3, $\cdots$, zu je k mit Wiederholung bildet.

373. Borel hat den folgenden merkwürdigen Satz aufgestellt:

Ist eine Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ gegeben, so läßt sich stets eine Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ mit rationalen reellen oder komplexen Koeffizienten so bilden, daß die Differenz der beiden Reihen eine ganze Funktion darstellt.

Man braucht nur:

$$b_h = \frac{1}{10^{h^2}} [E(10^{h^2} a_h') + iE(10^{h^2} a_h'')]$$

zu nehmen, wo:

$$a_h = a_h' + i a_h''$$

ist und E die S. 252 angegebene Bedeutung hat. Es ist nämlich:

$$| a_h - b_h | < \frac{2}{10^{h^2}},$$

folglich:

$$\sqrt[h]{|a_h - b_h|} < \frac{\sqrt[h]{2}}{10^h}$$

und daraus schließlich:

$$\lim_{h=\infty} \sqrt[h]{|a_h - b_h|} = 0;$$

demnach ist (Art 113):

$$\sum_{h=0}^{\infty} (a_h - b_h) x^h$$

eine ganze Funktion.

Offenbar haben die beiden Reihen $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ und $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ gleichen Konvergenzradius und sind gleichsingulär.

Über die singulären Punkte der analytischen Funktionen[1]).

374. Das Problem, die singulären Punkte einer durch eins ihrer Elemente gegebenen analytischen Funktion zu bestimmen, ist noch weit von seiner Lösung entfernt und bietet ohne Zweifel die erheblichsten Schwierigkeiten. Nicht einmal das einfachere Problem ist allgemein gelöst worden, die auf dem Konvergenzkreise liegenden singulären Punkte einer Potenzreihe zu bestimmen. Diese Probleme sind aber in den letzten Jahren Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen, die zu mannigfachen und bedeutenden Ergebnissen geführt haben. Wir beabsichtigen, aus diesen Ergebnissen die einfachsten auszuwählen und systematisch zusammenzustellen, und werden, um unsere Aufgabe zu erleichtern, versuchen, sie möglichst unter einer Anzahl von grundlegenden Fragen unterzubringen. Dergleichen dürften folgende sein:

1. die Bedingungen aufzusuchen, unter denen ein gegebener Punkt für eine Potenzreihe singulär oder nicht singulär oder singulär von einer gegebenen Art ist, oder mit gegebenen Singularitäten behaftete Potenzreihen zu bilden;

---

1) Borel 50, 59, 70, 71, 72, 73, 533, Chessin 122, Desaint 131, 134, Dienes 543a, Faber 145, 147, 544a, 546, Fabry 150, 151, 152, 153, Fatou 547, 548, Hadamard 184, 186, 187, Jahraus 574, Koenig 229, Lasker 241, Leau 243, 244, 246, 247, 248, Lecornu 249, Lerch 258, 260, Lindelöf 270, 272, 273, Méray 301, Mittag-Leffler 306, 329, 330, 332, Osgood 339, 343, Painlevé 355, Pompeiu 617, Pringsheim 402, 404, 405, 406, 408, 409, 411, 413, 417, 418, 620, Le Roy 428, 430, 431, Servant 455, Stäckel 462, Stieltjes 465, Stolz 637, Thomé 480, Vivanti 506, Zoretti 672.

2. hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß alle Punkte des Umfangs des Konvergenzkreises einer Potenzreihe singulär sind;

3. zu untersuchen, wie sich eine Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreise verhält;

4. gewisse Gebiete zu bestimmen, in denen eine analytische Funktion keine singulären Punkte hat;

5. analytische Funktionen mit einer endlichen Anzahl singulärer Punkte oder mit bestimmten singulären Punkten zu bilden oder die singulären Punkte einer analytischen Funktion unter gewissen Umständen zu bestimmen;

6. die Beziehungen zu untersuchen, die in einem singulären Punkte zwischen einem arithmetischen Ausdrucke und der durch ihn dargestellten analytischen Funktion bestehen.

1. Frage.

375. Lecornu hat 1887 folgenden Satz aufgestellt:

Besitzt die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ auf dem Konvergenzkreise einen einzigen singulären Punkt u, so ist $\lim\limits_{h=\infty} \frac{a_h}{a_{h+1}} = u$ und umgekehrt.

Hadamard bemerkte, daß dieser Satz nicht immer zutrifft.

Der erste Teil gilt unzweifelhaft, solange u ein Pol ist.

Bezeichnet man mit m die Ordnung des Poles u, mit $f(x)$ die von $\mathfrak{P}(x)$ erzeugte analytische Funktion, so hat man:

$$f(x) = \frac{A_m}{(u-x)^m} + \frac{A_{m-1}}{(u-x)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{u-x} + g(x),$$

wo $g(x)$ eine in u reguläre Funktion ist, die alle übrigen Singularitäten von $f(x)$ besitzt. Da $f(x)$ auf dem Kreise vom Radius $\varrho = |u|$ um den Anfangspunkt keine anderen Singularitäten als u hat, so ist die Funktion $g(x)$ auf diesem Kreise regulär, und ihr dem Anfangspunkt entsprechendes Element hat einen Konvergenzradius $\varrho' > \varrho$. Setzen wir nun:

$$\varphi(x) = \frac{A_m}{(u-x)^m} + \frac{A_{m-1}}{(u-x)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{u-x},$$

so hat das dem Anfangspunkte entsprechende Element $\mathfrak{R}(x)$ dieser Funktion den Konvergenzradius ϱ; es ist ferner:

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{A_m}{(m-1)!\, u^m} \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\cdots(h+m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^h +$$

$$+ \frac{A_{m-1}}{(m-2)!\, u^{m-1}} \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\cdots(h+m-2)\left(\frac{x}{u}\right)^h + \cdots + \frac{A_1}{u} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{x}{u}\right)^h =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{x}{u}\right)^h \left[\frac{A_m}{(m-1)!\, u^m} (h+1)(h+2)\cdots(h+m-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{m-1}}{(m-2)!\, u^{m-1}} (h+1)(h+2)\cdots(h+m-2) + \cdots + \frac{A_1}{u} \right] = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h,$$

woraus folgt:

$$\frac{b_h}{b_{h+1}} = \frac{\dfrac{1}{u^{h+m}} \left[\dfrac{A_m}{(m-1)!} (h+1)\cdots(h+m-1) + \cdots + A_1 u^{m-1} \right]}{\dfrac{1}{u^{h+m+1}} \left[\dfrac{A_m}{(m-1)!} (h+2)\cdots(h+m) + \cdots + A_1 u^{m-1} \right]},$$

und somit:

$$\lim_{h=\infty} \frac{b_h}{b_{h+1}} = u.$$

Nun sind die beiden Reihen $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{R}(x)$ gleichsingulär, weil der Konvergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{R}(x)$ größer ist als ihr gemeinsamer Konvergenzradius; folglich ist (Art. 363):

$$\lim_{h=\infty} \frac{a_h}{a_{h+1}} = \lim_{h=\infty} \frac{b_h}{b_{h+1}} = u.$$

Dagegen trifft der Satz nicht immer zu, wenn u kein Pol ist.

Auch der zweite Teil des Satzes ist nicht allgemein richtig. Es läßt sich indessen der folgende Satz beweisen[1]):

Nähert sich $\dfrac{a_h}{a_{h+1}}$ für $\lim h = \infty$ einer Grenze u, so ist u ein singulärer Punkt.

376. Es sei ein Punkt auf dem Konvergenzkreise einer Potenzreihe gegeben; wir wollen entscheiden, ob er ein singulärer Punkt ist oder nicht.

Diese Frage wird in einem besonderen Falle durch den folgenden Satz beantwortet:

---

1) Siehe Hadamard 184, S. 25.

Hat eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten einen endlichen Konvergenzradius ϱ, so ist für sie der Punkt $x = \varrho$ ein singulärer Punkt.

Es sei wie gewöhnlich:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

die betrachtete Reihe. Um den Anfangspunkt werde mit einem Radius $c < \varrho$ ein Kreis beschrieben, mit $x = x_0$ aber irgend ein Punkt des Umfangs dieses Kreises bezeichnet, während $x = c$ ihr Schnittpunkt mit dem positiven Teile der reellen Achse ist. Dann gilt:

$$\mathfrak{P}(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(c)(x - c)^r, \tag{1}$$

$$\mathfrak{P}(x \mid x_0) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \mathfrak{P}^{(r)}(x_0)(x - x_0)^r, \tag{2}$$

ferner:

$$|\mathfrak{P}^{(r)}(x_0)| = \left| \sum_{h=0}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\cdots(h+1) a_{h+r} x_0^h \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{h=0}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\cdots(h+1) a_{h+r} c^h = \mathfrak{P}^{(r)}(c);$$

die Koeffizienten von (1) sind demnach nicht kleiner als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten von (2). Daraus folgt, daß der Konvergenzradius $\theta(c)$ von (1) nicht größer ist als derjenige $\theta(x_0)$ von (2):

$$\theta(c) \leqq \theta(x_0).$$

Da nun die auf dem Konvergenzkreise liegenden singulären Punkte eine abgeschlossene Menge bilden, so besitzt die Gesamtheit ihrer Abstände vom Punkte c ein Minimum δ. Nehmen wir an, der Punkt $x = \varrho$ sei nicht singulär, so ist $\delta > \varrho - c$; ist nun x_1 ein von c um δ abstehender singulärer Punkt, und wählen wir x_0 gerade auf dem Radius $0x_1$, so ist:

$$\theta(c) = \delta, \; \theta(x_0) = |x_1 - x_0| = \varrho - c < \delta,$$

folglich $\theta(x_0) < \theta(c)$, was unmöglich ist. Also ist $x = \varrho$ ein singulärer Punkt.

377. Wir nehmen die Frage des vorigen Artikels wieder auf. Der Einfachheit halber sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ gleich Eins, der zu untersuchende Punkt $x = 1$.

Wir setzen:

$$x = -\frac{t}{t+1}$$

oder auch:

$$t = -\frac{x}{x+1}\text{[1]},$$

so daß:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_h \frac{t^h}{(t+1)^h} = \varphi(t)$$

und für $|t| < 1$ (Art. 135):

$$\varphi(t) = a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h a_h t^h \sum_{k=0}^{\infty} \binom{h+k-1}{k} (-1)^k t^k$$

ist; diese Doppelreihe läßt sich unter Anwendung des Hilfssatzes von Weierstraß (Art. 132) auf die Form:

$$\varphi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k \tag{1}$$

bringen, wo:

$$b_k = (-1)^k \sum_{h=1}^{k} \binom{k-1}{h-1} a_h$$

ist. Dem Kreise $|x| = 1$ entspricht in der t-Ebene die Linie $\left|\frac{t}{t+1}\right| = 1$ oder $|t| = |t+1|$, d. h. der Ort der von den Punkten $0, -1$ gleichweit entfernten Punkte, also die Gerade $\Re t = -\frac{1}{2}$; dem Innern dieses Kreises entspricht die Gesamtheit der Punkte, für die $|t| < |t+1|$ ist, d. h. der Teil der Ebene, der sich rechts von dieser Geraden befindet; dem Punkte $x = 1$ entspricht der Punkt $t = -\frac{1}{2}$.

---

1) Die Transformation:

$$t = \frac{x}{1-x},$$

die man hieraus durch Veränderung des Vorzeichens von x erhält, wird gewöhnlich als Eulersche Transformation bezeichnet.

Ist $x = 1$ singulär für $f(x)$, so ist es $t = -\frac{1}{2}$ für $\varphi(t)$; der Konvergenzradius von (1) ist alsdann genau $\frac{1}{2}$, und man hat:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[k]{|b_k|} = 2.$$

Im entgegengesetzten Falle ist:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[k]{|b_k|} < 2.$$

378. Allgemeiner läßt sich sagen:
Setzt man:

$$x = -\frac{\gamma t}{t+1},$$

wo γ eine beliebige positive Größe bedeutet, so erhält man:

$$\varphi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k,$$

wo:

$$b_k = (-1)^k \sum_{h=1}^{k} \binom{k-1}{h-1} a_h \gamma^h$$

ist. Dem Kreise $|x| = 1$ entspricht der Kreis:

$$\frac{|t|}{|t+1|} = \frac{1}{\gamma},$$

d. i. der Ort der Punkte, deren Entfernungen von den Punkten 0, -1 das konstante Verhältnis $\frac{1}{\gamma}$ besitzen; dem Innern des Kreises $|x| = 1$ entspricht von den beiden Teilen, in welche die t-Ebene durch den transformierten Kreis geteilt wird, derjenige, welcher den Punkt $t = 0$ enthält; dem Punkte $x = 1$ entspricht der Punkt $t = -\frac{1}{\gamma+1}$. Es ergibt sich hieraus als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $x = 1$ singulär ist:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[k]{|b_k|} = \gamma + 1.$$

379. Eine Folge der soeben gewonnenen Ergebnisse bildet der Satz: Liegen die die Koeffizienten a_h darstellenden Punkte mit Ausnahme einer endlichen Anzahl innerhalb oder auf den Schenkeln eines rechten Winkels mit dem Scheitel im

Anfangspunkte, so ist $x = 1$ ein singulärer Punkt für die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ (deren Konvergenzradius immer $= 1$ angenommen wird).

Setzt man:

$$a_h = \alpha_h e^{i \delta_h},$$

so läßt sich die Voraussetzung des Satzes analytisch dadurch ausdrücken, daß für alle Werte von p, q, die größer sind als eine bestimmte Zahl n, die Relation:

$$(1) \qquad \cos(\delta_p - \delta_q) \geqq 0$$

stattfindet. Nun ist:

$$b_{2m} = \sum_{h=1}^{2m} \binom{2m-1}{h-1} \alpha_h \cos \delta_h + i \sum_{h=1}^{2m} \binom{2m-1}{h-1} \alpha_h \sin \delta_h,$$

mithin:

$$|b_{2m}|^2 = \sum_{h=1}^{2m} \binom{2m-1}{h-1}^2 \alpha_h^2 + 2 \sum_{\substack{h,\,k=1 \\ h<k}}^{2m} \binom{2m-1}{h-1} \binom{2m-1}{k-1} \alpha_h \alpha_k \cos(\delta_h - \delta_k).$$

Nimmt man der Einfachheit halber alle Koeffizienten a_h, deren Index h die Zahl n nicht übersteigt, gleich Null an (was weder auf den Konvergenzradius noch auf die Singularitäten von Einfluß ist), so erhält man, wenn die Bedingung (1) erfüllt ist:

$$|b_{2m}|^2 \geqq \binom{2m-1}{m-1}^2 \alpha_m^2$$

oder:

$$|b_{2m}| \geqq \binom{2m-1}{m-1} \alpha_m = \frac{1}{2} \frac{(2m)!}{(m!)^2} \alpha_m,$$

mithin:

$$\sqrt[2m]{|b_{2m}|} \geqq \frac{1}{\sqrt[2m]{2}} \frac{(2m!)^{\frac{1}{2m}}}{(m!)^{\frac{1}{m}}} \sqrt{\alpha_m^{\frac{1}{m}}}.$$

Nun ist (vgl. Art. 259):

$$\lim_{m=\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{m=\infty} \frac{(2m!)^{\frac{1}{2m}}}{2m} = \frac{1}{e},$$

mithin:

$$\lim_{m=\infty} \frac{(2m!)^{\frac{1}{2m}}}{(m!)^{\frac{1}{m}}} = 2;$$

ferner ist:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[2m]{2} = 1.$$

Da überdies (Art. 113):

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \alpha_m^{\frac{1}{m}} = 1$$

ist, so ergibt sich daraus:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |b_{2m}|^{\frac{1}{2m}} \geqq 2,$$

folglich:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |b_m|^{\frac{1}{m}} \geqq 2.$$

Dieser Grenzwert kann aber überhaupt nicht größer als 2 sein (vgl. Art. 377), also:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |b_m|^{\frac{1}{m}} = 2,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

380. Um zu erkennen, ob ein Punkt singulär ist, bietet sich noch eine andre Methode, die wegen der Folgerungen dargelegt zu werden verdient, zu denen sie Anlaß gibt.

Wir setzen den Konvergenzradius wiederum $= 1$ voraus und untersuchen, ob der Punkt $x = 1$ singulär ist.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen reellen Wert β an, der positiv und kleiner als 1 ist; der Punkt 1 wird dann singulär oder nicht singulär sein, je nachdem die in bezug auf den Punkt β transformierte Reihe einen Konvergenzradius besitzt, der gleich oder größer ist als $1 - \beta$, oder auch (Art. 113), je nachdem für die Koeffizienten a'_m dieser Reihe $\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a'_m|} = \frac{1}{1-\beta}$ oder $< \frac{1}{1-\beta}$ ist. Die Frage ist auf diese Weise zwar theoretisch erledigt; allein, da:

$$a'_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\beta) = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{m+h}{m} a_{m+h} \beta^h$$

ist, so erhebt sich insofern eine wesentliche Schwierigkeit, als a'_m von einer unendlichen Anzahl von Koeffizienten der gegebenen Reihe abhängig ist. Diese Schwierigkeit läßt sich indessen umgehen, weil sich ja der Ausdruck für a'_m durch die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern ersetzen läßt, ohne daß sich seine obere Grenze verändert.

Wir setzen, wie bisher, $|a_h| = \alpha_h$. Da der Konvergenzradius der gegebenen Reihe 1 ist, so gilt für jedes hinreichend große h:

$$\alpha_h < (1+\varepsilon)^h.$$

Beachten wir ferner, daß $\binom{m+h}{m} m^m h^h$ ein Glied der Entwicklung von $(m+h)^{m+h}$ ist, so ist:

$$\binom{m+h}{m} < \frac{(m+h)^{m+h}}{m^m h^h},$$

also:

$$\binom{m+h}{m} \alpha_{m+h} \beta^h < \frac{(m+h)^{m+h}}{m^m h^h} (1+\varepsilon)^{m+h} \beta^h,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\sqrt[m]{\binom{m+h}{m} \alpha_{m+h} \beta^h} < (1+\varepsilon)\left(1+\frac{h}{m}\right)\left[(1+\varepsilon)\left(1+\frac{m}{h}\right)\beta\right]^{\frac{h}{m}}.$$

Wir denken uns jetzt ε so gewählt, daß $(1+\varepsilon)\beta < 1$ wird. Nehmen wir nun eine Größe k so an, daß:

$$(1+\varepsilon)\beta < k < 1$$

ist, so läßt sich eine Größe H von der Art angeben, daß für jedes $\frac{h}{m} > H$:

$$(1+\varepsilon)\left(1+\frac{m}{h}\right)\beta < k$$

wird, und ebenso eine Größe H' von der Art, daß für jedes $\frac{h}{m} > H'$:

$$(1+\varepsilon)\left(1+\frac{h}{m}\right)k^{\frac{h}{m}} < \frac{k}{1-\beta}$$

wird[1]). Man hat dann für ein hinreichend großes $\frac{h}{m}$:

---

1) Setzen wir zur Abkürzung $1+\frac{h}{m} = n$, so ist:

$$\left(1+\frac{h}{m}\right)k^{\frac{h}{m}} = \frac{1}{k}\, n k^n.$$

Ist nun $k < 1$, ν eine bestimmte positive Größe, und nimmt man eine Größe l derart an, daß $k^\nu < l < 1$, so ist für ein hinreichend großes n:

$$\frac{(n+\nu)k^{n+\nu}}{n k^n} = \left(1+\frac{\nu}{n}\right)k^\nu < l < 1,$$

$$\sqrt[m]{\binom{m+h}{m}\alpha_{m+h}\beta^h} < (1+\varepsilon)\left(1+\frac{h}{m}\right)k^{\frac{h}{m}} < \frac{k}{1-\beta},$$

und unter der Voraussetzung, daß die soeben hingeschriebene Ungleichung für jedes $h \geqq n$ gilt:

$$\sum_{h=n}^{\infty}\binom{m+h}{m}\alpha_{m+h}\beta^h < \sum_{h=n}^{\infty}\binom{m+h}{m}(1+\varepsilon)^{m+h}\beta^h =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{m+n+i}{m}(1+\varepsilon)^{m+n+i}\beta^{n+i} =$$

$$= \binom{m+n}{m}(1+\varepsilon)^{m+n}\beta^n\sum_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{m}{n+1}\right)\left(1+\frac{m}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n+i}\right)(1+\varepsilon)^i\beta^i <$$

$$< \left(\frac{k}{1-\beta}\right)^m\sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(1+\frac{m}{n}\right)(1+\varepsilon)\beta\right]^i < \left(\frac{k}{1-\beta}\right)^m\sum_{i=0}^{\infty}k^i = \left(\frac{k}{1-\beta}\right)^m\frac{1}{1-k},$$

woraus folgt:

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\sum_{h=n}^{\infty}\binom{m+h}{m}\alpha_{m+h}\beta^h} \leqq \frac{k}{1-\beta} < \frac{1}{1-\beta}.$$

Daraus ergibt sich (Art. 118), daß die beiden Grenzwerte:

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{|a'_m|}, \quad \overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|\sum_{h=0}^{n-1}\binom{m+h}{m}a_{m+h}\beta^h\right|},$$

wo sich n zugleich mit m ändert, zugleich $= \frac{1}{1-\beta}$ oder $< \frac{1}{1-\beta}$ sind.

381. Das gewonnene Ergebnis führt, ganz abgesehen davon, daß es die Lösung unserer Aufgabe erleichtert, zur Bildung von Potenzreihen mit vorgegebenen Singularitäten[1]).

---

folglich:

$$\frac{(n+2\nu)k^{n+2\nu}}{nk^n} < l^2,$$

usw. Es nimmt daher nk^n ab, sobald n über einen bestimmten Grenzwert hinaus wächst; nimmt ferner n um ν, 2ν, 3ν, $\cdots$ zu, so nimmt nk^n rascher als die Glieder einer fallenden geometrischen Reihe ab, strebt also der Null zu.

1) Durch diese Fassung soll nicht etwa ausgeschlossen sein, daß die Reihe außer den vorgegebenen Singularitäten noch andre habe; dieser Fall tritt z. B. sogar notwendigerweise ein, wenn die vorgegebenen singulären Punkte eine nicht abgeschlossene Menge bilden.

Wir setzen der Kürze halber:

$$\sum_{h=0}^{n-1} \binom{m+h}{m} a_{m+h} \beta^h = a''_m.$$

Hat die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ den singulären Punkt $x = 1$, so hat die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h x^h$, in der $\bar{a}_h = e^{-h\omega i} a_h$ ist, den singulären Punkt $x = e^{\omega i}$. Wählt man auf dem nach diesem singulären Punkt gehenden Radius den Punkt $\beta e^{\omega i}$, und bildet man den entsprechenden Ausdruck $\bar{a}''_m$, so ist, wie man leicht sieht, $|\bar{a}''_m| = |a''_m|$. Da ferner nach der gemachten Voraussetzung:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a''_m|} = \frac{1}{1-\beta}$$

ist, so können wir auf unendlich viele Weisen derartige Folgen:

(1) $$a''_{m_1}, a''_{m_2}, \cdots$$

finden, daß die Folge der m-ten Wurzeln der absoluten Beträge der Glieder den Wert $\frac{1}{1-\beta}$ zur Grenze hat. Es seien nun auf dem Konvergenzkreise r Punkte $e^{\omega_1 i}, e^{\omega_2 i}, \cdots, e^{\omega_r i}$ gegeben, die singuläre Punkte der zu bildenden Reihe sein sollen. Wir bilden, falls es möglich ist, aus den Koeffizienten der gegebenen Reihe r Folgen (1), die wir $S_1, S_2, \cdots, S_r$ nennen wollen, und zwar so, daß je zwei derselben kein gemeinsames Element besitzen. Werden sämtliche in S_s vorkommenden Koeffizienten a_h mit $e^{-h\omega_s i}$ multipliziert, so besitzt die Summe der so gebildeten Reihen offenbar die verlangten singulären Punkte.

Ebenso verfährt man, wenn die Menge der gegebenen Punkte, nicht endlich, sondern abzählbar ist. Ist diese Menge im besonderen auf dem ganzen Konvergenzkreise überall dicht, so erhalten wir eine Reihe, für welche sämtliche Punkte des Umfangs des Konvergenzkreises singulär sind.

Nehmen wir z. B. die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} x^h$, die den singulären Punkt $x = 1$ hat, und versuchen wir, aus ihr eine Reihe mit den singulären Punkten $e^{\omega_1 i}, \cdots, e^{\omega_r i}$ herzuleiten. Wir zerlegen die Reihe in die Summe von r Reihen $P_1, P_2, \cdots, P_r$, wo P_s die Glieder von der Beschaffenheit enthält, daß die höchste im Exponenten von x enthaltene Potenz von 2 einen Exponenten hat, der nach dem Modul r

kongruent zu s ist. Jede dieser Reihen hat den Konvergenzradius 1 und folglich (Art. 376) den singulären Punkt $x = 1$; es lassen sich daher aus den Koeffizienten dieser einzelnen Reihen Folgen S_s mit der gemeinsamen Grenze $\frac{1}{1-\beta}$ bilden. Multipliziert man nun die Glieder von P_s mit den entsprechenden Potenzen von $e^{-\omega_s i}$, so besitzt offenbar die entstehende Reihe den singulären Punkt $e^{\omega_s i}$, folglich besitzt die Summe der so gewonnenen Reihen die verlangten singulären Punkte. Ist z. B. $\omega_s = \frac{2\pi s}{r}$, so sind die gegebenen Punkte die Ecken eines regelmäßigen n-ecks, von dem eine Ecke $x = 1$ ist, und die Reihe läßt sich $\sum_{h=0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i h q}{r}} x^h$ schreiben, wo 2^q die höchste in h enthaltene Potenz von 2 ist.

Zerlegen wir dagegen dieselbe Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} x^h$ in unendlich viele Reihen $P_0, P_1, P_2, \cdots$, wo P_s die Gesamtheit der Glieder ist, deren Exponent durch 2^s, nicht aber durch 2^{s+1} teilbar ist, und multiplizieren wir, falls ω eine zu 2π inkommensurable Größe ist, die Glieder von P_s mit den entsprechenden Potenzen von $e^{-s\omega i}$, so sind für die nun gewonnene Reihe alle Punkte $e^{s\omega i}$ singuläre Punkte; da diese aber auf dem Konvergenzkreise überall dicht sind, so sind alle Punkte dieses Kreises singulär.

382. Aus diesen Darlegungen lassen sich noch weitere Folgerungen ziehen.

Nehmen wir an, die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ besitze auf einem Bogen pq ihres Konvergenzkreises, die Grenzpunkte eingeschlossen, keine Singularität, so muß sich auf dem diesen Bogen halbierenden Radius ein solcher Punkt b finden lassen, daß der Konvergenzkreis der in bezug auf den Punkt b transformierten Reihe die Punkte p, q einschließt. Das kann nach dem Vorhergehenden durch die folgende Bedingungsgleichung:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a''_m|} < \frac{1}{|b-p|}$$

ausgedrückt werden, wo:

$$a''_m = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{m+h}{m} a_{m+h} b^h.$$

Es mögen nun unendlich viele Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} x^m \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

vorliegen, die nachstehende Eigenschaften besitzen:

a) Ihr Konvergenzradius ist gleich 1;

b) Sie besitzen auf einem bestimmten Bogen ihres Konvergenzkreises keine Singularität, so daß die Beziehung:

$$\text{(1)} \qquad \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_{r,m}|} < \frac{1}{|b-p|}$$

für jeden Wert vor r gilt;

c) Für jedes m und für jedes $h < n$, wo n in bestimmter Weise von m abhängig ist, hat man:

$$|a_{m+1,m+h} - a_{m,m+h}| < l^{m+h},$$

wo l eine bestimmte positive Größe bedeutet, die kleiner als 1 ist; in Worten: $\mathfrak{P}_{m+1}(x)$ ist Tangente an $\mathfrak{P}_m(x)$ längs des Berührungspolynomes $\sum_{h=1}^{n_m-1} a_{m,m+h} x^{m+h} = \mathfrak{Q}_m(x)$, wo n_m der Wert von n ist, der dem in Betracht kommenden Werte m entspricht;

d) n_m wächst oder nimmt wenigstens nicht ab, solange m wächst (sollte dies nicht der Fall sein, so ist es immer erlaubt, n_m zweckmäßig zu vergrößern); ferner ist:

$$\text{(2)} \qquad \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{n_m} = 1$$ [1].

Bildet man aus Gliedern, die man aus den verschiedenen Berührungspolynomen beliebig herausgreift, eine Reihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h,$$

so verhält sich auch diese Reihe, welche die Einhüllende der gegebenen Reihenfamilie genannt werden möge, auf dem Bogen pq regulär.

1) Einige weitere von Leau (244) aufgestellte Eigenschaften sind für unsere Betrachtungen entbehrlich.

Setzen wir $a_h = a_{r,h}$, so gehört der Koeffizient $a_{r,h}$ dem Berührungspolynome $\mathfrak{Q}_r(x)$ an, mithin ist $r \leqq h < r + n_r$; man kann ferner schreiben:

$$a_h - a_{m,h} = a_{r,h} - a_{m,h} = (a_{r,h} - a_{r-1,h}) + \\ + (a_{r-1,h} - a_{r-2,h}) + \cdots + (a_{m+1,h} - a_{m,h}),$$

wobei m derartig vorausgesetzt wird, daß $r > m$, $h < m + n_m$ ist. Da $n_m \leqq n_{m+1} \leqq \cdots$ und $h \geqq r > r-1 > \cdots$, so gilt für ein k, das nicht größer als r und nicht kleiner als m ist:

$$k \leqq h < k + n_k;$$

folglich gehören sämtliche Koeffizienten $a_{k,h}$ Berührungspolynomen an. Daraus folgt:

$$|a_{k+1,h} - a_{k,h}| < l^h \quad (h = m, m+1, \cdots, r-1)$$

und somit:

$$|a_h - a_{m,h}| < (r-m)\, l^h \leqq (h-m)\, l^h.$$

Nun ist:

$$a''_m - a''_{m,m} = \sum_{j=0}^{n_m - 1} \binom{m+j}{m} (a_{m+j} - a_{m,m+j})\, b^j,$$

mithin, wenn wir $|b| = \beta$ setzen:

$$|a''_m - a''_{m,m}| \leqq \sum_{j=0}^{n_m-1} \binom{m+j}{m} j l^{m+j} \beta^j < n_m l^m \sum_{j=0}^{n_m-1} \binom{m+j}{m} (l\beta)^j < \\ < \frac{n_m l^m}{(1 - l\beta)^{m+1}} < \frac{n_m l^m}{(1-\beta)^{m+1}}.$$

Daraus folgt wegen (2):

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a''_m - a''_{m,m}|} \leqq \frac{l}{1-\beta};$$

nimmt man aber:

$$\beta < \frac{1-l}{1+l},$$

so ist:

$$l < \frac{1-\beta}{1+\beta},$$

folglich:

(3) $$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a''_m - a''_{m,m}|} < \frac{1}{1+\beta} \leqq \frac{1}{|b-p|}.$$

Da schließlich $a''_m = a''_{m,m} + (a''_m - a''_{m,m})$ ist, so folgt aus (1), (3) (Art. 118):

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a''_m|} < \frac{1}{|b-p|},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Der dargelegte Satz gibt zu interessanten Anwendungen Anlaß, die aber hier unerörtert bleiben müssen[1]).

2. Frage.

383. Wenn wir fragen, ob bestimmte Bedingungen erfüllt sein müssen, damit sämtliche Punkte des Umfangs des Konvergenzkreises singulär sind, so erfordert schon die Fassung der Frage an sich eine vorausgehende Erörterung. Borel, Fabry und Pringsheim haben gezeigt, daß diejenigen Potenzreihen die allgemeineren sind, in denen sämtliche Punkte des Umfangs des Konvergenzkreises singulär sind, m. a. W., daß, damit nicht alle Punkte des Konvergenzkreises singulär sind, gewisse Relationen zwischen den Koeffizienten gelten müssen.[2]) Diese Behauptung ist in dieser Form gerade unbestimmt genug, um Bedenken zu erregen. Anscheinend müßten ja, weil jede Potenzreihe in x eine analytische Funktion erzeugt, den allgemeineren Reihen auch die allgemeineren Funktionen entsprechen, während man doch andrerseits nicht diejenigen Funktionen als die allgemeineren ansehen kann, deren Existenzbereich kreisförmige Gestalt hat, sondern eher diejenigen, deren singuläre Punkte in völlig beliebiger Weise über die Ebene verteilt sind. Wenden wir ferner auf eine Potenzreihe von besagter Art die Transformation:

$$x = \frac{z}{c-z}$$

an, wo c beliebig ist, so verwandelt sie sich in eine Funktion von z,

---

1) Leau 244.

2) Eine solche Behauptung mußte um so befremdender erscheinen, als alle längst bekannten elementaren Funktionen in der ganzen Ebene, einzelne Punkte höchstens ausgenommen, existieren. Es hat sich hier wiederholt, was in der Analysis schon mehrfach geschehen ist: während man von vornherein annahm, alle Funktionen ließen sich integrieren, differentiieren usw., weiß man jetzt, daß eine völlig allgemeine Funktion weder integriert noch differentiiert werden kann, daß sie vielmehr, um diese Eigenschaften zu besitzen, gewissen Sonderbedingungen genügen muß. Was die Mathematiker in dem einen Falle wie im andern irregeleitet hat, ist der Umstand, daß alle Funktionen, die in den gewöhnlichen mathematischen Untersuchungen vorkamen, zufälligerweise den angedeuteten Bedingungen genügten.

deren Existenzbereich eine Halbebene ist; als allgemeinere Funktionen müßten wir sonach diejenigen ansehen, deren Existenzbereich eben diese Form hat. Derartige Betrachtungen ließen sich bis ins Unendliche weiterspinnen.

Es drängt sich also die Notwendigkeit auf, dem aufgestellten Satze eine bestimmtere Form zu geben.

Wir wollen ihn folgendermaßen aussprechen:

Damit die Menge der singulären Punkte einer Potenzreihe nicht auf dem ganzen Umfange des Konvergenzkreises überall dicht sei (die Reihe also eine über den Umfang hinaus fortsetzbare Funktion erzeuge[1]), müssen zwischen den Koeffizienten der Potenzreihe gewisse Beziehungen stattfinden.

Pringsheim hat den Satz folgendermaßen bewiesen.

Es liege eine Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

vor, deren Koeffizienten reell und positiv sein und die Bedingung.

$$\lim_{h=\infty} \sqrt[h]{a_h} = 1$$

befriedigen mögen. Der Konvergenzradius nicht nur der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, sondern auch jeder Teilreihe derselben ist dann genau 1 (Art. 113).

Wir stellen eine Folge von zunehmenden ganzen positiven Zahlen $m_1, m_2, \cdots$ auf, von denen jede ein Vielfaches der vorhergehenden sei, und zerlegen $\mathfrak{P}(x)$ in zwei Reihen; die eine $\mathfrak{Q}(x)$ bilden wir aus den Gliedern, in welchen als Exponenten $m_1, m_2, \cdots$ auftreten, die andre $\mathfrak{R}(x)$ aus den übrigen, so daß:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{Q}(x) + \mathfrak{R}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{m_r} x^{m_r} + \mathfrak{R}(x)$$

wird. Da die Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ den Konvergenzradius 1 hat und ihre Koeffizienten reell und positiv sind, so ist für sie der Punkt $x = 1$ ein singulärer Punkt (Art. 376).

Wir schreiben nun, indem wir k beliebig annehmen:

$$\mathfrak{Q}(x) = \sum_{r=1}^{k-1} a_{m_r} x^{m_r} + \sum_{r=k}^{\infty} a_{m_r} x^{m_r} = \sum_{r=1}^{k-1} a_{m_r} x^{m_r} + \mathfrak{Q}_k(x)$$

---

1) Wir nehmen hier die analytische Fortsetzung in der engeren Weierstraßschen Fassung.

und setzen:

$$x^{m_k} = y;$$

dann ist:

$$\mathfrak{Q}_k(x) = \sum_{r=k}^{\infty} a_{m_r} x^{m_r} = \sum_{r=k}^{\infty} a_{m_r} y^{\frac{m_r}{m_k}} = \mathfrak{S}_k(y),$$

wo $\frac{m_r}{m_k}$ ganze Zahlen sind. Da nun:

$$\sqrt[\frac{m_r}{m_k}]{a_{m_r}} = \left(\sqrt[m_r]{a_{m_r}}\right)^{m_k},$$

so ist:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt[\frac{m_r}{m_k}]{a_{m_r}} = 1,$$

so daß die Potenzreihe $\mathfrak{S}_k(y)$ (Art. 113) den Konvergenzradius 1 hat; ihre Koeffizienten sind aber reell und positiv, mithin ist für sie (Art. 376) der Punkt $y = 1$ ein singulärer Punkt. Daraus folgt, daß die Punkte $x^{m_k} = 1$ singuläre Punkte der Reihe $\mathfrak{Q}_k(x)$ und somit auch, für beliebige Werte von k, der Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ bilden. Nun stellen die Punkte $x^{m_k} = 1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ eine auf der Kreislinie $|x| = 1$ überall dichte Menge dar; mithin sind für $\mathfrak{Q}(x)$ alle Punkte dieser Kreislinie singuläre Punkte. Damit also $\mathfrak{P}(x)$ auf ihrem Konvergenzkreise keine überall dichte Menge singulärer Punkte habe, müssen die Singularitäten von $\mathfrak{R}(x)$ offenbar die von $\mathfrak{Q}(x)$ teilweise aufheben und infolgedessen zwischen den Koeffizienten der beiden Reihen, oder was dasselbe ist, zwischen den Koeffizienten der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ gewisse Beziehungen vorhanden sein; findet das jedoch nicht statt, so sind für die betrachtete Reihe sämtliche Punkte des Umfangs des Konvergenzkreises singuläre Punkte.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes muß die Fassung der Frage, die uns hier beschäftigt, dahin abgeändert werden: Es sollen Typen von Potenzreihen aufgestellt werden, für welche sämtliche Punkte der Peripherie des Konvergenzkreises singulär sind.[1])

Dazu möge hier nur bemerkt werden, daß sich ein solcher Typus bereits aus den eben gebotenen Darlegungen ergibt, und zwar der-

1) Sie deckt sich in dieser Fassung zum Teil mit der ersten Frage.

jenige der Potenzreihen von der Form $\sum_{r=1}^{\infty} a_{m_r} x^{m_r}$ mit dem Konvergenzradius 1, wo m_r für jeden Wert von r ein Vielfaches von m_{r-1} ist und die Koeffizienten reell und positiv sind.

3. Frage.

384. Es sei eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit dem Konvergenzradius ϱ gegeben. Wie sich $\mathfrak{P}(x)$ in den Punkten des Umfangs des Konvergenzkreises ϱ verhält, darüber läßt sich im allgemeinen nichts sagen; man weiß nur, daß $\mathfrak{P}(x)$ auf diesem Kreise mindestens einen singulären Punkt besitzt. Aus den vorgetragenen Theorien erhellt aber keine unmittelbare Beziehung zwischen dem Singulär- oder Nichtsingulärsein eines Punktes c des Konvergenzkreises und der Konvergenz oder Nichtkonvergenz der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ für $x = c$; es ist daher von Interesse zu untersuchen, ob eine solche Beziehung besteht oder nicht. In dieser Hinsicht wollen wir zunächst zeigen, wie sich eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ von der Art bilden läßt, daß alle Punkte ihres Konvergenzkreises singuläre Punkte sind, während die Reihe selbst und ihre sämtlichen Ableitungen in allen diesen Punkten konvergieren.

Es sei:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}}, \tag{1}$$

wo die a_h positive Größen von der Beschaffenheit sind, daß $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ konvergiert, a aber eine reelle Größe bedeutet, die größer als 1 ist, während $m_1, m_2, \cdots$ ganze positive Zahlen vorstellen, von denen jede ein Vielfaches der vorhergehenden ist. Die Reihe (1) konvergiert für $|x| \leqq 1$; es ist nämlich:

$$|a - x^{m_h}| \geqq a - |x|^{m_h} \geqq a - |x| \geqq a - 1,$$

mithin:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}} \right| \leqq \frac{1}{a-1} \sum_{h=1}^{\infty} a_h.$$

Ferner konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig innerhalb jedes mit einem Radius $\varrho' < 1$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises. Es läßt sich nämlich nach Annahme eines willkürlichen σ eine Zahl n so bestimmen, daß:

$$\sum_{h=n}^{\infty} a_h < (a - \varrho')\sigma$$

wird; nun ist für $|x| \leqq \varrho'$:

$$|a - x^{m_h}| \geqq a - |x|^{m_h} \geqq a - |x| \geqq a - \varrho',$$

mithin:

$$\left| \sum_{h=n}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}} \right| \leqq \frac{1}{a - \varrho'} \sum_{h=n}^{\infty} a_h < \sigma .$$

Daraus folgt, daß der Konvergenzradius der durch den arithmetischen Ausdruck $F(x)$ in der Umgebung des Anfangspunktes dargestellten Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mindestens gleich 1 ist. Man erhält diese Reihe dadurch, daß man jedes Glied von (1) in eine Potenzreihe entwickelt und den Hilfssatz von Weierstraß anwendet; ihre Koeffizienten sind offenbar reelle positive Zahlen. Wir werden nachweisen, daß der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$ genau gleich 1 ist.

Wir schreiben:

$$(2) \qquad F(x) = \frac{a_s}{a - x^{m_s}} + \sum_{h=1}^{\infty}{}^{(s)} \frac{a_h}{a - x^{m_h}},$$

wo der oben angebrachte Index s das Fehlen des $h = s$ entsprechenden Gliedes anzeigt. Entwickelt man die beiden Glieder der rechten Seite von (2) in Potenzreihen $\mathfrak{P}_s(x)$, $\mathfrak{Q}_s(x)$, so erhält man:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_s(x) + \mathfrak{Q}_s(x);$$

da ferner die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_s(x)$ und $\mathfrak{Q}_s(x)$ reell und positiv sind, so sind die Koeffizienten von $\mathfrak{P}(x)$ gleich oder größer als die entsprechenden von $\mathfrak{P}_s(x)$ und $\mathfrak{Q}_s(x)$; der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$ ist somit gleich oder kleiner als die Konvergenzradien dieser beiden Reihen. Nun ist der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}_s(x)$ gleich $a^{\frac{1}{m_s}}$, folglich ist für jeden Wert von s:

$$\varrho \leqq a^{\frac{1}{m_s}};$$

wächst nun aber s unbegrenzt, so wächst auch m_s unbegrenzt, und $a^{\frac{1}{m_s}}$ nähert sich der Eins, so daß $\varrho \leqq 1$ wird. Man kann daher schließen, daß der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$ gleich 1 ist.

Daraus folgt (Art. 376), daß $x = 1$ ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x)$ ist.

Die Reihe:

$$\Phi(x) = \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}},$$

wo k beliebig ist, läßt sich in eine Potenzreihe $\mathfrak{R}(x)$ umwandeln, deren Konvergenzradius, wie sich ganz in derselben Weise wie oben zeigen läßt, gleich 1 ist. Beachten wir nun, daß m_{h+1} der Voraussetzung nach für jeden beliebigen Wert von h durch m_h teilbar ist, so erhalten wir:

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{k+h}}{a - x^{m_{k+h}}} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{k+h}}{a - y^{\frac{m_{k+h}}{m_k}}} = \Psi(y),$$

wo die Größen $\frac{m_{k+h}}{m_k}$ ganze positive Zahlen sind, die mit h unbegrenzt wachsen, und $y = x^{m_k}$ ist.

Die Funktion $\Psi(y)$, die von derselben Natur ist wie $\Phi(x)$, wird in eine Potenzreihe $\mathfrak{S}(y)$ transformiert, deren Koeffizienten positiv sind und deren Konvergenzradius 1 ist, während der Punkt $y = 1$ für sie ein singulärer Punkt ist; mithin sind für $\mathfrak{R}(x)$ alle Punkte singulär, die durch die Gleichung $x^{m_k} = 1$ gegeben sind, d. h. die Punkte:

$$(3) \qquad 1,\ e^{\frac{2\pi i}{m_k}},\ e^{\frac{4\pi i}{m_k}},\ \cdots,\ e^{\frac{2(m_k-1)\pi i}{m_k}}.$$

In diesen Punkten verhält sich die Differenz $\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{R}(x)$, deren Konvergenzradius $a^{\frac{1}{m_k}} > 1$ ist, regulär; sie sind somit für jedes beliebige k singuläre Punkte der Reihe $\mathfrak{P}(x)$.

Die Menge der allen möglichen Werten von k entsprechenden Punkte (3) ist auf dem ganzen Einheitskreise überall dicht, folglich sind sämtliche Punkte dieses Kreises singuläre Punkte der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, die deshalb nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar ist.

Wie schon bemerkt, erhält man die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ aus (1), indem man für jedes Glied $\frac{a_h}{a - x^{m_h}}$ seine Entwicklung:

$$\frac{a_h}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x^{m_h}}{a}\right)^r$$

einsetzt und nach Potenzen von x ordnet. Da sich nun (1) für positive Werte von x, die nicht größer sind als 1, aus positiven Gliedern zusammensetzt, die Entwicklungen aber, die an Stelle der einzelnen Glieder treten, gleichfalls aus lauter positiven Gliedern bestehen, so ist die durch die Substitution gewonnene Reihe für $x \leqq 1$ absolut konvergent; also ist es auch die Reihe $\mathfrak{P}(x)$, die man daraus

durch Umstellung ihrer Glieder erhält. Da schließlich die Koeffizienten der für $x = 1$ konvergenten Reihe $\mathfrak{P}(x)$ sämtlich positiv sind, so konvergiert $\mathfrak{P}(x)$ auch für jedes x vom absoluten Betrage 1, d. h. in jedem Punkte des Umfangs des Einheitskreises.

Unterwirft man die a_h weiteren Bedingungen, so kann man es dahin bringen, daß auch sämtliche Ableitungen von $\mathfrak{P}(x)$ längs dieser Kreislinie konvergent sind.

Wird jedes Glied von (1) in einfache Brüche zerlegt und mit ε_h eine primitive Einheitswurzel m_h-ten Grades bezeichnet, so hat man:[1])

$$F(x) = -\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m_h a^{\frac{m_h-1}{m_h}}}\sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{\varepsilon_h^t a_h}{x-\varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}}\right];$$

daraus ergibt sich, da die gliedweise Derivation zulässig ist, für $F^{(r)}(x)$ der Ausdruck:

$$F^{(r)}(x) = (-1)^{r-1} r! \sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m_h a^{\frac{m_h-1}{m_h}}}\sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{\varepsilon_h^t a_h}{\left(x-\varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}\right)^{r+1}}\right].$$

---

1) Hat man den rationalen Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wo:

$$\varphi(x) = \prod_{t=1}^{n}(x - b_t)$$

ist, und setzt man sämtliche b_t als voneinander verschieden voraus, so ist die Zerlegung in einfache Brüche durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{f(b_t)}{\varphi'(b_t)}}{x-b_t}.$$

In unserm Falle ist:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_h}{a - x^{m_h}} = \frac{-a_h}{x^{m_h}-a},$$

also:

$$f(x) = -a_h, \quad \varphi(x) = x^{m_h} - a = \prod_{t=0}^{m_h-1}\left(x - \varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}\right);$$

daraus folgt:

$$\frac{a_h}{a-x^{m_h}} = \sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{-a_h}{m_h\left(\varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}\right)^{m_h-1}}\frac{1}{x-\varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}} = -\frac{1}{m_h a^{\frac{m_h-1}{m_h}}}\sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{\varepsilon_h^t a_h}{x-\varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}}.$$

Nun ist einerseits für $|x| \leqq 1$:

$$\left| x - \varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}} \right| \geqq a^{\frac{1}{m_h}} - 1,$$

andrerseits für jede positive Zahl k:

$$e^k - 1 > k,$$

also im besonderen für $k = \frac{1}{m_h} \lg a$:

$$a^{\frac{1}{m_h}} - 1 > \frac{1}{m_h} \lg a;$$

daraus folgt:

$$\left| x - \varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}} \right| > \frac{1}{m_h} \lg a$$

und demnach:

$$|F^{(r)}(x)| < r! \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m_h a^{\frac{m_h - 1}{m_h}}} m_h a_h \left(\frac{\lg a}{m_h} \right)^{-r-1} \right]$$

$$= \frac{r!}{a \lg^{r+1} a} \sum_{h=1}^{\infty} a_h a^{\frac{1}{m_h}} m_h^{r+1} < \frac{r!}{\lg^{r+1} a} \sum_{h=1}^{\infty} a_h m_h^{r+1}.$$

Unterwerfen wir die a_h der Bedingung:

$$a_h < \frac{1}{m_h^h},$$

so erhalten wir:

$$|F^{(r)}(x)| < \frac{r!}{\lg^{r+1} a} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}}.$$

Es ist aber:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} = \sum_{h=1}^{r+1} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} + \sum_{h=r+2}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} =$$

$$= \sum_{h=1}^{r+1} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_{h+r+1}^h} < \sum_{h=1}^{r+1} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_{r+2}^h};$$

nun ist die letzte Reihe konvergent, da:

$$m_{r+2} \geqq 2$$

ist, folglich konvergiert auch die Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}}$. Daraus folgt,

daß $F^{(r)}(x)$ für jedes x vom absoluten Betrage $\leqq 1$ einen endlichen Wert besitzt. Auf dieselbe Weise wie oben schließt man daraus, daß $\mathfrak{P}^{(r)}(x)$ für jedes x vom absoluten Betrage $\leqq 1$ absolut konvergiert.

Wir haben also eine Potenzreihe gebildet, die samt ihren Ableitungen in allen Punkten des Umfangs des Konvergenzkreises absolut konvergiert und für welche dennoch alle diese Punkte singuläre Punkte sind.

385. Ein weit einfacheres Beispiel einer Reihe, die längs der ganzen Peripherie ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, ohne daß indes ihre Ableitungen konvergent sind, ist folgendes:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h^2};$$

diese Reihe hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert absolut für $|x| = 1$.

Von größerem Interesse ist es, an einem Beispiele zu zeigen, daß es Reihen gibt, die zwar in allen Punkten des Konvergenzkreises, aber nicht absolut konvergieren.

Von solcher Art ist die Reihe:

$$\sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{E(\sqrt{h})} \frac{x^h}{h}, \tag{1}$$

wo $E(t)$ wie gewöhnlich das größte in der positiven Zahl t enthaltene Ganze bezeichnet.

Wir schreiben der Kürze halber:

$$(-1)^{E(\sqrt{h})} = \varepsilon_h, \quad \sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h = \sigma_n.$$

Offenbar hat man:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_h &= -1 \text{ für } (2k-1)^2 \leqq h \leqq (2k)^2 - 1 \\ \varepsilon_h &= +1 \text{ für } \quad (2k)^2 \leqq h \leqq (2k+1)^2 - 1 \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \cdots),$$

mithin für $(2k-1)^2 \leqq h \leqq (2k)^2 - 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_h &= -3 + 5 - 7 + 9 - \cdots + (4k-3) - (h+1-(2k-1)^2) = \\ &= 2(k-1) - (h+1-(2k-1)^2) = 4k^2 - 2k - 2 - h; \end{aligned}$$

für $(2k)^2 \leqq h \leqq (2k+1)^2 - 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_h &= -3 + 5 - 7 + 9 - \cdots - (4k-1) + (h+1-(2k)^2) = \\ &= -(2k+1) + (h+1-(2k)^2) = -4k^2 - 2k + h. \end{aligned}$$

Es ist insbesondere:

$$\sigma_{(2k)^2-1} = -(2k+1), \quad \sigma_{(2k-1)^2-1} = 2k-2.$$

Daraus folgt in den beiden Fällen:

(2) $$\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}} = \frac{4k^2-2k-2-h}{\sqrt{h}}, \quad \frac{\sigma_h}{\sqrt{h}} = \frac{-4k^2-2k+h}{\sqrt{h}}.$$

Betrachten wir zunächst die erste Formel (2). Wächst h von $(2k-1)^2-1$ an, so ist zuerst $\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}$ positiv und abnehmend; für:

$$h \geqq (2k-1)^2 + 2k - 3$$

wird $\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}} \leqq 0$, und, wenn man schreibt:

$$\left|\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}\right| = \sqrt{\frac{h-(4k^2-2k-2)}{h}[h-(4k^2-2k-2)]},$$

so ersieht man, daß $\left|\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}\right|$ zugleich mit h zunimmt. Eine analoge Schlußweise gilt für die zweite Formel (2). Man kann daher schließen, daß die Maximalwerte von $\left|\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}\right|$ für:

$$h = r^2 - 1 \qquad (r = 2, 3, \cdots)$$

auftreten. Da aber:

$$\left|\frac{\sigma_{(2k)^2-1}}{\sqrt{(2k)^2-1}}\right| = \frac{2k+1}{\sqrt{(2k)^2-1}} = \sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}},$$

$$\left|\frac{\sigma_{(2k-1)^2-1}}{\sqrt{(2k-1)^2-1}}\right| = \frac{2k-2}{\sqrt{(2k-1)^2-1}} = \sqrt{\frac{k-1}{k}},$$

so folgt:

(3) $$\overline{\lim_{h=\infty}} \left|\frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}\right| = 1,$$

mithin:

(4) $$\lim_{h=\infty} \frac{\sigma_h}{h} = 0.$$

Liegt andrerseits allgemein die Summe $\sum_{h=1}^{n} p_h q_h$ vor und wird:

$$\sum_{h=1}^{n} p_h = s_h$$

gesetzt, so kann man identisch schreiben:

$$(5) \qquad \sum_{h=1}^{n} p_h q_h = \sum_{h=1}^{n-1} s_h (q_h - q_{h+1}) + s_n q_n .$$

Setzt man insbesondere $p_h = \varepsilon_h$, $q_h = \frac{1}{h}$, so erhält man daraus:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\varepsilon_h}{h} = \sum_{h=1}^{n-1} \sigma_h \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+1}\right) + \frac{\sigma_n}{n} = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\sigma_h}{h(h+1)} + \frac{\sigma_n}{n},$$

und somit wegen (4):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sigma_h}{h(h+1)} < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sigma_h}{\sqrt{h}} \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} .$$

Mit Rücksicht auf (3) ergibt sich nun, da ja $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert [1]), daß auch $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{h}$ konvergent ist.

Dies vorausgeschickt, wollen wir jetzt beweisen, daß die Reihe (1) für jedes x vom absoluten Betrage 1 konvergiert.

Aus der Identität (5) ergibt sich:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\varepsilon_h}{h} x^h = \sum_{h=1}^{n-1} (x + x^2 + \cdots + x^h) \left(\frac{\varepsilon_h}{h} - \frac{\varepsilon_{h+1}}{h+1}\right) + (x + x^2 + \cdots + x^n) \frac{\varepsilon_n}{n},$$

also für $x \neq 1$:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\varepsilon_h}{h} x^h = \frac{x}{1-x} \left[\sum_{h=1}^{n-1} (1 - x^h) \left(\frac{\varepsilon_h}{h} - \frac{\varepsilon_{h+1}}{h+1}\right) + (1 - x^n) \frac{\varepsilon_n}{n} \right],$$

und hieraus, wenn man beachtet, daß $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0$ ist:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{h} x^h = \frac{x}{1-x} \sum_{h=1}^{\infty} (1 - x^h) \left(\frac{\varepsilon_h}{h} - \frac{\varepsilon_{h+1}}{h+1}\right).$$

Da aber $|1 - x^h| \leq 2$ ist für jedes $|x| = 1$ und für jedes beliebige h, so ist die Konvergenz der links stehenden Reihe erwiesen, sobald wir zeigen können, daß:

1) Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 139.

$$H = \sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{\varepsilon_h}{h} - \frac{\varepsilon_{h+1}}{h+1} \right|$$

konvergiert. Bemerken wir dazu, daß ε_h und ε_{h+1} stets dasselbe Vorzeichen haben, außer wenn:

$$h = r^2 - 1 \qquad (r = 2, 3, \cdots)$$

ist, so ergibt sich, indem wir die Ausschließung dieser Werte von h durch einen Strich anzeigen:

$$H = \sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{1}{h(h+1)} + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{r^2 - 1} + \frac{1}{r^2} \right);$$

nun ist aber:

$$r^2 > r^2 - 1 > (r-1)^2,$$

$$\sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{1}{h(h+1)} < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)} < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2},$$

folglich:

$$H < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} + 2 \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{(r-1)^2} = 3 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2},$$

womit die Konvergenz von H, und folglich die der Reihe (1), erwiesen ist.

Daß diese letzte Reihe für $|x| = 1$ nicht auch absolut konvergent ist, geht ohne weiteres aus der Tatsache hervor, daß die aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe die harmonische Reihe ist, die bekanntlich divergiert.

386. Wir beabsichtigen jetzt, im allgemeinen zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Potenzreihe in einem Punkte des Umfangs ihres Konvergenzkreises konvergiert.

Wir setzen, wie wir es öfter getan haben, den Konvergenzradius $= 1$.

Um das gewünschte Ziel zu erreichen, müssen wir erst in diesem und in den folgenden Artikeln einige Sätze vorausschicken.

Ist $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ konvergent, so hat man:

$$\lim_{\varrho = 1} \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h,$$

wo ϱ reell und zunehmend angenommen wird.

Aus der Identität (5) des vorigen Artikels folgt für beliebige n und p:

$$\sum_{h=n}^{n+p} a_h \varrho^h = a_n(\varrho^n - \varrho^{n+1}) + (a_n + a_{n+1})(\varrho^{n+1} - \varrho^{n+2}) + \cdots$$
$$+ (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1})(\varrho^{n+p-1} - \varrho^{n+p})$$
$$+ (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1} + a_{n+p})\varrho^{n+p}.$$

Nun läßt sich die Zahl n wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ so wählen, daß sämtliche Größen:

$$a_n,\ a_n + a_{n+1},\ \cdots,\ a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1},$$
$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1} + a_{n+p}$$

für beliebige p absolut kleiner sind als eine vorgegebene Größe σ; beachtet man ferner, daß die Differenzen $\varrho^h - \varrho^{h+1}$ wegen $\varrho < 1$ sämtlich positiv sind, so erhält man aus obiger Gleichung:

$$\left|\sum_{h=n}^{n+p} a_h \varrho^h\right| < \sigma\left[(\varrho^n - \varrho^{n+1}) + (\varrho^{n+1} - \varrho^{n+2}) + \cdots \right.$$
$$\left. + (\varrho^{n+p-1} - \varrho^{n+p}) + \varrho^{n+p}\right] = \sigma\varrho^n < \sigma,$$

womit die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h$ für jedes $\varrho < 1$ bewiesen ist.

Wir schreiben demnach:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h - \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \sum_{h=0}^{n-1} a_h - \sum_{h=0}^{n-1} a_h \varrho^h + \sum_{h=n}^{\infty} a_h - \sum_{h=n}^{\infty} a_h \varrho^h,$$

wo wir uns n wie vorhin so gewählt denken, daß $\left|\sum_{h=n}^{\infty} a_h\right| \leqq \sigma$ und für jedes $\varrho < 1$ außerdem $\left|\sum_{h=n}^{\infty} a_h \varrho^h\right| < \sigma$ ist. Da $\sum_{h=0}^{n-1} a_h \varrho^h$ eine stetige Funktion von ϱ ist, so können wir ϱ immer so nahe an 1 wählen, daß:

$$\left|\sum_{h=0}^{n-1} a_h - \sum_{h=0}^{n-1} a_h \varrho^h\right| < \sigma$$

wird. Wir haben alsdann für ein hinreichend nahe an 1 gelegenes ϱ:

$$\left|\sum_{h=0}^{\infty} a_h - \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h\right| < 3\sigma$$

oder, was ja bewiesen werden sollte:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h .$$

Schreiben wir $a_h x^h$ anstatt a_h, wo x einen Punkt des Umfangs des Konvergenzkreises bezeichnet, so haben wir den Satz:

Konvergiert $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ für einen Punkt x des Umfangs des Konvergenzkreises, so ist:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{h=0}^{\infty} a_h (\varrho x)^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h .$$

387. Die Umkehrung des vorstehenden Satzes ist nicht allgemein gültig; indessen läßt sich doch folgender Satz beweisen, wobei wir eine Reihe eigentlich divergent nennen, sobald von den beiden aus den reellen, bez. imaginären Bestandteilen ihrer Glieder gebildeten Reihen wenigstens eine divergiert:

Ist die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ für einen Punkt des Umfangs ihres Konvergenzkreises eigentlich divergent, so gilt:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{h=0}^{\infty} a_h (\varrho x)^h = \infty .$$

Offenbar genügt es nachzuweisen (vgl. den vorigen Art.), daß, wenn $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ eigentlich divergiert:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \infty$$

ist.

Es sei $a_h = p_h + i q_h$, und es möge die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} p_h$ divergieren. Strebt ihre Summe, um einen bestimmten Fall ins Auge zu fassen, der Grenze $+\infty$ zu, so läßt sich ein Index M von der Art angeben, daß die Summen:

$$\sum_{h=0}^{k} p_h = s_k$$

für jedes $k \geqq M$ sämtlich positiv sind. Bezeichnen wir die untere Grenze der Größen $s_k, s_{k+1}, \cdots$ mit l_k, so ist demnach $l_k > 0$ für $k \geqq M$; aus der Identität (Art. 385, (5)):

$$\sum_{h=0}^{n} p_h \varrho^h = \sum_{h=0}^{m-1} s_h (\varrho^h - \varrho^{h+1}) + \sum_{h=m}^{n-1} s_h (\varrho^h - \varrho^{h+1}) + s_n \varrho^n,$$

wo $m \geqq M$ vorausgesetzt wird, ergibt sich alsdann für jedes n:

$$\sum_{h=0}^{n} p_h \varrho^h > l_0 (1 - \varrho^m) + l_m \varrho^m,$$

mithin:

$$\sum_{h=0}^{n} p_h \varrho^h > \begin{cases} l_m \varrho^m & , \text{ wenn } l_0 \geqq 0, \\ l_0 + l_m \varrho^m, & \text{wenn } l_0 < 0. \end{cases}$$

Nimmt man $\varrho > \frac{m}{m+1}$ an, so hat man (Art. 144):

$$\varrho^m > \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} > \frac{1}{e},$$

mithin:

$$\sum_{h=0}^{n} p_h \varrho^h > \begin{cases} \frac{1}{e} l_m & , \text{ wenn } l_0 \geqq 0, \\ l_0 + \frac{1}{e} l_m, & \text{wenn } l_0 < 0. \end{cases}$$

Nun wächst l_m unbegrenzt, wenn m unbegrenzt wächst oder ϱ der Grenze 1 zustrebt, mithin wächst auch $\sum_{h=0}^{n} p_h \varrho^h$ unter denselben Umständen unbegrenzt, und man kann schreiben:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{h=0}^{\infty} p_h \varrho^h = \infty,$$

woraus folgt:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \infty.$$

388. Konvergiert $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ für alle der Bedingung $|x| < \varrho \leqq 1$ genügenden Werte von x, so ist für alle diese Werte:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = (1 - x) \sum_{h=0}^{\infty} s_h x^h,$$

$$(2)\qquad \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)} s_h' x^h + (1-x) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h+1} s_h' x^h,$$

wo:

$$s_h = \sum_{k=0}^{h} a_k, \qquad s_h' = \sum_{k=0}^{h} k a_k$$

ist.

Nimmt man allgemein $\varrho' < \varrho$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ absolut (Art. 110) für jedes x, dessen absoluter Betrag ϱ' nicht übersteigt; dasselbe gilt für die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x}.$$

Multipliziert man die beiden Reihen miteinander, so erhält man:

$$\frac{1}{1-x} \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=0}^{\infty} s_h x^h,$$

eine Relation, die mit (1) übereinstimmt.

Setzt man $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h = \mathfrak{P}(x)$, so ist:

$$\sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^h = x \mathfrak{P}'(x);$$

beachtet man nun, daß die Reihe $\mathfrak{P}'(x)$ zugleich mit $\mathfrak{P}(x)$ konvergent ist (Art. 134), so erhält man daraus in derselben Weise wie oben:

$$\frac{1}{1-x} \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^h = \sum_{h=1}^{\infty} s_h' x^h,$$

woraus erhellt, daß $\sum\limits_{h=1}^{\infty} s_h' x^h$ für $|x| < \varrho$ konvergiert. Dasselbe kann also (Art. 134) von der Integralreihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{s_h'}{h+1} x^{h+1}$ oder, was auf eins hinauskommt, von der Reihe $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{s_h'}{h+1} x^h$, folglich auch von $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{s_h'}{h+1} x^{h-1}$ und schließlich auch von der Integralreihe dieser letzteren Reihe, d. h. von $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{s_h'}{h(h+1)} x^h$ behauptet werden.

Beachten wir nunmehr, daß:

$$a_h = \frac{s'_h - s'_{h-1}}{h} \qquad (h = 1, 2, \cdots)$$

ist, so folgt:

$$(3) \quad \sum_{h=1}^{n} a_h x^h = \sum_{h=1}^{n} \frac{s'_h - s'_{h-1}}{h} x^h = \sum_{h=1}^{n} \frac{s'_h}{h} x^h - x \sum_{h=0}^{n-1} \frac{s'_h}{h+1} x^h =$$

$$= \sum_{h=1}^{n-1} \frac{s'_h}{h+1} \left(\frac{h+1}{h} - x\right) x^h + \frac{s'_n}{n} x^n =$$

$$= \sum_{h=1}^{n-1} \frac{s'_h}{h(h+1)} x^h + (1-x) \sum_{h=1}^{n-1} \frac{s'_h}{h+1} x^h + \frac{s'_n}{n} x^n .$$

Da nun $\sum_{h=0}^{\infty} s'_h x^h$ konvergiert, so ist:

$$\lim_{n=\infty} s'_n x^n = 0$$

und um so mehr:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s'_n}{n} x^n = 0,$$

also:

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{s'_h}{h(h+1)} x^h + (1-x) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{s'_h}{h+1} x^h ,$$

was mit (2) übereinstimmt.

Wir bemerken ferner, daß aus Gleichung (3) für $x = 1$ folgt:

$$(4) \qquad \sum_{h=1}^{n} a_h = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{s'_h}{h(h+1)} + \frac{s'_n}{n} .$$

389. Ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, so hat man:

$$\lim_{\varrho=1} \left[(1-\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h \right] = 0.$$

Man kann schreiben:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \sum_{h=0}^{n} a_h \varrho^h + \sum_{h=n+1}^{\infty} a_h \varrho^h ;$$

nun hat man für $\varrho < 1$ zufolge der Gleichung (1) des vorigen Artikels:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} a_h \varrho^h = (1-\varrho) \sum_{h=n+1}^{\infty} (s_h - s_n) \varrho^h = (1-\varrho) \sum_{h=n+1}^{\infty} s_h \varrho^h - (1-\varrho) s_n \sum_{h=n+1}^{\infty} \varrho^h =$$

$$= (1-\varrho) \sum_{h=n+1}^{\infty} s_h \varrho^h - s_n \varrho^{n+1},$$

mithin:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h = \sum_{h=0}^{n} a_h \varrho^h - s_n \varrho^{n+1} + (1-\varrho) \sum_{h=n+1}^{\infty} s_h \varrho^h,$$

und infolgedessen:

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h \right| < \sum_{h=0}^{n} |a_h| + |s_n| + \varrho (1-\varrho) \sum_{h=n+1}^{\infty} \left| \frac{s_h}{h} \right| h \varrho^{h-1},$$

oder, da $|s_n| \leqq \sum_{h=0}^{n} |a_h|$ ist:

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h \right| < 2 \sum_{h=0}^{n} |a_h| + \varrho (1-\varrho) \sum_{h=n+1}^{\infty} \left| \frac{s_h}{h} \right| h \varrho^{h-1}.$$

Da $\frac{s_h}{h}$ der Voraussetzung gemäß der Null zustrebt, wenn h unendlich wird, so läßt sich n so groß wählen, daß für jedes $h > n$:

$$\left| \frac{s_h}{h} \right| < \frac{\sigma}{2}$$

wird, wo σ eine willkürliche positive Größe ist; beachtet man ferner, daß:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} h \varrho^{h-1} < \sum_{h=1}^{\infty} h \varrho^{h-1} = \frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

so erhält man aus der gefundenen Ungleichung:

$$\left| (1-\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h \right| < (1-\varrho) A + \varrho \frac{\sigma}{2} < (1-\varrho) A + \frac{\sigma}{2},$$

wo der Kürze halber:

$$2 \sum_{h=0}^{n} |a_h| = A$$

gesetzt worden ist. Ist also $\varrho > 1 - \frac{\sigma}{2A}$, so hat man:

$$\left|(1-\varrho)\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h\right| < \sigma,$$

eine Ungleichung, die unsere Behauptung beweist.

Setzt man auch hier $a_h x^h$ statt a_h, so gewinnt man den Satz:

Ist für ein x vom absoluten Betrage 1:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n} a_h x^h = 0,$$

so ist auch:

$$\lim_{\varrho=1}\left[(1-\varrho)\sum_{h=0}^{\infty} a_h (\varrho x)^h\right] = 0$$

oder, was dasselbe ist:

(1) $$\lim_{\varrho=1}\left[(x-\varrho x)\sum_{h=0}^{\infty} a_h (\varrho x)^h\right] = 0.$$

Man wird bemerken, daß dieser Fall für alle x vom absoluten Betrage 1 eintritt, sobald:

(2) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n} |a_h| = 0$$

ist. Die Formel (2) und folglich auch die Formel (1) gelten immer, wenn $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ ist[1]).

390. Nach allen diesen Vorbereitungen läßt sich folgender Satz beweisen:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h$ konvergiert, sind folgende:

---

1) Besitzt die Folge $u_1, u_2, \cdots$ eine Grenze u, so ist bekanntlich (Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 98, (3)):

$$u = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} u_h;$$

es hat aber $|a_h|$ im vorliegenden Falle Null als Grenze, also findet dasselbe auch für $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{h=0}^{n} |a_h|$ und folglich ebenso für $\frac{1}{n} \sum\limits_{h=0}^{n} |a_h|$ statt.

I. Wenn sich ϱ nach zunehmenden Werten der Grenze 1 nähert, so muß sich $\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h$ einer bestimmten Grenze nähern;

II. Setzt man $s_h' = \sum_{k=0}^{h} k a_k$, so muß:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0 \tag{1}$$

sein.

Daß die erste Bedingung notwendig ist, erhellt aus dem Satze des Art. 386. Setzt man nun wie früher $s_h = \sum_{k=0}^{h} a_k$ und bezeichnet mit s die Summe der als konvergent vorausgesetzten Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ oder den Grenzwert von s_n für $\lim n = \infty$, so ist zufolge des in der letzten Anmerkung angeführten Satzes:

$$s = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Es ist aber:

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = (n+1) a_0 + n a_1 + \cdots + 2 a_{n-1} + a_n = (n+1) s_n - s_n',$$

mithin:

$$s = \lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{s_n'}{n+1} \right) = \lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{s_n'}{n} \frac{n}{n+1} \right) = s - \lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n},$$

woraus sich (1) ergibt.

Um zu beweisen, daß die Bedingungen I., II. auch hinreichend sind, greifen wir auf (2) in Art. 388 zurück:

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h \varrho^h = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)} s_h' \varrho^h + (1-\varrho) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h+1} s_h' \varrho^h. \tag{2}$$

Nach I. nähert sich $\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h$, wenn sich ϱ der Einheit nähert, einer bestimmten endlichen Grenze, die wir mit λ bezeichnen wollen. Ist aber $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, so folgt (vgl. den Schluß des vorigen Artikels):

$$\lim_{\varrho=1} \left[(1-\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} u_h \varrho^h \right] = 0;$$

setzt man $u_h = \frac{s_h'}{h+1}$ und beachtet, daß nach II. $\lim\limits_{h=\infty} \frac{s_h'}{h+1} = 0$ ist, so ergibt sich:

$$\lim_{\varrho=1}\left[(1-\varrho)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{s_h'}{h+1}\varrho^h\right] = 0.$$

Die Gleichung (2) liefert uns mithin:

$$\lambda = \lim_{\varrho=1}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h(h+1)}s_h'\varrho^h + a_0.$$

Nach II. läßt sich für jede vorgegebene positive Größe σ eine Zahl n von der Art bestimmen, daß $\left|\frac{s_h'}{h}\right| < \frac{\sigma}{2}$ für jedes $h > n$ wird. Läßt man sich ϱ durch die Werte $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ hindurch der Einheit nähern und nimmt man $\varrho = \frac{n-1}{n}$ an, so erhält man:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h(h+1)}s_h'\varrho^h = \sum_{h=1}^{n}\frac{s_h'}{h(h+1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h + \sum_{h=n+1}^{\infty}\frac{s_h'}{h(h+1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h,$$

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\frac{s_h'}{h(h+1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h\right| < \frac{\sigma}{2}\sum_{h=n+1}^{\infty}\frac{1}{h+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h <$$

$$< \frac{\sigma}{2(n+1)}\sum_{h=n+1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h = \frac{\sigma}{2(n+1)}\,n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} < \frac{\sigma}{2}.$$

Man kann also schreiben:

$$\lambda = \lim_{n=\infty}\sum_{h=1}^{n}\frac{s_h'}{h(h+1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h + a_0.$$

Wir setzen nun:

$$\lambda_{n+1} = \sum_{h=1}^{n}\frac{s_h'}{h(h+1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^h + a_0,$$

so daß:

$$\lambda = \lim_{n=\infty}\lambda_{n+1}$$

ist, und ziehen die Formel (4) des Art. 388 heran, die sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$s_{n+1} - a_0 = \sum_{h=1}^{n+1}a_h = \sum_{h=1}^{n}\frac{s_h'}{h(h+1)} + \frac{s_{n+1}'}{n+1}.$$

Daraus ergibt sich:

$$s_{n+1} - \lambda_{n+1} = \sum_{h=1}^{n} \frac{s_h'}{h(h+1)}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^h\right) + \frac{s_{n+1}'}{n+1}.$$

Nun ist[1]:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^h = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^h > 1 - \frac{h}{n},$$

mithin:

$$\left|\sum_{h=1}^{n} \frac{s_h'}{h(h+1)}\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^h\right]\right| < \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left|\frac{s_h'}{h+1}\right|;$$

da sich aber $\frac{s_n'}{n+1}$ nach II. der Null nähert, so nähert sich (S. 428, Anm.) auch $\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\frac{s_h'}{h+1}$ der Null; man hat daher schließlich:

$$\lim_{n=\infty} (s_{n+1} - \lambda_{n+1}) = 0$$

oder:

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lambda,$$

womit die Konvergenz der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ erwiesen ist.

---

1) Sind $k_1, k_2, \cdots, k_r$ r positive Größen und zwar kleiner als 1, und ist r eine ganze positive Zahl, so hat man:

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - k_i) \geqq 1 - \sum_{i=1}^{r} k_i,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $r = 1$ gilt.

Diese Relation gilt augenscheinlich für $r = 2$. Angenommen, sie gelte für $r - 1$, es sei also:

$$\prod_{i=1}^{r-1} (1 - k_i) > 1 - \sum_{i=1}^{r-1} k_i,$$

so folgt daraus durch Multiplikation mit $(1 - k_r)$:

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - k_i) > \left[1 - \sum_{i=1}^{r-1} k_i\right][1 - k_r] = 1 - \sum_{i=1}^{r} k_i + k_r \sum_{i=1}^{r-1} k_i > 1 - \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

Im besondern hat man für $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k$:

$$(1 - k)^r > 1 - rk.$$

391. Setzt man $a_h x^h$ statt a_h, wo $|x| = 1$ ist, so erhält man den Satz:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ für ein x vom absoluten Betrage 1 konvergiert, sind folgende:

I. Wenn sich ϱ nach zunehmenden Werten der Grenze 1 nähert, so muß sich $\sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho^h x^h$ einer bestimmten endlichen Grenze nähern;

II. Es muß:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} h a_h x^h = 0 \tag{1}$$

sein.

Ist im besondern $\lim_{n=\infty} n a_n = 0$, so folgt (S. 428, Anm.):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} h |a_h| = 0;$$

mithin gilt (1) für jedes x vom absoluten Betrage 1. Man erhält also den Satz:

$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ konvergiert, wenn $\lim_{n=\infty} n a_n = 0$ ist und wenn sich $\sum_{h=0}^{\infty} a_h (\varrho x)^h$ für $\lim \varrho = 1$ einer bestimmten endlichen Grenze nähert.

392. Sind alle Punkte des Konvergenzkreises singuläre Punkte, so kann es sich dennoch ereignen, daß die Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}^{(h)}(c)}{h!} (x - c)^h \tag{1}$$

in einigen von ihnen konvergiert; ja, dieser Fall kann sogar für eine unendliche, auf dem ganzen Konvergenzkreise überall dichte Punktmenge eintreten, wie in dem Beispiele, das wir demnächst entwickeln werden[1]). Es muß indessen darauf hingewiesen werden, daß

---

1) Pringsheim hat gezeigt, daß alsdann die untere Grenze der Konvergenzradien der Reihe (1) für die Punkte irgend eines Bogens des Konvergenzkreises der gegebenen Reihe notwendigerweise Null ist.

die Reihe (1), wenn sie auch formell mit der in bezug auf den Punkt c transformierten Reihe zusammenfällt, gleichwohl nicht als solche bezeichnet werden darf, da sie ja tatsächlich nicht den Wert der betrachteten Funktion in der Umgebung des Punktes c darstellt, weil dieser Punkt für die Funktion singulär ist.

Es liege der arithmetische Ausdruck:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h x i} \tag{2}$$

vor, wo a eine ganze Zahl bedeutet, die größer als 1 ist. Wird $x = u + iv$ gesetzt, so hat man:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h(-v+iu)},$$

und die Reihe der absoluten Beträge der Glieder von $F(x)$ ist:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{-v a^h}.$$

Nun kann man nach Annahme eines willkürlichen σ eine Zahl n derart bestimmen, daß:

$$\sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{h!} < \sigma$$

wird; andrerseits hat man für $v \geqq 0$:

$$e^{-v a^h} \leqq 1,$$

mithin:

$$\sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{-v a^h} \leqq \sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{h!} < \sigma,$$

und die Reihe (2) ist in der Halbebene oberhalb der reellen Achse mit Einschluß dieser Achse selbst unbedingt und gleichmäßig konvergent.

Dasselbe läßt sich von allen ihren Ableitungen behaupten. Man hat in der Tat:

$$F^{(r)}(x) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h x i};$$

die Reihe der absoluten Beträge der Glieder ist:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{-v a^h}.$$

Vergleicht man sie mit der konvergenten Reihe:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} = e^{a^r},$$

so gewinnt man das gewünschte Ergebnis.

Wir wollen jetzt die Entwicklung nach der Taylorschen Reihe in der Umgebung eines Punktes c betrachten.

Wir werden zeigen, daß diese Reihe, unter einer beschränkenden Voraussetzung hinsichtlich der ganzen Zahl a, für eine auf der ganzen reellen Achse überall dichte Punktmenge einen von Null verschiedenen, ja, sogar unendlichen Konvergenzradius, für eine andre Punktmenge derselben Art aber den Konvergenzradius Null besitzt.

Wir ziehen zunächst den Punkt:

$$c = (m + \tfrac{1}{2})\pi$$

in Betracht, wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Es ist dann:

$$F(c) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h i \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (-1)^{m a^h} i^{a^h}.$$

Setzen wir a als ungerade Zahl von der Form $4k + 3$ voraus, so haben wir:

$$(-1)^{m a^h} = (-1)^m,$$
$$i^{a^h} = (-1)^h i \text{ [1]},$$

mithin:

$$F(c) = (-1)^m i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} = (-1)^m i e^{-1}.$$

Ferner ist:

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h i \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi} =$$

$$= (-1)^m i^{r+1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} a^{rh} = (-1)^m i^{r+1} e^{-a^r}.$$

---

1) Da die ungeraden Potenzen von a die Form $4k + 3$, die geraden die Form $4k + 1$ haben, so ist, wenn k_h eine ganze Zahl bedeutet:

$$a^h = 4k_h + (-1)^h;$$

beachtet man ferner, daß:

$$i^4 = 1, \qquad i^{\pm 1} = \pm i,$$

so folgt:

$$i^{a^h} = i^{4k_h} i^{(-1)^h} = (-1)^h i.$$

Für den betrachteten Punkt c wird demnach die Reihe (1) zu folgender:

$$(3) \qquad (-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} i^{r+1} e^{-a^r} (x-c)^r;$$

da aber:

$$\left| \frac{i^{r+1} e^{-a^r}}{r!} \right| < \frac{1}{r!}$$

ist, so sind die Koeffizienten von (3) absolut kleiner als diejenigen der Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(x-c)^r$, die einen unendlichen Konvergenzradius hat. Daher hat auch (3) einen unendlichen Konvergenzradius.

Ziehen wir jetzt den Punkt:

$$c = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^q}$$

in Betracht, wo q eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so haben wir:

$$F(c) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} =$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} + \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} =$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} + (-1)^{m+q} i \sum_{h=q}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} =$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} \left[e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i(-1)^{m+q+h} \right] + (-1)^{m+q} i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!}.$$

Da nun:

$$\left| e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} \right| = 1$$

ist, woraus:

$$\left| e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i(-1)^{m+q+h} \right| \leqq 2$$

folgt, und da ferner:

$$\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} < q$$

ist, so ergibt sich:

$$\left|\sum_{h=0}^{q-1}\frac{1}{h!}\left[e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}-i(-1)^{m+q+h}\right]\right|<2q,$$

mithin:

$$|F(c)|<2q+e^{-1}<2q+1.$$

Analog ist:

$$F^{(r)}(c)=i^r\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\alpha^{rh}e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}=$$

$$=i^r\left[\sum_{h=0}^{q-1}\frac{1}{h!}\alpha^{rh}e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}+\sum_{h=q}^{\infty}\frac{1}{h!}\alpha^{rh}e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]=$$

$$=i^r\left[\sum_{h=0}^{q-1}\frac{1}{h!}\alpha^{rh}e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}+(-1)^{m+q}i\sum_{h=q}^{\infty}\frac{(-1)^h}{h!}\alpha^{rh}\right]=$$

$$=i^r\left[\sum_{h=0}^{q-1}\frac{1}{h!}\alpha^{rh}\left\{e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}-i(-1)^{m+q+h}\right\}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{m+q}i\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{h!}\alpha^{rh}\right]$$

Nun ist:

$$\left|e^{\alpha^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}-i(-1)^{m+q+h}\right|\leqq 2,\qquad \sum_{h=0}^{q-1}\frac{1}{h!}\alpha^{rh}<q\alpha^{rq},$$

folglich:

$$|F^{(r)}(c)|<2q\alpha^{rq}+e^{-\alpha^r}<(2q+1)\alpha^{rq}.$$

Die Koeffizienten von (1) sind also absolut kleiner als die entsprechenden der Reihe:

$$(2q+1)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{rq}}{r!}(x-c)^r,$$

die einen unendlichen Konvergenzradius hat, wie man daraus ersieht, daß sie sich:

$$(2q+1)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}[\alpha^q(x-c)]^r$$

schreiben läßt.

Daraus folgt, daß auch (1) einen unendlichen Konvergenzradius besitzt.

Die Punkte:

$$c = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^q} \qquad (q = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

bilden eine auf der ganzen reellen Achse überall dichte Menge, d. h. es läßt sich nach Annahme einer beliebigen reellen Zahl d und einer beliebigen positiven Zahl σ eine der Zahlen (4) angeben, die sich von d ihrem absoluten Betrage nach um weniger als σ unterscheidet.

Benutzen wir a als Basis eines Zahlensystems, so wird irgend eine reelle Zahl, z. B. $\frac{2d}{\pi}$, durch eine endliche oder unendliche Entwicklung von folgender Form:

$$\frac{2d}{\pi} = p_0 + \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a^2} + \cdots \tag{5}$$

dargestellt, wo p_0 eine ganze positive oder negative Zahl oder Null ist, $p_1, p_2, \cdots$ aber ganze, nicht negative Zahlen bedeuten, die kleiner als a sind.

Wir setzen die Entwicklung zunächst als endlich voraus; dann ist:

$$\frac{2d}{\pi} = p_0 + \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a^2} + \cdots + \frac{p_q}{a^q} = \frac{p_0 a^q + p_1 a^{q-1} + \cdots + p_q}{a^q} = \frac{n}{a^q},$$

wo n eine ganze Zahl ist. Ist n ungerade, etwa $= 2m + 1$, so hat man:

$$d = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^q};$$

d ist demnach einer der Punkte (4). Ist n gerade, so suche man eine ganze positive Zahl s von der Art, daß:

$$\frac{\pi}{2a^s} < \sigma$$

wird, und nehme eine ganze Zahl t an, die größer als s und q sein möge; alsdann setze man:

$$c = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{a^q} + \frac{1}{a^t}\right) = \frac{(n a^{t-q} + 1)\pi}{2a^t}.$$

Da n gerade ist, so ist $na^{t-q} + 1$ ungerade und c ist einer der Punkte (4); man hat ferner:

$$c - d = \frac{\pi}{2a^t} < \frac{\pi}{2a^s} < \sigma.$$

Ist dagegen die Entwicklung (5) unendlich, so kann man schreiben:

$$\frac{2d}{\pi} = p_0 + \frac{p_1}{a} + \cdots + \frac{p_s}{a^s} + \frac{p_{s+1}}{a^{s+1}} + \cdots = \frac{n}{a^s} + \frac{p_{s+1}}{a^{s+1}} + \cdots,$$

woraus bekanntlich folgt:

$$\frac{n+1}{a^s} > \frac{2d}{\pi} > \frac{n}{a^s}$$

oder auch:

$$\frac{(n+1)\pi}{2a^s} > d > \frac{n\pi}{2a^s}.$$

Eins der beiden Außenglieder dieser Ungleichung ist eine der Zahlen (4), beide aber unterscheiden sich von d um weniger als σ. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ziehen wir schließlich die Punkte:

$$c = \frac{m\pi}{a^q} \qquad (q = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

in Betracht und nehmen zuvörderst $q = 0$, d. h. $c = m\pi$ an, so haben wir:

$$F(c) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h m\pi i} = (-1)^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = (-1)^m e,$$

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h m\pi i} = i^r (-1)^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{rh}}{h!} = i^r (-1)^m e^{a^r},$$

und die Reihe (1) wird zu folgender:

$$(-1)^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{i^r e^{a^r}}{r!} (x-c)^r; \tag{7}$$

da nun $a^r > r^2$ ist für jedes hinreichend große r, ferner offenbar $r! < r^r$ ist, so folgt:

$$\sqrt[r]{\frac{e^{a^r}}{r!}} > \sqrt[r]{\frac{e^{r^2}}{r^r}} = \frac{e^r}{r}.$$

Es wächst aber $\frac{e^r}{r}$ zugleich mit r unbegrenzt; dasselbe läßt sich mithin von $\sqrt[r]{\frac{e^{a^r}}{r!}}$ behaupten, und die Reihe (7) hat demnach (Art. 113) den Konvergenzradius Null.

Es sei jetzt $q > 0$. Alsdann haben wir:

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - q m \pi i}$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - q m \pi i} + \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - q m \pi i} \right]$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - q m \pi i} + (-1)^m \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} \right]$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} (e^{a^h - q m \pi i} - (-1)^m) + (-1)^m e^{a^r} \right].$$

Nun ist:

$$\left| \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} (e^{a^h - q m \pi i} - (-1)^m) \right| < 2 \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} < 2 q a^{rq};$$

andrerseits läßt sich für jedes vorgegebene q eine Zahl k von der Art angeben, daß für jedes $s > k$:

$$e^s > s^{5q}$$

wird, und somit auch eine Zahl j von der Art, daß für jedes $r > j$:

$$e^{a^r} > a^{5rq}$$

wird; man hat ferner für ein hinreichend großes s:

$$s^{4q} > 4q$$

oder auch:

$$a^{4rq} > 4q$$

und somit:

$$e^{a^r} > 4 q a^{rq}.$$

Daraus ergibt sich von einem bestimmten Werte von r an:

$$|F^{(r)}(c)| > e^{a^r} - 2 q a^{rq} > \frac{1}{2} e^{a^r};$$

in dem betrachteten Falle sind demnach die Koeffizienten von (1) ihrem absoluten Betrage nach beziehungsweise größer als diejenigen der Reihe:

$$\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{a^r}}{r!} (x - c)^r,$$

die die Null als Konvergenzradius besitzt, wie sich aus dem soeben Gesagten ergibt.

Es hat also (1) in allen Punkten (6) den Konvergenzradius Null. Diese Punkte bilden aber, wie sich durch Wiederholung des für die Punkte (4) erbrachten Beweises würde zeigen lassen, eine auf der ganzen reellen Achse überall dichte Menge.

Setzt man $e^{xi} = y$, so ergibt sich aus (2) die Potenzreihe:

$$\Phi(y) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} y^{a^h}.$$

Beachtet man nun, daß $F(x)$ für $v \geqq 0$ konvergiert und daß $|y| = e^{-v}$ ist, so ergibt sich daraus, daß $\Phi(y)$ für $|y| \leqq 1$ konvergiert. Der reellen Achse der x-Ebene entspricht der Einheitskreis der y-Ebene; es gibt daher auf diesem Kreise eine überall dichte Menge von Punkten, in deren jedem die Taylorsche Entwicklung einen unendlichen Konvergenzradius hat, und eine zweite überall dichte Menge von Punkten, in deren jedem sie den Konvergenzradius Null besitzt.

4. Frage.

393. Der Cauchysche Satz (Art. 113) läßt sich gewissermaßen als hierher gehörig betrachten, insofern, als er ja gestattet, auf Grund der Werte der Koeffizienten einen Bereich zu bestimmen, innerhalb dessen keine singulären Punkte vorhanden sind. Einen solchen Bereich bildet nämlich, wenn:

$$\lambda = \overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\alpha_h}$$

ist, der mit dem Radius $\frac{1}{\lambda}$ um den Anfangspunkt beschriebene Kreis.

Als eine Verallgemeinerung dieses Satzes kann man die Untersuchungen von Fabry ansehen, deren Grundlagen wir darlegen wollen, während wir für die zahlreichen Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen, auf dessen Abhandlung verweisen.

Es sei $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ das dem Anfangspunkte entsprechende Element einer analytischen Funktion $f(x)$, b eine beliebige, θ eine reelle positive Größe, und es werde:

$$(1)\quad \varDelta_n^h = b^n a_{h+n} - \binom{n}{1} b^{n-1} a_{h+n-1} + \binom{n}{2} b^{n-2} a_{h+n-2} - \cdots + (-1)^n a_h$$

gesetzt. Hat das größte Element der abgeleiteten Menge der Menge der reellen und positiven Werte:

$$\sqrt[h]{|\Delta_n^h| \binom{h+n}{h} \theta^n} = \sqrt[h]{D_n^h} \qquad (h = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

für sämtliche Werte von n einen endlichen Wert λ, so enthält der Teil der Ebene, dessen Punkte der Ungleichung:

$$|x| - \theta\,|b - x| < \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

genügen, keinen singulären Punkt der Funktion $f(x)$, ausgenommen etwa den Punkt $x = \infty$, der ein Pol sein darf[1]).

Aus (1) ergibt sich ohne jede Schwierigkeit:

$$b^n a_{h+n} = \Delta_0^h + \binom{n}{1}\Delta_1^h + \binom{n}{2}\Delta_2^h + \cdots + \Delta_n^h = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta_i^h$$

und somit:

$$f^{(h)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+h)!}{n!}a_{n+h}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+h)!}{n!}\left(\frac{x}{b}\right)^n \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta_i^h$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\frac{(n+h)!}{i!\,(n-i)!}\left(\frac{x}{b}\right)^n \Delta_i^h = \sum_{i=0}^{\infty}\Delta_i^h\left(\frac{x}{b}\right)^i \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+i+h)!}{i!\,m!}\left(\frac{x}{b}\right)^m$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+h)!}{i!}\Delta_i^h\left(\frac{x}{b}\right)^i \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+i+h}{m}\left(\frac{x}{b}\right)^m$$

oder auch (S. 88, Anm.):

$$f^{(h)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+h)!}{i!}\Delta_i^h\left(\frac{x}{b}\right)^i\frac{1}{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{i+h+1}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{1}{h!}f^{(h)}(x) = \left(1-\frac{x}{b}\right)^{-h-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{h+n}{h}\Delta_n^h\left(\frac{x}{b-x}\right)^n. \tag{4}$$

Nun hat man für hinreichend große h, wenn ϱ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ ist (Art. 113):

$$|a_h| < \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right)^h;$$

1) Um von hier aus zu dem Cauchyschen Satze zu gelangen, braucht man nur $n = 0$ zu setzen und θ beliebig klein zu nehmen.

wird $b = \beta e^{\gamma i}$ gesetzt, so folgt daraus:

$$(5) \qquad |\Delta_n^h| < \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right)^h \left[\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right]^n,$$

mithin ist:

$$\left|\frac{1}{h!} f^{(h)}(x)\right| < \left|1 - \frac{x}{b}\right|^{-h-1} \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right)^h \sum_{n=0}^{\infty} \binom{h+n}{h} \left[\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right]^n \left|\frac{x}{b-x}\right|^n.$$

Die rechts stehende Reihe konvergiert (vgl. S. 88, Anm.) für:

$$\left[\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right] \left|\frac{x}{b-x}\right| < 1;$$

mithin konvergiert (4) sicherlich, wenn:

$$\left|\frac{x}{b-x}\right| < \frac{\varrho}{\beta + \varrho}$$

ist. Ferner ist:

$$D_n^h < \binom{h+n}{h} \theta^n \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right)^h \left[\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right]^n$$

und folglich um so mehr:

$$D_n^h < \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right)^h \sum_{i=0}^{\infty} \binom{h+i}{h} \theta^i \left[\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right]^i;$$

die rechts stehende Reihe konvergiert, wenn:

$$\theta < \frac{\varrho}{\beta + \varrho}$$

ist, und man erhält durch Einsetzung ihres Wertes (S. 88, Anm.):

$$D_n^h < \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right)^h \left[1 - \theta\left(\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right)\right]^{-h-1},$$

mithin:

$$\sqrt[h]{D_n^h} < \frac{\frac{1}{\varrho} + \varepsilon}{1 - \theta\left[\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right]} \left[1 - \theta\left(\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon\right) + 1\right)\right]^{-\frac{1}{h}}.$$

Der letzte Faktor nähert sich für $\lim h = \infty$ der Grenze 1; folglich ist:

$$\lambda \leqq \frac{\frac{1}{\varrho}}{1 - \theta\left(\frac{\beta}{\varrho} + 1\right)} = \frac{1}{\varrho - \theta(\beta + \varrho)}.$$

Andrerseits reduziert sich D_n^h auf α_h für $n=0$; es ist aber (Art. 113) $\lim_{h=\infty} \sqrt[h]{\alpha_h} = \frac{1}{\varrho}$, folglich $\lambda \geqq \frac{1}{\varrho}$. Man hat demnach:

$$(6) \qquad \varrho \geqq \frac{1}{\lambda} > \varrho - \theta(\beta + \varrho).$$

Für hinreichend große h ist nach der Definition von λ:

$$D_n^h < (\lambda + \varepsilon)^h$$

oder:

$$\binom{h+n}{h} \left| \varDelta_n^h \right| < \frac{(\lambda+\varepsilon)^h}{\theta^n};$$

setzt man der Einfachheit wegen voraus, die Ungleichung gelte für jeden Wert von n, so hat man aus (4):

$$\left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(x) \right| < \left| \frac{b}{b-x} \right|^{h+1} (\lambda+\varepsilon)^h \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} \left| \frac{x}{b-x} \right|^n$$

und, wenn $\left| \frac{x}{b-x} \right| < \theta$ ist:

$$\left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(x) \right| < \left| \frac{b}{b-x} \right|^{h+1} (\lambda+\varepsilon)^h \frac{1}{1 - \frac{1}{\theta} \left| \frac{x}{b-x} \right|} =$$

$$= \left| \frac{b}{b-x} \right|^h (\lambda+\varepsilon)^h \frac{|b|}{|b-x| - \frac{|x|}{\theta}},$$

woraus folgt:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(x) \right|} \leqq \lambda \left| \frac{b}{b-x} \right|.$$

Hieraus ergibt sich (Art. 113), daß der Konvergenzradius der in bezug auf den Punkt x transformierten Reihe $\geqq \frac{1}{\lambda} \left| 1 - \frac{x}{b} \right|$ ist, und daß sich die Funktion demnach in jedem Punkte regulär verhält, der von x um weniger als diese Größe entfernt ist. Es sei nun $y = \eta e^{\psi i}$ ein solcher Punkt, so daß also:

$$(7) \qquad \left| \eta e^{\psi i} - x \right| = \frac{\sigma}{\lambda} \left| 1 - \frac{x}{b} \right|$$

ist, worin $0 < \sigma < 1$. Setzen wir:

$$\frac{x}{b-x} = \xi e^{\varphi i},$$

wo nach dem Vorhergehenden $\xi < \theta$ sein muß, so läßt sich die Gleichung (7) schreiben:

$$\left|\eta e^{\psi i} - \frac{b\zeta}{\zeta + e^{-\varphi i}}\right| = \frac{\sigma}{\lambda} \frac{1}{|\zeta + e^{-\varphi i}|}$$

oder auch:

$$\eta e^{\psi i}(\zeta + e^{-\varphi i}) - b\zeta = \frac{\sigma}{\lambda} e^{\omega i},$$

wo ω eine reelle Größe bedeutet, deren Wert für uns von keiner Bedeutung ist. Schreiben wir diese Gleichung folgendermaßen:

$$\zeta\eta e^{\psi i} + \eta e^{(\psi-\varphi)i} = b\zeta + \frac{\sigma}{\lambda} e^{\omega i}, \tag{8}$$

so stellt ihre linke Seite einen Punkt der Kreislinie um ζy mit dem Radius η, ihre rechte Seite einen Punkt der Kreislinie um ζb mit dem Radius $\frac{\sigma}{\lambda}$ dar, und die Gleichung sagt aus, daß die beiden Kreislinien gemeinsame Punkte haben müssen. Damit dieser Fall eintritt, ist es notwendig und hinreichend, daß die Entfernung ihrer Mittelpunkte zwischen der Differenz und der Summe ihrer Radien liegt, d. h. daß:

$$\left|\eta - \frac{\sigma}{\lambda}\right| \leqq \zeta\,|b - y| \leqq \eta + \frac{\sigma}{\lambda}$$

ist. Wir bemerken, daß wir uns darauf beschränken können, diejenigen Punkte y in Betracht zu ziehen, die nicht innerhalb des mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises liegen, weil wir ja bereits wissen, daß die Funktion innerhalb dieses Kreises regulär ist. Wir können sonach $|y| \geqq \varrho$ annehmen; wegen (6) folgt daraus $|y| = \eta \geqq \frac{1}{\lambda} > \frac{\sigma}{\lambda}$, und die vorige Ungleichung läßt sich schreiben:

$$\eta - \frac{\sigma}{\lambda} \leqq \zeta\,|b - y| \leqq \eta + \frac{\sigma}{\lambda}.$$

Wählt man y so, daß es (3) befriedigt, ist also:

$$|y| - \theta\,|b - y| < \frac{1}{\lambda}, \tag{9}$$

so kann man einen positiven Wert σ, kleiner als 1, derart bestimmen, daß:

$$|y| - \theta\,|b - y| < \frac{\sigma}{\lambda}$$

oder auch:

$$\eta - \frac{\sigma}{\lambda} < \theta\,|b - y|$$

wird; man kann sodann einen positiven Wert $\zeta < \theta$ derart wählen, daß:

$$\eta - \frac{\sigma}{\lambda} < \zeta\,|b - y| < \eta + \frac{\sigma}{\lambda}$$

wird. Jeder Punkt y, für welchen (9) gilt, besitzt demnach die Eigenschaft, daß ihm ein Punkt x von der Art zugeordnet werden kann, daß (8) oder (7) befriedigt wird, oder mit andern Worten: Die Funktion $f(x)$ ist in jedem Punkte x, der (3) genügt, regulär.

394. Wir ziehen jetzt im besondern die Punkte des Konvergenzkreises der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ in Betracht, d. h. wir setzen $\eta = \varrho$. Aus (9) wird dann:

$$\varrho - \theta \,|\beta e^{\gamma i} - \varrho e^{\psi i}| < \frac{1}{\lambda}$$

oder:

$$\varrho - \frac{1}{\lambda} < \theta \,|\beta e^{\gamma i} - \varrho e^{\psi i}|. \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$\varrho - \frac{1}{\lambda} < \theta(\beta + \varrho)$$

oder auch:

$$\frac{1}{\theta^2}\left(\varrho - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - (\beta - \varrho)^2 < 4\beta\varrho.$$

Durch Entwicklung von (1) erhält man nach einigen leichten Umformungen:

$$\frac{1}{\theta^2}\left(\varrho - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - (\beta - \varrho)^2 < 4\beta\varrho \sin^2\frac{\psi - \gamma}{2}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung kann nicht negativ sein; die Ungleichung würde sonst für jeden Wert von ψ gelten und der Konvergenzkreis keinen singulären Punkt enthalten, was unmöglich ist (Art. 155). Daraus folgt erstens, daß $\varrho > \frac{1}{\lambda}$ ist, zweitens, daß sich zwischen 0 und π, die Grenzwerte eingeschlossen, ein Winkel Ω so bestimmen läßt, daß:

$$\frac{1}{\theta^2}\left(\varrho - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - (\beta - \varrho)^2 = 4\beta\varrho \sin^2\frac{\Omega}{2}$$

wird; alsdann ist unter der stets zulässigen Voraussetzung $0 \leqq \psi - \gamma < 2\pi$:

$$\Omega < \psi - \gamma < 2\pi - \Omega$$

oder:

$$\Omega + \gamma < \psi < 2\pi - \Omega + \gamma.$$

Der von den Winkeln $\Omega + \gamma$ und $2\pi - \Omega + \gamma$ eingeschlossene Bogen des Konvergenzkreises kann also in seinem Innern keine singulären Punkte enthalten.

Ist im besondern:

$$\frac{1}{\theta}\left(\varrho - \frac{1}{\lambda}\right) = \beta - \varrho.$$

so ist $\Omega = 0$, und auf dem Konvergenzkreise liegt der einzige singuläre Punkt $\varrho e^{\gamma i}$, d. h. sein Schnittpunkt mit dem Radiusvektor nach dem Punkte b.

395. Der Einfachheit wegen setzen wir b als reell und positiv, also $\gamma = 0$ voraus und betrachten nun die Linie:

$$(1) \qquad |x| - \theta\,|b - x| - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Sie teilt die Ebene in zwei (zusammenhängende oder nicht zusammenhängende) Gebiete, in deren einem die linke Seite von (1) negativ ist, während sie in dem andern positiv ist. In dem ersten dieser Gebiete verhält sich $f(x)$ sicher regulär. Es läßt sich leicht nachweisen, daß der Punkt $x = -\varrho$ in das erste, der Punkt $x = \varrho$ in das zweite Gebiet fällt. Beachtet man nämlich, daß $b = \beta$, $\varrho > \frac{1}{\lambda}$, so hat man nach einer im vorigen Artikel gemachten Bemerkung:

$$\frac{1}{\theta}\left(\varrho - \frac{1}{\lambda}\right) > |b - \varrho|$$

oder auch:

$$(2) \qquad \varrho - \theta\,|b - \varrho| - \frac{1}{\lambda} > 0;$$

es ist andrerseits wegen (6) in Art. 393:

$$(3) \qquad \varrho - \theta\,(b + \varrho) - \frac{1}{\lambda} < 0.$$

Wird $x = re^{i\varphi}$ gesetzt, so lautet die Gleichung der Kurve (1) in Polarkoordinaten:

$$\left(r - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \theta^2\,(r^2 - 2br\cos\varphi + b^2)$$

oder:

$$(4) \qquad r^2(1 - \theta^2) - 2r\left(\frac{1}{\lambda} - b\theta^2\cos\varphi\right) + \left(\frac{1}{\lambda^2} - b^2\theta^2\right) = 0;$$

nach r aufgelöst, liefert sie:

$$(5) \quad r = \frac{1}{1 - \theta^2}\left[\frac{1}{\lambda} - b\theta^2\cos\varphi \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - b\theta^2\cos\varphi\right)^2 - (1 - \theta^2)\left(\frac{1}{\lambda^2} - b^2\theta^2\right)}\right]$$

oder auch:

$$(6) \quad r = \frac{1}{1 - \theta^2}\left[\frac{1}{\lambda} - b\theta^2\cos\varphi \pm \theta\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - b\cos\varphi\right)^2 + b^2(1 - \theta^2)\sin^2\varphi}\right].$$

Wir nehmen zunächst $\theta < 1$ an.

Es genügt, wie wir wissen, die Werte $r > \frac{1}{\lambda}$ zu berücksichtigen. Von den Wurzeln der Gleichung (4) befriedigt, welches auch φ sei, eine einzige diese Bedingung; in der Tat ist ihre linke Seite positiv für $r = \infty$ und hat für $r = \frac{1}{\lambda}$ den Wert:

$$\theta^2\left(-\frac{1}{\lambda^2} - b^2 + \frac{2b\cos\varphi}{\lambda}\right) \leqq -\theta^2\left(\frac{1}{\lambda} - b\right)^2 \leqq 0.$$

Es liegt sonach in dem betrachteten Falle eine einzige geschlossene Kurve vor, innerhalb welcher die Funktion sicher regulär ist. Man kann das noch auf andre Weise ersehen. Für $\varphi = 0$ hat man:

$$r = \frac{1}{1-\theta^2}\left[\frac{1}{\lambda} - b\theta^2 + \theta\left(\frac{1}{\lambda} - b\right)\right] = \frac{1}{1-\theta}\left(\frac{1}{\lambda} - b\theta\right);$$

nun folgt aus (2):

$$\varrho - \frac{1}{\lambda} > \theta(\varrho - b)$$

oder auch:

$$\varrho > \frac{1}{1-\theta}\left(\frac{1}{\lambda} - b\theta\right),$$

mithin ist $\varrho > r$, woraus folgt, daß der Punkt $x = \varrho$ außerhalb der betrachteten Kurve liegt.

Wir nehmen jetzt $\theta = 1$ an. Die Gleichung der Kurve wird dann:

$$r = \frac{b^2 - \frac{1}{\lambda^2}}{2\left(b\cos\varphi - \frac{1}{\lambda}\right)}, \tag{7}$$

und man ersieht leicht, daß sie einen Hyperbelzweig darstellt, wenn man beachtet, daß aus (2) folgt:

$$\varrho - \frac{1}{\lambda} > \varrho - b$$

oder $b > \frac{1}{\lambda}$. Aus (7) ergibt sich dann, daß r nur für $\cos\varphi > \frac{1}{\lambda b}$ positiv ist; der durch (7) dargestellte Hyperbelzweig liegt somit zwischen den Radienvektoren mit den Argumenten $\pm \arccos\frac{1}{\lambda b}$.

Da ferner aus (2):

$$\varrho - \frac{1}{\lambda} > b - \varrho$$

oder auch:

$$\varrho > \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{\lambda}\right)$$

folgt, während man aus (7) für $\varphi = 0$:

$$r = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{\lambda}\right)$$

erhält, so liegt der Punkt $x = \varrho$ innerhalb der Hyperbel, und die Funktion ist demnach außerhalb unserer Kurve regulär.

Es sei schließlich $\theta > 1$. Aus (2) folgt:

$$\frac{1}{\lambda} < \varrho - \theta\,|b - \varrho| < \varrho - |b - \varrho| \leqq |\varrho + (b - \varrho)| = b$$

oder, wie im vorigen Falle, $b > \frac{1}{\lambda}$ und um so mehr $b\theta > \frac{1}{\lambda}$. Wir schreiben jetzt (4), (5) folgendermaßen:

$$r^2(\theta^2 - 1) - 2r\left(b\theta^2 \cos\varphi - \frac{1}{\lambda}\right) + \left(b^2\theta^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = 0,$$

$$r = \frac{1}{\theta^2 - 1}\left[b\theta^2 \cos\varphi - \frac{1}{\lambda} \pm \sqrt{\left(b\theta^2\cos\varphi - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - (\theta^2 - 1)\left(b^2\theta^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)}\right]$$

Sind die beiden Wurzeln reell, so haben sie offenbar dasselbe Vorzeichen. Sie sind reell, wenn:

$$b\theta^2 \cos\varphi - \frac{1}{\lambda} > \sqrt{(\theta^2 - 1)\left(b^2\theta^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

oder:

$$b\theta^2 \cos\varphi - \frac{1}{\lambda} < -\sqrt{(\theta^2 - 1)\left(b^2\theta^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)},$$

sie sind positiv, wenn:

$$b\theta^2 \cos\varphi - \frac{1}{\lambda} > 0$$

ist. Folglich muß:

$$b\theta^2 \cos\varphi - \frac{1}{\lambda} > \sqrt{(\theta^2 - 1)\left(b^2\theta^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

sein. Setzt man für den Augenblick:

$$\frac{1}{b\theta^2}\left(\frac{1}{\lambda} + \sqrt{(\theta^2 - 1)\left(b^2\theta^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)}\right) = c,$$

so hat man in diesem Falle eine geschlossene Kurve (weil ja r immer endlich bleibt), die zwischen die Radienvektoren mit den Argumenten $\pm \arccos c$ fällt. Da sich die linke Seite von (1) für $r = \infty$ auf $r(1 - \theta) < 0$ reduziert, so ist die Funktion $f(x)$ außerhalb der Kurve regulär. Es erübrigt daher zuzusehen, wie sich die Funktion im unendlich fernen Punkte verhält.

Greifen wir auf Formel (4) des Art. 393 zurück und beachten, daß für ein hinreichend großes h:

$$(8) \qquad \binom{h+n}{h} |\varDelta_n^h| \theta^n < (\lambda + \varepsilon)^h$$

ist, so ersehen wir, daß die rechts auftretende Reihe absolut kleiner ist als:

$$(\lambda + \varepsilon)^h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\theta^n} \left| \frac{x}{b-x} \right|^n ;$$

diese Reihe konvergiert aber für:

$$\left| \frac{x}{b-x} \right| < \theta$$

und somit im besondern für:

$$\frac{x}{b-x} = -1$$

oder für $x = \infty$; folglich konvergiert für diesen Wert auch die in (4) Art. 393 vorkommende Reihe, d. h. das Produkt:

$$\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{h+1} f^{(h)}(x),$$

oder, was dasselbe ist, das Produkt $x^{h+1} f^{(h)}(x)$ ist für $x = \infty$ regulär. Also ist $f^{(h)}(x)$ regulär für $x = \infty$ und hat in diesem Punkte eine Nullstelle, deren Ordnung wenigstens $h + 1$ ist. Daraus folgt (Art. 175), daß $f(x)$ für $x = \infty$ entweder regulär ist oder einen Pol besitzt, dessen Ordnung $\leqq k$ ist, wenn k den kleinsten Wert von h bezeichnet, für welchen die Relation (8) gilt.

396. Umgekehrt: Ist die Funktion $f(x)$ in allen Punkten x regulär, für welche, λ als positiv vorausgesetzt:

$$(1) \qquad |x| - \theta |b - x| < \frac{1}{\lambda},$$

und ist sie für $\theta \geqq 1$ im Punkte $x = \infty$ regulär oder mit einem Pole behaftet, so ist das größte Element der abgeleiteten Menge der Menge der Werte $\sqrt[h]{\varDelta_n^h}$ $(h = 1, 2, \cdots)$ endlich und übersteigt λ nicht.

Wir bemerken, daß das durch die Bedingung (1) abgegrenzte Gebiet A sicher den Anfangspunkt einschließt, da (1) ja durch $x = 0$ befriedigt wird, welche Werte auch b und λ haben mögen. Folglich

läßt sich die Funktion $f(x)$ in der Umgebung des Anfangspunktes in eine Potenzreihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ entwickeln, die einen von Null verschiedenen Konvergenzradius ϱ besitzt. — Es ist übrigens unnötig, den Fall zu berücksichtigen, in welchem das Gebiet A vollständig innerhalb des mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises liegt; andrerseits kann dieser Kreis nicht vollständig innerhalb A liegen, weil sonst der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ größer sein würde als ϱ. Folglich müssen der Umfang des Konvergenzkreises und die Begrenzung des Gebietes A gemeinsame Punkte haben, d. h. es muß Werte χ geben, für welche:

$$\varrho - \theta \,|\, b - \varrho e^{\chi i} \,| = \frac{1}{\lambda}$$

ist; daraus folgt:

$$\theta \,|\, \beta - \varrho \,| \leqq \varrho - \frac{1}{\lambda} \leqq \theta (\beta + \varrho).$$

Wir greifen nun auf Formel (4) des Art. 393 zurück und schreiben:

$$(2) \qquad \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{h+1} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{h+n}{h} \Delta_n^h \left(\frac{x}{b-x}\right)^n = \Phi_h(x) = \Psi_h(z),$$

wo:

$$(3) \qquad \frac{x}{b-x} = z = \zeta e^{\varphi i}$$

ist. Da $f(x)$ im ganzen Gebiete A regulär ist und für $\theta \geqq 1$ im unendlich fernen Punkte regulär ist oder einen Pol hat, so ist $\Phi_h(x)$ für jedes hinreichend große h in dem ganzen Gebiete A und für $\theta \geqq 1$ auch im unendlich fernen Punkte regulär. Daraus folgt, daß sich $\Psi_h(z)$ in sämtlichen Punkten der z-Ebene regulär verhält, die den Punkten des Gebietes A entsprechen, mit Einschluß des Punktes $z = -1$ für $\theta \geqq 1$. Nun erhält man, wenn in (1) mittels (3) z anstatt x eingeführt wird:

$$\frac{\beta(\zeta - \theta)}{|\zeta + e^{-\varphi i}|} < \frac{1}{\lambda}.$$

Daß es Punkte gibt, die dieser Ungleichung genügen, ist klar; dergleichen sind z. B. alle Punkte z, für welche $\zeta \leqq \theta$ ist.

Dem Punkte $z = \theta e^{\varphi i}$ entspricht in der x-Ebene der Punkt:

$$(4) \qquad x = \frac{b\theta}{\theta + e^{-\varphi i}}.$$

Wir werden zeigen, daß der Konvergenzradius der in bezug auf diesen Punkt transformierten Reihe nicht kleiner sein kann als:

$$\tau = \frac{1}{\lambda \left| \theta + e^{-\varphi i} \right|},$$

d. h., daß jeder Punkt innerhalb des Kreises um x mit dem Radius τ innerhalb des Gebietes A liegt. Wird irgend einer dieser Punkte mit y bezeichnet, so hat man:

$$y = \frac{b\theta}{\theta + e^{-\varphi i}} + \frac{\sigma e^{\omega i}}{\lambda \left| \theta + e^{-\varphi i} \right|},$$

wo $0 < \sigma < 1$ und ω ein beliebiger Winkel ist. Daraus folgt, wenn ψ das Argument von $(\theta + e^{-\varphi i})$ bezeichnet:

$$y = \frac{b\theta + \frac{\sigma}{\lambda} e^{(\omega+\psi) i}}{\theta + e^{-\varphi i}}, \quad b - y = \frac{b e^{-\varphi i} - \frac{\sigma}{\lambda} e^{(\omega+\psi) i}}{\theta + e^{-\varphi i}},$$

$$\begin{aligned}
|y| - \theta\, |b - y| &= \frac{1}{\left|\theta + e^{-\varphi i}\right|} \left\{ \left| b\theta + \frac{\sigma}{\lambda} e^{(\omega+\psi) i} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \theta \left| b e^{-\varphi i} - \frac{\sigma}{\lambda} e^{(\omega+\psi) i} \right| \right\} = \\
&= \frac{1}{\left|\theta + e^{-\varphi i}\right|} \left\{ \left| b\theta e^{-\varphi i} + \frac{\sigma}{\lambda} e^{-\varphi i} e^{(\omega+\psi) i} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \left| b\theta e^{-\varphi i} - \frac{\sigma}{\lambda} \theta e^{(\omega+\psi) i} \right| \right\} \leqq \\
&\leqq \frac{1}{\left|\theta + e^{-\varphi i}\right|} \frac{\sigma}{\lambda} \left|\theta + e^{-\varphi i}\right| = \frac{\sigma}{\lambda} < \frac{1}{\lambda},
\end{aligned}$$

was aussagt, daß y innerhalb A liegt.

Es folgt daher (Art. 113) für den Wert (4) von x:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(x) \right|} \leqq \frac{1}{\tau} = \lambda \left| \theta + e^{-\varphi i} \right|,$$

mithin wegen (2):

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\left| \Phi_h(x) \right|} = \left| \frac{b - x}{b} \right| \overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(x) \right|} \leqq \left| \frac{b - x}{b} \right| \frac{1}{\tau} = \lambda.$$

Man hat also für hinreichend große h:

$$\left| \Phi_h(x) \right| \leqq (\lambda + \varepsilon)^h$$

oder:

$$\left| \Psi_h(z) \right| \leqq (\lambda + \varepsilon)^h,$$

und diese letzte Ungleichung gilt für $|z| = \theta$, welchen Wert auch das Argument φ von z habe. Demnach folgt aus (2) (Art. 128, (3)):

$$\binom{h+n}{h} |\Delta_n^h| \leqq \frac{(\lambda+\varepsilon)^h}{\theta^n}$$

oder auch:

$$|D_n^h| \leqq (\lambda+\varepsilon)^h.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

5. Frage.

397. Ist der Koeffizient a_h einer Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h$$

eine einfache ganze Funktion nullten Ranges von h, so hat die durch $\mathfrak{P}(x)$ erzeugte analytische Funktion den einzigen singulären und zwar wesentlich singulären Punkt $x = 1$.

Es sei:

$$a_h = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k.$$

Schreiben wir nun:

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{h=1}^{\infty} x^h,$$

$$f_1(x) = x f_0'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum_{h=1}^{\infty} h x^h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f_k(x) = x f_{k-1}'(x) = x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \cdots = \sum_{h=1}^{\infty} h^k x^h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so läßt sich beweisen, daß im allgemeinen:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} b_{k,i} x^i f_0^{(i)}(x) \tag{1}$$

ist, wo die $b_{k,i}$ konstante Größen bezeichnen. Da diese Formel für $k = 1$ gilt, so darf man sich der vollständigen Induktion bedienen. Setzt man daher:

$$f_{k-1}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} b_{k-1,i} x^i f_0^{(i)}(x),$$

so erhält man hieraus:

$$f_k(x) = x \sum_{i=1}^{k-1} b_{k-1,i} [x^i f_0^{(i+1)}(x) + i x^{i-1} f_0^{(i)}(x)]$$

oder auch:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} [b_{k-1,i-1} + i b_{k-1,i}] x^i f_0^{(i)}(x),$$

indem man $b_{r,i}$ für $i = 0$ und für $i > r$ gleich Null annimmt. Damit ist unsere Formel bewiesen, und man hat zugleich die rekurrente Beziehung:

(2)
$$b_{k,i} = b_{k-1,i-1} + i b_{k-1,i}.$$

Im besondern ist:

$$b_{k,k} = b_{k-1,k-1} = \cdots = b_{1,1} = 1.$$

Aus (2) ergibt sich leicht, daß die Größen $b_{k,i}$ ganze positive Zahlen sind. Wir wollen jetzt mittels vollständiger Induktion zeigen, daß die Ungleichung:

(3)
$$b_{k,i} < 2^k \frac{(k-1)!}{i!},$$

die augenscheinlich für $k = 1$ gilt, für jeden Wert von k besteht. Vorausgesetzt, daß sie für $k - 1$ zutrifft, hat man:

$$b_{k-1,i-1} < 2^{k-1} \frac{(k-2)!}{(i-1)!}, \qquad b_{k-1,i} < 2^{k-1} \frac{(k-2)!}{i!},$$

mithin wegen (2):

$$b_{k,i} < 2^{k-1}(k-2)!\left[\frac{1}{(i-1)!} + \frac{i}{i!}\right] = 2^k \frac{(k-2)!}{(i-1)!};$$

da nun (3) offenbar für $i = k$ gültig ist, wo sie sich auf $1 < 2^k : k$ reduziert, so braucht man nur $i < k$ und entsprechend $\frac{k-1}{i} \geqq 1$ anzunehmen, wonach folgt:

$$b_{k,i} < 2^k \frac{(k-1)!}{i!}.$$

Wir denken uns jetzt um den Punkt $x = 1$ mit einem beliebig kleinen Radius ϱ einen Kreis beschrieben und bezeichnen das außerhalb dieses Kreises liegende Gebiet mit A. In diesem Gebiete be-

sitzen die Werte von $\left|\frac{x}{1-x}\right|$ eine endliche obere Grenze > 1, die wir l nennen wollen[1]). Da nun:

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x} - 1,$$

mithin:

$$f_0^{(i)}(x) = \frac{i!}{(1-x)^{i+1}}$$

ist, so folgt daraus wegen (1) und (3):

$$|f_k(x)| < \frac{2^k(k-1)!}{|1-x|} \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{x}{1-x}\right|^i,$$

und somit in sämtlichen Punkten des Gebietes A mit Rücksicht darauf, daß $l > 1$ ist, und unter der Voraussetzung $\varrho < 1$:

$$|f_k(x)| < \frac{2^k(k-1)!}{|1-x|} \sum_{i=1}^{k} l^i < \frac{2^k k!\, l^k}{|1-x|} \leqq \frac{2^k k!\, l^k}{\varrho} < k!\left(\frac{2l}{\varrho}\right)^k,$$

woraus sich ergibt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k f_k(x)| < \sum_{k=0}^{\infty} k!\, |c_k| \left(\frac{2l}{\varrho}\right)^k. \tag{4}$$

Da nun $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ der Voraussetzung nach eine einfache ganze Funktion nullten Ranges ist, so hat man (Art. 283):

$$\lim_{k=\infty} (k!\, c_k)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Daraus aber folgt (Art. 113), daß $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, c_k x^k$ eine ganze Funktion ist und daß somit die in (4) rechts stehende Reihe für jedes l und ϱ konvergiert. Es erhellt hieraus sofort, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x)$ in

---

1) Die Größe $\left|\frac{x}{1-x}\right|$ ist das Verhältnis der Entfernungen des Punktes x von den Punkten 0 und 1. Dieses Verhältnis ist längs eines jeden Kreises, in bezug auf welchen diese beiden Punkte konjugiert sind, konstant und die obere Grenze seiner Werte in dem Gebiete A ist derjenige Wert, welcher dem den Kreis um 1 mit dem Radius ϱ von innen berührenden Kreise der erwähnten Familie entspricht

jedem Bereiche innerhalb des Gebietes A unbedingt und gleichmäßig konvergiert und folglich innerhalb eines solchen Bereiches eine analytische Funktion $f(x)$ darstellt, die demnach in der ganzen Ebene keine andre Singularität besitzt als den Punkt $x = 1$. Nach dem Weierstraßschen Hilfssatze erhält man die Entwicklung von $f(x)$ in der Umgebung des Anfangspunktes, wenn man die Funktionen $f_k(x)$ durch deren Entwicklungen ersetzt; man hat so:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{h=1}^{\infty} h^k x^h = \sum_{h=1}^{\infty} x^h \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k = \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h.$$

Diese Reihe stimmt aber mit $\mathfrak{P}(x)$ überein; daher ist $f(x)$ die durch das Element $\mathfrak{P}(x)$ erzeugte analytische Funktion.

Beachtet man, daß $f_k(x)$ im Punkte $x = 1$ einen Pol $(k+1)$-ter Ordnung hat, so erkennt man, daß $f(x)$ in diesem Punkte eine wesentliche Singularität besitzt.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich ohne Schwierigkeit folgendermaßen verallgemeinern:

Sind $G_1(x), G_2(x), \cdots, G_r(x)$ r einfache ganze transzendente Funktionen nullten Ranges und ist:

$$a_h = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{x_j^h} G_j(h),$$

so erzeugt die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine analytische Funktion, die in der ganzen Ebene keine andern Singularitäten besitzt als die r wesentlich singulären Punkte $x_1, x_2, \cdots, x_r$.

Reduziert sich eine der Funktionen G auf ein Polynom, so reduziert sich der entsprechende singuläre Punkt auf einen Pol.

398. Umgekehrt: Ist $f(x)$ eine analytische Funktion, die den einzigen singulären Punkt $x = 1$ besitzt, und ist $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ ihr dem Anfangspunkt entsprechendes Element, so läßt sich a_h für $h > 0$ stets in Form einer ganzen Funktion $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$ von h darstellen, deren Koeffizienten der Bedingung:

$$\lim_{k=\infty} (k!\,c_k)^{\frac{1}{k}} = 0$$

genügen.

Wir wenden auf $f(x)$ die Transformation:

$$x = \frac{t}{t+1}$$

an; da nun $x = 0$ der Wert $t = 0$, $x = 1$ aber der Wert $t = \infty$ entspricht, so wird $f(x) - a_0$ in eine ganze Funktion von t verwandelt, die für $t = 0$ verschwindet; es ist also:

$$f(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k,$$

wo die rechts stehende Reihe einen unendlich großen Konvergenzradius besitzt. Zwischen den a und den b bestehen folgende Beziehungen (vgl. Art. 377):

(1) $$a_h = \sum_{k=1}^{h} \binom{h-1}{k-1} b_k.$$

Wir betrachten nun den arithmetischen Ausdruck:

(2) $$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{(k-1)!} b_k$$

und werden zunächst beweisen, daß er in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig konvergent ist. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$ für jeden endlichen Wert von t unbedingt konvergiert, so läßt sich, wenn man die positive Größe ε beliebig, aber kleiner als 1 annimmt, ein Index n von der Art angeben, daß für jedes $k > n$ die Ungleichung $|b_k| < \varepsilon^k$ gilt; man hat mithin für jedes x, das absolut kleiner ist als eine willkürliche ganze positive Zahl ϱ, und für jedes $m > n$:

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{(k-1)!} b_k \right| < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\cdots(\varrho+k-1)}{(k-1)!} \varepsilon^k.$$

Da nun die Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\cdots(\varrho+k-1)}{(k-1)!} \varepsilon^k = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\varrho+1}}$$

konvergiert, so kann man zu jedem vorgegebenen σ einen Index p von der Art angeben, daß für jedes $m > p$:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\cdots(\varrho+k-1)}{(k-1)!} \varepsilon^k < \sigma$$

ist; man hat demnach für jedes $m > n$ und $> p$ und für jedes x von kleinerem absolutem Betrage als ϱ:

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{(k-1)!} b_k \right| < \sigma,$$

eine Ungleichung, die aussagt, daß $\varphi(x)$ in einem Kreise mit beliebig großem Radius um den Anfangspunkt gleichmäßig konvergiert.

Es ist sonach $\varphi(x)$ eine ganze Funktion:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

und es ist aus den Formeln (1) und (2) ersichtlich, daß für jedes ganze positive h:

$$\varphi(h) = a_h$$

ist. Man hat ferner für $|x| = \varrho$ und für $m > n$:

$$|\varphi(x)| < \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\cdots(\varrho+k-1)}{(k-1)!} |b_k| + \\ + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\cdots(\varrho+k-1)}{(k-1)!} \varepsilon^k.$$

Bezeichnet man mit $Q(\varrho)$ das durch das erste Glied rechterhand dargestellte Polynom in ϱ, so kann man schreiben:

$$|\varphi(x)| < Q(\varrho) + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\varrho+1}}.$$

Man setze:

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = e^{\varepsilon'},$$

wo ε' eine positive Größe bedeutet, die um so kleiner ist, je kleiner ε ist, und wähle ϱ so groß, daß:

$$Q(\varrho) < e^{\frac{1}{2}\varepsilon''\varrho}, \quad \varepsilon'(\varrho+1) < \frac{1}{2}\varepsilon''\varrho$$

wird, wo ε'' eine Größe bedeutet, die nur größer als $2\varepsilon'$ zu sein braucht und somit ebenfalls beliebig klein ist. Alsdann hat man:

$$|\varphi(x)| < e^{\varepsilon''\varrho};$$

daraus folgt aber (Art. 279), daß die Koeffizienten c_k der Ungleichung:

$$\lim_{k=\infty} (k!\, c_k)^{\frac{1}{k}} = 0$$

genügen.

Wie der vorige, so läßt sich auch dieser Satz verallgemeinern.

399. Haben die Koeffizienten der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ die Form:

$$a_h = p_h + q_h c^h,$$

wo c eine Konstante bedeutet, und ist:

$$(1) \qquad \lim_{h=\infty} \sqrt[h]{|p_h|} = 0, \quad \lim_{h=\infty} \sqrt[h]{\left|\sum_{i=0}^{h} (-1)^i \binom{h}{i} q_{h-i}\right|} = 0,$$

so besitzt die durch diese Reihe erzeugte Funktion $f(x)$ in endlicher Entfernung den einzigen singulären Punkt $x = \frac{1}{c}$, und umgekehrt [1]).

Wegen der ersten Gleichung (1) ist $\sum_{h=0}^{\infty} p_h x^h$ eine ganze Funktion (Art. 113); wir wollen sie mit $\varphi(x)$ bezeichnen und schreiben:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(cx),$$

wo:

$$\psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} q_h\, x^h$$

ist. Wenden wir auf die Funktion $(1-x)\psi(x)$ die Transformation:

$$(2) \qquad x = \frac{t}{t+1}$$

an, so erhalten wir (vgl. Art. 377):

$$(1-x)\psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} r_h t^h,$$

wo:

$$(3) \qquad r_h = \sum_{i=0}^{h} (-1)^i \binom{h}{i} q_{h-i}$$

1) Auch dieser Satz gehört zu denjenigen, die als Erweiterungen des Satzes von Cauchy gelten können.

ist. Es ergibt sich somit aus der zweiten Gleichung (1), daß (Art. 113) $\sum_{h=0}^{\infty} r_h t^h$ eine ganze Funktion von t ist und daß infolgedessen $(1-x)\psi(x)$ und demnach auch $\psi(x)$ keinen andern singulären Punkt hat als den Punkt $x = 1$. Folglich hat $f(x)$ in endlicher Entfernung keine andre Singularität als den Punkt $x = \frac{1}{c}$.

Es sei jetzt umgekehrt $f(x)$ eine Funktion von solcher Beschaffenheit. Wir haben dann (Art. 181):

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(cx),$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze Funktion von x, $\psi(x)$ eine ganze Funktion von $\frac{1}{1-x}$ ohne konstantes Glied ist. Wir können dann schreiben:

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{h=0}^{\infty} d_h \frac{1}{(1-x)^h},$$

wo die Reihe rechts für alle Werte von $\frac{1}{1-x}$ konvergiert. Da:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$$

ist, so läßt sich diese Reihe in eine ganze Funktion von $\frac{x}{1-x}$ umwandeln, so daß:

$$(1-x)\psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} r_h \left(\frac{x}{1-x}\right)^h$$

oder auch, wenn wir die Transformation (2) vornehmen:

$$(1-x)\psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} r_h t^h$$

wird, wo die rechts stehende Reihe für alle Werte von t konvergiert. Daraus folgt (Art. 113):

(4) $$\lim_{h=\infty} \sqrt[h]{|r_h|} = 0.$$

Ist nun $\sum_{h=0}^{\infty} q_h x^h$ die Entwicklung von $\psi(x)$ in der Umgebung des Anfangspunktes, so finden zwischen den q und den r die Beziehungen (3) statt, so daß sich aus (4) unmittelbar die zweite Gleichung (1) ergibt. Ist andrerseits:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} p_h x^h,$$

so genügen die p_h der ersten der Gleichungen (1). Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

400. Der Satz läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ eine Funktion erzeugt, die in endlicher Entfernung lediglich die singulären Punkte $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \cdots, \frac{1}{c_r}$ besitzt, besteht darin, daß man:

$$a_h = p_h + \sum_{j=1}^{r} q_{jh} c_j^h$$

setzen kann, wobei:

$$\lim_{h=\infty} \sqrt[h]{|p_h|} = 0,$$

$$\lim_{h=\infty} \sqrt[h]{\left| \sum_{i=0}^{h} (-1)^i \binom{h}{i} q_{j,h-i} \right|} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

ist.

401. Auf die Frage, mit der wir uns beschäftigen, kann man folgendes Problem beziehen, das zugleich eine Verallgemeinerung des in Art. 375 u. ff. behandelten ist:

Es sollen die Bedingungen dafür gefunden werden, daß die p dem Anfangspunkte nächstliegenden singulären Punkte einer Funktion $f(x)$ einfache Pole von verschiedenen absoluten Beträgen sind.

Es seien:

$$d_1 = \delta_1 e^{\theta_1 i},\ d_2 = \delta_2 e^{\theta_2 i}, \cdots,\ d_p = \delta_p e^{\theta_p i}$$

die p nach zunehmendem absolutem Betrage geordneten Pole. Ist $\frac{l_k}{x - d_k}$ der Hauptteil (Art. 171) der Funktion im Pole d_k, so kann man schreiben:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{l_k}{x - d_k} + \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine Funktion darstellt, die in dem ganzen Kreise vom

Radius δ_p um den Anfangspunkt, den Umfang einbegriffen, regulär ist. Bezeichnen wir mit $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ die dem Anfangspunkte entsprechenden Elemente der Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ und beachten wir, daß die erste dieser Reihen den Konvergenzradius δ_1 hat (Art. 155), so haben wir für $|x| < \delta_1$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = -\sum_{k=1}^{p} l_k \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{d_k^{h+1}} + \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h,$$

woraus sich:

$$a_h = -\sum_{k=1}^{p} \frac{l_k}{d_k^{h+1}} + b_h$$

ergibt. Wir setzen, wenn m eine bestimmte Zahl bedeutet:

$$-\frac{l_k}{d_k^{m+1}} = L_k$$

und schreiben die vorstehende Beziehung folgendermaßen:

$$a_{m+h} = \sum_{k=1}^{p} \frac{L_k}{d_k^h} + b_{m+h}.$$

Es sei ferner:

$$D_{m,p-1} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} \cdots a_{m+p-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} \cdots a_{m+p} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m+p-1} & a_{m+p} \cdots a_{m+2p-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{11}\, \mu_{12} \cdots \mu_{1p} \\ \mu_{21}\, \mu_{22} \cdots \mu_{2p} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_{p1}\, \mu_{p2} \cdots \mu_{pp} \end{vmatrix},$$

wo:

$$\mu_{rs} = a_{m+r+s-2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{L_k}{d_k^{r+s-2}} + b_{m+r+s-2}.$$

Da der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ größer ist als δ_p, so sind die Reihen:

$$\sum_{h=0}^{\infty} b_h d_k^h \qquad (k = 1, \cdots, p)$$

absolut konvergent, und es ist folglich:

$$\lim_{h=\infty} b_h d_k^h = 0 \qquad (k = 1, \cdots, p);$$

es läßt sich daher nach Annahme einer beliebigen positiven Größe σ eine Zahl m derart bestimmen, daß für jedes $h > m$:

$$b_h = \frac{\varepsilon_{k,h}}{d_k^h}$$

wird, worin $|\varepsilon_{k,h}| < \sigma$ ist. Man kann also schreiben:

$$(1) \qquad \mu_{rs} = \sum_{k=1}^{p} \frac{L_k}{d_k^{r+s-2}} + \frac{\varepsilon_{s,m+r+s-2}}{d_s^m d_s^{r+s-2}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{L_k}{d_k^{r+s-2}} - \frac{d_s}{l_s} \frac{L_s \varepsilon_{s,m+r+s-2}}{d_s^{r+s-2}},$$

und es ist für jedes r und s:

$$\left| \frac{d_s}{l_s} \varepsilon_{s,m+r+s-2} \right| < \sigma\gamma,$$

wo γ den größten unter den Werten $\left|\frac{d_s}{l_s}\right|$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$ bezeichnet.

Setzen wir nun:

$$\varDelta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{d_1} & \frac{1}{d_2} & \cdots & \frac{1}{d_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{d_1^{p-1}} & \frac{1}{d_2^{p-1}} & \cdots & \frac{1}{d_p^{p-1}} \end{vmatrix}, \qquad \varDelta_p' = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{d_1} & \frac{1+\lambda_2}{d_2} & \cdots & \frac{1}{d_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{d_1^{p-1}} & \frac{1}{d_2^{p-1}} & \cdots & \frac{1+\lambda_p}{d_p^{p-1}} \end{vmatrix},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ beliebige Größen sind, ferner:

$$L_1 L_2 \cdots L_p \varDelta_p \varDelta_p' = E_{m,p-1} = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \cdots & \nu_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_{p1} & \cdots & \nu_{pp} \end{vmatrix};$$

beachten wir, daß:

$$L_1 L_2 \cdots L_p \varDelta_p = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_p \\ \frac{L_1}{d_1} & \frac{L_2}{d_2} & \cdots & \frac{L_p}{d_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{L_1}{d_1^{p-1}} & \frac{L_2}{d_2^{p-1}} & \cdots & \frac{L_p}{d_p^{p-1}} \end{vmatrix}$$

ist, und multiplizieren wir die Zeilen dieser Determinante mit den Zeilen von Δ_p', so wird:

$$\nu_{rs} = \sum_{k=1}^{p} \frac{L_k}{d_k^{r+s-2}} + \frac{\lambda_s L_s}{d_s^{r+s-2}}. \tag{2}$$

Man kann, wie sich aus dem Vergleich von (1) und (2) ergibt, von $E_{m,p-1}$ zu $D_{m,p-1}$ dadurch übergehen, daß man in $E_{m,p-1}$ das Symbol λ_s in den verschiedenen Elementen ν_{rs}, in denen es auftritt, durch verschiedene Veränderliche η_{rs} ersetzt und dann:

$$\eta_{rs} = -\frac{d_s}{l_s} \varepsilon_{s,m+r+s-2}$$

annimmt. Es ist aber offenbar Δ_p', und folglich auch $E_{m,p-1}$, eine stetige Funktion der Veränderlichen λ_s oder η_{rs}, und es ist $\Delta_p' = \Delta_p$ für $\eta_{rs} = 0$. Hieraus folgt, daß, wenn eine beliebig kleine Größe τ gegeben ist, sich σ stets so wählen läßt, daß:

$$\left| \frac{D_{m,p-1}}{L_1 \ldots L_p} - \Delta_p^2 \right| < \tau$$

wird. Das läßt sich schreiben:

$$\lim_{m=\infty} \frac{D_{m,p-1}}{L_1 L_2 \ldots L_p} = \Delta_p^2$$

oder auch:

$$\lim_{m=\infty} (d_1 \cdots d_p)^m D_{m,p-1} = (-1)^p \Delta_p^2 \frac{l_1 \ldots l_p}{d_1 \ldots d_p};$$

hieraus folgt schließlich:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} = \frac{1}{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_p} < \frac{1}{\delta_1^p}.$$

402. Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß für einen bestimmten Wert p die Bedingung:

$$l_{p-1} = \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} < \frac{1}{\varrho^p}$$

erfüllt sei, wo ϱ den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ bedeutet. Wir bemerken zunächst, daß für keinen Wert von p die Ungleichung $l_{p-1} > \frac{1}{\varrho^p}$ statthaben kann; man hat nämlich für jedes hinreichend große m, welches auch i sei (Art. 113):

$$|a_{m+i}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho}\right)^m, \tag{1}$$

mithin:

$$|D_{m,p-1}| < p!\left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho}\right)^{mp},$$

woraus:

$$\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} < \sqrt[m]{p!}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho}\right)^{p}$$

und schließlich:

$$l_{p-1} \leqq \frac{1}{\varrho^p}$$

folgt. Wir bemerken ferner, daß (Art. 113):

$$l_0 = \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \frac{1}{\varrho}$$

ist. Daraus folgt, daß sich, wenn man p der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \cdots$ gibt, ein Wert P von der Art finden muß, daß für jedes $p < P$ die Gleichung $l_p = \frac{1}{\varrho^{p+1}}$ gilt, während $l_P < \frac{1}{\varrho^{P+1}}$ ist.

Wir setzen $\varrho' = \frac{1}{l_P \varrho^P}$; es ergibt sich $\varrho' > \varrho$ und:

$$l_P = \frac{1}{\varrho^P \varrho'}.$$

Da:

$$l_{P-1} = \frac{1}{\varrho^P}$$

ist, so lassen sich unendlich viele Werte m angeben, für die:

$$\sqrt[m]{|D_{m,P-1}|} > \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\varrho^P} > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^P} \tag{2}$$

ist. Wir wollen beweisen, daß diese Ungleichung für jedes hinreichend große m gilt, daß also:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{|D_{m,P-1}|} = \frac{1}{\varrho^P}$$

wird.

403. Welcher Art auch die Zahlen m, p sind, so besteht doch immer folgende Beziehung:

$$H_{m,p} = D_{m+1,p-1} D_{m-1,p-1} - D^2_{m,p-1} = D_{m-1,p} D_{m+1,p-2} \text{ [1]}. \tag{1}$$

---

1) Bei Hadamard 182, S. 20 u. 184, S. 40 steht anstatt $D_{m+1,p-2}$ irrtümlicherweise $D_{m,p-2}$ geschrieben.

Bezeichnen wir nämlich mit μ_{rs} die Elemente der Determinante $D_{m-1,p}$, mit $\bar{\mu}_{rs}$ die zu μ_{rs} adjungierte Unterdeterminante, so ist:

$$\bar{\mu}_{1,1} = D_{m+1,p-1}, \quad \bar{\mu}_{p+1,p+1} = D_{m-1,p-1},$$
$$\bar{\mu}_{1,p+1} = \bar{\mu}_{p+1,1} = (-1)^p D_{m,p-1};$$

ferner ist $D_{m+1,p-2}$ die adjungierte Unterdeterminante der Unterdeterminante von $D_{m-1,p}$:

$$\mu_{1,1}\,\mu_{p+1,p+1} - \mu_{1,p+1}\,\mu_{p+1,1}.$$

Daraus folgt nach einem bekannten Satze [1]):

$$\bar{\mu}_{1,1}\,\bar{\mu}_{p+1,p+1} - \bar{\mu}_{1,p+1}\,\bar{\mu}_{p+1,1} = D_{m-1,p}\,D_{m+1,p-2},$$

was mit (1) zusammenfällt.

Unter den gemachten Voraussetzungen hat man für hinreichend große m:

$$|D_{m-1,p}| < \left(\frac{1+\varepsilon'}{\varrho^p\varrho'}\right)^{m-1}, \quad |D_{m+1,p-2}| < \left(\frac{1+\varepsilon'}{\varrho^{p-1}}\right)^{m+1},$$

mithin:

$$|H_{m,p}| < \left(\frac{1+\varepsilon'}{\varrho^p}\right)^{2m} \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^m \varrho\varrho'.$$

Man kann ε' so klein annehmen, daß:

$$(1+\varepsilon')\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}} < 1-\varepsilon$$

wird, und dann m so groß, daß:

$$(1+\varepsilon')\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}}\,\sqrt[2m]{\varrho\varrho'} < 1-\varepsilon$$

wird; alsdann ist, wenn h eine positive Größe < 1 bezeichnet:

$$|H_{m,p}| < \left(\frac{h(1-\varepsilon)}{\varrho^p}\right)^{2m}$$

oder:

(2) $$|H_{m,p}| < h^{2m}\,\omega^{2m}\,\theta^{2m},$$

wo:

$$\omega = \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\varrho^p}, \quad \theta = \frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}} < 1$$

---

1) Cesàro-Kowalewski, a. a. O., S. 28.

ist. Wir nehmen nun an, die Beziehung (2) des vorigen Art., die wir:

$$(3) \qquad |D_{m,P-1}| > \omega^m > \theta^m \omega^m$$

schreiben können, gelte nicht für alle Werte von m. Ist dann eine beliebig große Zahl N vorgegeben, so läßt sich eine Zahl $M > N$ derart bestimmen, daß die Beziehung für $m = M$, aber nicht für $m = M - 1$ Geltung hat. Alsdann ist:

$$|D_{M,P-1}| > \omega^M, \quad |D_{M-1,P-1}| < \omega^{M-1};$$

nun ist wegen (1), (2):

$$\theta^{2M} h^{2M} \omega^{2M} > |H_{M,P}| = |D_{M+1,P-1} D_{M-1,P-1} - D^2_{M,P-1}| \geqq$$
$$\geqq |D^2_{M,P-1}| - |D_{M+1,P-1}|\,|D_{M-1,P-1}|$$

oder auch:

$$|D_{M+1,P-1}| \geqq \frac{|D_{M,P-1}|^2 - h^{2M}\omega^{2M}\theta^{2M}}{|D_{M-1,P-1}|} > \frac{\omega^{2M} - h^{2M}\omega^{2M}}{\omega^{M-1}}$$

oder auch:

$$(4) \qquad |D_{M+1,P-1}| > \omega^{M+1}(1 - h^{2M}).$$

Man kann auch schreiben:

$$\left|\frac{D_{M+1,P-1}}{D_{M,P-1}}\frac{D_{M-1,P-1}}{D_{M,P-1}} - 1\right| < \frac{\theta^{2M} h^{2M}\omega^{2M}}{D^2_{M,P-1}} < h^{2M}\theta^{2M} < h^{2M},$$

mithin:

$$1 - \left|\frac{D_{M+1,P-1}}{D_{M,P-1}}\frac{D_{M-1,P-1}}{D_{M,P-1}}\right| < h^{2M};$$

daraus folgt:

$$\left|\frac{D_{M+1,P-1}}{D_{M,P-1}}\right| > (1 - h^{2M})\left|\frac{D_{M,P-1}}{D_{M-1,P-1}}\right| > (1 - h^{2M})\frac{\omega^M}{\omega^{M-1}}$$

und schließlich:

$$(5) \qquad \left|\frac{D_{M+1,P-1}}{D_{M,P-1}}\right| > \omega(1 - h^{2M}).$$

Wir werden jetzt zeigen, daß für jeden beliebigen Wert von i folgende Formeln gelten:

$$(6) \qquad |D_{M+i,P-1}| > \omega^{M+i}(1 - h^{2M})^i (1 - h^{2(M+1)})^{i-1} \cdots (1 - h^{2(M+i-1)}),$$

$$(7) \qquad \left|\frac{D_{M+i,P-1}}{D_{M+i-1,P-1}}\right| > \omega(1 - h^{2M})(1 - h^{2(M+1)}) \cdots (1 - h^{2(M+i-1)}),$$

$$(8) \qquad |D_{M+i,P-1}| > \omega^{M+i}\theta^{M+i};$$

die letzte von ihnen beweist unsere Behauptung, daß nämlich:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{|D_{m,P-1}|} = \frac{1}{\varrho^P}$$

ist. Da (6) und (7) für $i = 1$ gelten (s. die Formeln (4), (5)), (8) aber für $i = 0$ gilt (s. die Formel (3)), so können wir sie mittels vollständiger Induktion beweisen, indem wir sie für einen bestimmten Wert von i als richtig voraussetzen.

Wir nehmen in (2) $m = M + i$ und erhalten so:

$$|D_{M+i+1,P-1} D_{M+i-1,P-1} - D^2_{M+i,P-1}| < h^{2(M+i)} \omega^{2(M+i)} \theta^{2(M+i)},$$

mithin wegen (8):

$$1 - \left|\frac{D_{M+i+1,P-1}}{D_{M+i,P-1}} \frac{D_{M+i-1,P-1}}{D_{M+i,P-1}}\right| < \frac{h^{2(M+i)} \omega^{2(M+i)} \theta^{2(M+i)}}{|D^2_{M+i,P-1}|} < h^{2(M+i)}$$

oder auch:

$$\left|\frac{D_{M+i+1,P-1}}{D_{M+i,P-1}}\right| > (1 - h^{2(M+i)}) \left|\frac{D_{M+i,P-1}}{D_{M+i-1,P-1}}\right|$$

und wegen (7):

$$\left|\frac{D_{M+i+1,P-1}}{D_{M+i,P-1}}\right| > \omega (1 - h^{2M})(1 - h^{2(M+1)}) \cdots (1 - h^{2(M+i)}), \tag{9}$$

womit (7) selbst bewiesen ist.

Aus (6), (9) erhält man sodann:

$$|D_{M+i+1,P-1}| > \omega^{M+i+1} (1 - h^{2M})^{i+1} (1 - h^{2(M+1)})^i \cdots \\ \cdots (1 - h^{2(M+i-1)})^2 (1 - h^{2(M+i)}), \tag{10}$$

womit (6) bewiesen ist.

Aus (10) folgt schließlich:

$$\sqrt[M+i+1]{|D_{M+i+1,P-1}|} > \omega (1 - h^{2M})^{\frac{i+1}{M+i+1}} (1 - h^{2(M+1)})^{\frac{i}{M+i+1}} \cdots \\ \cdots (1 - h^{2(M+i)})^{\frac{1}{M+i+1}} > \omega (1 - h^{2M})(1 - h^{2(M+1)}) \cdots (1 - h^{2(M+i)})$$

und daraus (S. 431, Anm.):

$$\sqrt[M+i+1]{|D_{M+i+1,P-1}|} > \omega [1 - (h^{2M} + h^{2(M+1)} + \cdots + h^{2(M+i)})] = \\ = \omega \left[1 - \frac{h^{2M} - h^{2(M+i+1)}}{1 - h^2}\right] > \omega \left[1 - \frac{h^{2M}}{1 - h^2}\right].$$

Nun läßt sich N so groß annehmen, daß für jedes $M > N$:

$$1 - \frac{h^{2M}}{1-h^2} > \theta$$

wird; daraus folgt:

$$\sqrt[M+i+1]{|D_{M+i+1,\,P-1}|} > \omega\,\theta;$$

damit ist aber (8) und zugleich die Ende Art. 402 ausgesprochene Behauptung bewiesen.

404. Nach diesen Vorbereitungen definieren wie die P Größen $C_{m,1}, C_{m,2}, \cdots, C_{m,P}$ mittels der Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} C_{m,P}\,a_m + C_{m,P-1}\,a_{m+1} + \cdots + C_{m,1}\,a_{m+P-1} + a_{m+P} = 0 \\ C_{m,P}\,a_{m+1} + C_{m,P-1}\,a_{m+2} + \cdots + C_{m,1}\,a_{m+P} + a_{m+P+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{m,P}\,a_{m+P-1} + C_{m,P-1}\,a_{m+P} + \cdots + C_{m,1}\,a_{m+2P-2} + a_{m+2P-1} = 0 \end{cases}$$

und schreiben außerdem:

$$(2)\quad C_{m,P}\,a_{m+P} + C_{m,P-1}\,a_{m+P+1} + \cdots + C_{m,1}\,a_{m+2P-1} + a_{m+2P} = H.$$

Die Resultante aus (1), (2) ist:

$$\begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdots & a_{m+P-1} & a_{m+P} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+P} & a_{m+P-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+P-1} & a_{m+P} & \cdots & a_{m+2P-2} & a_{m+2P-1} \\ a_{m+P} & a_{m+P+1} & \cdots & a_{m+2P-1} & a_{m+2P} - H \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$H = \frac{D_{m,P}}{D_{m,P-1}}.$$

Wir denken uns nun die Gleichungen (1) für den Index $m+1$ hingeschrieben; durch Vergleich mit (1), (2) erhalten wir dann, wenn:

$$C_{m+1,h} - C_{m,h} = B_{m,h}$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} &B_{m,P}\,a_{m+1} + B_{m,P-1}\,a_{m+2} + \cdots + B_{m,1}\,a_{m+P} = 0 \\ &B_{m,P}\,a_{m+2} + B_{m,P-1}\,a_{m+3} + \cdots + B_{m,1}\,a_{m+P+1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &B_{m,P}\,a_{m+P-1} + B_{m,P-1}\,a_{m+P} + \cdots + B_{m,1}\,a_{m+2P-2} = 0 \\ &B_{m,P}\,a_{m+P} + B_{m,P-1}\,a_{m+P+1} + \cdots + B_{m,1}\,a_{m+2P-1} = -H \end{aligned}\right\};$$

durch Auflösung ergibt sich daraus:

$$B_{m,h} = (-1)^h H \frac{D^{(h)}_{m+1,P-2}}{D_{m+1,P-1}} = (-1)^h \frac{D^{(h)}_{m+1,P-2} D_{m,P}}{D_{m+1,P-1} D_{m,P-1}},$$

wo $D^{(h)}_{m+1,P-2}$ die Determinante bedeutet, die man aus der Determinante des Systems durch Unterdrückung der letzten Zeile und der $(P-h+1)$-ten Kolonne erhält. Man hat nun für ein hinreichend großes m (vgl. Art. 402):

$$\left| D^{(h)}_{m+1,P-2} \right| < (P-1)! \left(\frac{1+\varepsilon'}{\varrho}\right)^{m'(P-1)} = (P-1)! \left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho^{P-1}}\right)^{m'},$$

wo $m' = m$ oder $m' = m + P$ ist, je nachdem $\frac{1+\varepsilon'}{\varrho} < 1$ oder > 1 ist; mithin durch eine geeignete Änderung des Wertes von ε:

$$\sqrt[m+1]{\left| D^{(h)}_{m+1,P-2} \right|} < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^{P-1}};$$

ferner:

$$\sqrt[m]{\left| D_{m,P} \right|} < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^P \varrho'},$$

außerdem aber (s. den vorigen Artikel):

$$\sqrt[m+1]{\left| D_{m+1,P-1} \right|} > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^P},$$

$$\sqrt[m]{\left| D_{m,P-1} \right|} > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^P}.$$

Daraus folgt:

$$\left| B_{m,h} \right| < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{2m+1} \frac{\varrho^{m+1}}{\varrho'^m}$$

und somit:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{\left| B_{m,h} \right|} = \frac{\varrho}{\varrho'} = \tau < 1.$$

Wählt man also τ_1 größer als τ und kleiner als 1, so läßt sich M derart bestimmen, daß für jedes $m \geqq M$:

$$\left| B_{m,h} \right| < \tau_1^m$$

wird. Daraus folgt, daß die Reihe:

$$\begin{aligned} & C_{M,h} + B_{M,h} + B_{M+1,h} + B_{M+2,h} + \cdots = \\ & = C_{M,h} + (C_{M+1,h} - C_{M,h}) + (C_{M+2,h} - C_{M+1,h}) + \\ & \quad + (C_{M+3,h} - C_{M+2,h}) + \cdots \end{aligned}$$

konvergiert oder daß sich $C_{m,h}$, während m dem Unendlichen zustrebt, einem bestimmten Grenzwerte nähert, den wir mit C_h bezeichnen wollen. Demnach hat man:

$$|C_h - C_{m,h}| \leqq |B_{m,h}| + |B_{m+1,h}| + \cdots < \frac{\tau_1^m}{1-\tau_1}.$$

Nun kann man wegen der Gleichungen (1) schreiben:

$$\begin{aligned} b_{m+P} = C_P a_m + C_{P-1} a_{m+1} + \cdots + \\ + C_1 a_{m+P-1} + a_{m+P} = (C_P - C_{m,P}) a_m + \\ + (C_{P-1} - C_{m,P-1}) a_{m+1} + \cdots + (C_1 - C_{m,1}) a_{m+P-1} \end{aligned}$$

und folglich für ein hinreichend großes m (Art. 402, (1)):

$$|b_{m+P}| < P \frac{\tau_1^m}{1-\tau_1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho}\right)^{m+r},$$

wo $r = 0$ oder $r = P$, je nachdem $\frac{1+\varepsilon}{\varrho} < 1$ oder > 1 ist. Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|b_m|} \leqq \frac{\tau_1}{\varrho}$$

und, da τ_1 um eine beliebig kleine Größe τ übertrifft:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|b_m|} \leqq \frac{\tau}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'}.$$

Beachtet man nun, daß b_m der Koeffizient von x^m in dem Produkte:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \times (1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_P x^P)$$

ist, so kann man schließen (Art. 113), daß der Konvergenzradius dieses Produktes mindestens ϱ' ist und daß somit $f(x)$ innerhalb des Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius ϱ' keine andern Singularitäten hat als die P Nullstellen des Polynomes:

$$P(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_P x^P,$$

welche ebenso viele Pole von $f(x)$ bilden. Der gemeinsame absolute Betrag derselben ist ϱ, da ja, wenn $P'(< P)$ von ihnen den absoluten Betrag ϱ, die übrigen aber einen größern absoluten Betrag besäßen, $l_{P'} < \frac{1}{\varrho^{P'+1}}$ sein würde.

Wie man sieht, stellt das dargelegte Verfahren nicht nur die Existenz der P Pole fest, sondern gestattet auch, diese zu bestimmen.

405. Wir schreiten jetzt dazu, die Singularitäten von $f(x)$ zu untersuchen, deren absoluter Betrag $\geqq \varrho'$ ist.

Ist $p \geqq P$, so kann man schreiben:

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdots a_{m+P-1} & b_{m+P} & b_{m+P+1} & \cdots b_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots a_{m+P} & b_{m+P+1} & b_{m+P+2} & \cdots b_{m+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \cdots a_{m+p+P-1} & b_{m+p+P} & b_{m+p+P+1} & \cdots b_{m+2p} \end{vmatrix};$$

erinnert man sich, daß:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \frac{1}{\varrho}, \quad \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|b_m|} \leqq \frac{1}{\varrho'}$$

ist, so erhält man daraus:

$$l_p = \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_{m,p}|} \leqq \frac{1}{\varrho^P \varrho'^{p-P+1}},$$

eine Formel, die, wie man leicht sieht, auch für $p = P - 1$ gilt. Wir bemerken aber, daß für $p = P - 1$ und für $p = P$ das Gleichheitszeichen gesetzt werden muß.

Es sei nun $p = Q$ der erste Wert von p, für welchen:

$$l_p < \frac{1}{\varrho^P \varrho'^{p-P+1}}$$

wird, so daß man hat:

$$l_p = \frac{1}{\varrho^P \varrho'^{p-P+1}} \quad \text{für} \quad P - 1 \leqq p \leqq Q - 1,$$

$$l_Q < \frac{1}{\varrho^P \varrho'^{Q-P+1}}.$$

Schreiben wir:

$$l_Q = \frac{1}{\varrho^P \varrho'^{Q-P} \varrho''}, \quad \text{wo} \quad \varrho'' > \varrho' \quad \text{ist},$$

so finden wir nach einem ähnlichen Verfahren wie in den vorigen Artikeln:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|H_{m,Q}|} < \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{\left(\frac{1}{\varrho^P \varrho'^{Q-P+1}}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{\varrho^P \varrho'^{Q-P-1}}\right)^{m+1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\varrho^P \varrho'^{Q-P}}\right)^2 = l_{Q-1}^2$$

und gelangen, indem wir überall $\frac{1}{\varrho^P \varrho'^{Q-P}}$ anstatt $\frac{1}{\varrho^P}$ setzen, zu dem Schlusse, daß:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{|D_{m,Q-1}|} = l_{Q-1}$$

ist. Setzen wir nun:

$$(1) \begin{cases} C'_{m,Q} a_m + C'_{m,Q-1} a_{m+1} + \cdots + C'_{m,1} a_{m+Q-1} + a_{m+Q} = 0, \\ C'_{m,Q} a_{m+1} + C'_{m,Q-1} a_{m+2} + \cdots + C'_{m,1} a_{m+Q} + a_{m+Q+1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C'_{m,Q} a_{m+Q-1} + C'_{m,Q-1} a_{m+Q} + \cdots + C'_{m,1} a_{m+2Q-2} + a_{m+2Q-1} = 0, \end{cases}$$

$$C'_{m+1,h} - C'_{m,h} = B'_{m,h},$$

so erhalten wir wie früher:

$$B'_{m,h} = (-1)^h \frac{D^{(h)}_{m+1,Q-2} D_{m,Q}}{D_{m+1,Q-1} D_{m,Q-1}},$$

wo $D^{(h)}_{m+1,Q-2}$ dieselbe Bedeutung hat wie oben. Da nun $Q-2 \geqq P-1$ ist, so hat man:

$$\sqrt[m+1]{|D^{(h)}_{m+1,Q-2}|} < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^P \varrho'^{Q-P-1}},$$

$$\sqrt[m]{|D_{m,Q}|} < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^P \varrho'^{Q-P} \varrho''},$$

$$\sqrt[m+1]{|D_{m+1,Q-1}|} > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^P \varrho'^{Q-P}},$$

$$\sqrt[m]{|D_{m,Q-1}|} > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^P \varrho'^{Q-P}},$$

mithin:

$$|B'_{m,h}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{2m+1} \frac{\varrho'^{m+1}}{\varrho''^m}$$

und folglich:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|B'_{m,h}|} \leqq \frac{\varrho'}{\varrho''} = \tau' < 1.$$

Daraus geht wie früher hervor, daß sich $C'_{m,h}$, während m dem Unendlichen zustrebt, einem bestimmten Grenzwerte nähert, den wir mit C'_h bezeichnen wollen.

Setzt man analog wie früher:

$$(2) \begin{cases} b_{m+P} = C_P a_m + C_{P-1} a_{m+1} + \cdots + C_1 a_{m+P-1} + a_{m+P}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{m+2Q-1} = C_P a_{m+2Q-P-1} + C_{P-1} a_{m+2Q-P} + \cdots \\ \qquad + C_1 a_{m+2Q-2} + a_{m+2Q-1}, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten von m unabhängig sind, so lassen sich die Gleichungen (1) folgendermaßen schreiben:

$$(3)\quad\begin{cases} C''_{m,Q}a_m + \cdots + C''_{m,Q-P+1}a_{m+P-1} + C''_{m,Q-P}b_{m+P} + \cdots \\ \qquad\qquad + C''_{m,1}b_{m+Q-1} + b_{m+Q} = 0, \\ \cdot \\ C''_{m,Q}a_{m+Q-1} + \cdots + C''_{m,Q-P+1}a_{m+P+Q-2} + C''_{m,Q-P}b_{m+P+Q-1} + \cdots \\ \qquad\qquad + C''_{m,1}b_{m+2Q-2} + b_{m+2Q-1} = 0, \end{cases}$$

wo die $C''_{m,h}$ lineare Funktionen der $C'_{m,h}$ mit von m unabhängigen Koeffizienten sind.

Ist:

$$C''_{m+1,h} - C''_{m,h} = B''_{m,h},$$

so findet man auf die obige Weise:

$$B''_{m,h} = (-1)^h \frac{\overline{D}^{(h)}_{m+1,Q-2}\overline{D}_{m,Q}}{\overline{D}_{m+1,Q-1}\overline{D}_{m,Q-1}},$$

wo die $\overline{D}$ ebenso aus den Koeffizienten der Gleichungen (3) gebildet sind wie die entsprechenden D aus den Koeffizienten der Gleichungen (1) des Art. 404. Es ist aber offenbar, wenn man die Gleichungen (2) beachtet:

$$\overline{D}_{m,Q} = D_{m,Q}, \quad \overline{D}_{m+1,Q-1} = D_{m+1,Q-1}, \quad \overline{D}_{m,Q-1} = D_{m,Q-1};$$

ferner ist $\overline{D}^{(h)}_{m+1,Q-2}$ die Determinante, die man aus:

$$\begin{vmatrix} a_{m+1} \cdots a_{m+P} & b_{m+P+1} \cdots b_{m+Q} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m+Q} \cdots a_{m+P+Q-1} & b_{m+P+Q} \cdots b_{m+2Q-1} \end{vmatrix}$$

durch Unterdrückung der letzten Zeile und der $(Q-h+1)$-ten Kolonne erhält. Je nachdem $h \geqq Q-P+1$ oder $h < Q-P+1$, ist die unterdrückte Kolonne aus Symbolen a oder aus Symbolen b zusammengesetzt. Im ersten Falle hat man, wenn der Einfachheit wegen $\varrho > 1$, $\varrho' > 1$ vorausgesetzt wird[1]):

$$\left|\overline{D}^{(h)}_{m+1,Q-2}\right| < (Q-1)!\left(\frac{(1+\varepsilon)^{Q-1}}{\varrho^{P-1}\varrho'^{Q-P}}\right)^m,$$

---

1) Es ist sehr leicht einzusehen, daß das Endergebnis auch in den andern Fällen dasselbe bleibt.

mithin für ein hinreichend großes m bei geeigneter Änderung von ε:

$$\sqrt[m+1]{\left|\overline{D}^{(h)}_{m+1,\,Q-2}\right|} < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^{P-1}\varrho'^{\,Q-P}},$$

im andern Falle dagegen:

$$\sqrt[m+1]{\left|\overline{D}^{(h)}_{m+1,\,Q-2}\right|} < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^{P}\varrho'^{\,Q-P-1}}.$$

Daraus folgt in den beiden Fällen beziehentlich:

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|B''_{m,h}\right|} \leqq \frac{\varrho}{\varrho''} < 1,$$

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|B''_{m,h}\right|} \leqq \frac{\varrho'}{\varrho''} < 1,$$

und hieraus leitet man in gewohnter Weise her, daß sich $C''_{m,h}$ für alle Werte von h einem Grenzwerte C''_h nähert, wenn m dem Unendlichen zustrebt. Man kann nun aber zuvor zeigen, daß:

$$C''_h = 0 \quad \text{wird für} \quad h \geqq Q - P + 1.$$

Wir denken uns von den Gleichungen (3) die P ersten nach $C''_{m,\,Q}, C''_{m,\,Q-1}, \cdots, C''_{m,\,Q-P+1}$ wirklich gelöst, während wir die noch übrigen $C''_{m,h}$ als bekannt ansehen; es ergibt sich für $h \geqq Q - P + 1$:

$$C''_{m,h} = -\frac{1}{D_{m,\,P-1}}\Big[C''_{m,\,Q-P}\,\varDelta_h^{(P)} + \\ C''_{m,\,Q-P-1}\,\varDelta_h^{(P+1)} + \cdots + C''_{m,1}\,\varDelta_h^{(Q-1)} + \varDelta_h^{(Q)}\Big],$$

worin man $\varDelta_h^{(k)}$ aus $D_{m,\,P-1}$ erhält, indem man die Elemente der $Q+1-h$-ten Kolonne durch die Größen $b_{m+k}, b_{m+k+1}, \cdots, b_{m+k+P-1}$ ersetzt. Nun ist:

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|D_{m,\,P-1}\right|} = \frac{1}{\varrho^P},$$

während, wie leicht einzusehen:

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|\varDelta_h^{(k)}\right|} \leqq \frac{1}{\varrho^{P-1}\varrho'}$$

ist; daraus folgt:

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|\frac{\varDelta_h^{(k)}}{D_{m,\,P-1}}\right|} \leqq \frac{\varrho}{\varrho'} < 1$$

und somit:

$$\lim_{m=\infty}\frac{\varDelta_h^{(k)}}{D_{m,\,P-1}} = 0.$$

Andrerseits nähern sich die $C''_{m,Q-P}$, $C''_{m,Q-P-1}$, $\cdots$, $C''_{m,1}$ endlichen Grenzwerten; mithin strebt $C''_{m,h}$ der Null zu.

Erinnern wir uns nun, daß die $C''_{m,h}$ lineare Funktionen der $C'_{m,h}$ mit von m unabhängigen Koeffizienten sind, so kann man daraus schließen, daß dieselben Beziehungen, welche die $C''_{m,h}$ an die $C'_{m,h}$ knüpfen, auch die C''_h an die C'_h knüpfen. Setzt man daher:

$$b'_{m+p} = C'_p a_m + C'_{p-1} a_{m+1} + \cdots + C'_1 a_{m+p-1} + a_{m+p},$$

so ergibt sich offenbar:

$$b'_{m+p} = C''_p b_m + C''_{p-1} b_{m+1} + \cdots + C''_1 b_{m+p-1} + b_{m+p}$$

oder auch, da $C''_h = 0$ ist für $h \geqq Q - P + 1$:

$$b'_{m+p} = C''_{Q-P} b_{m+p-Q+P} + C''_{Q-P-1} b_{m+p-Q+P+1} + \cdots + C''_1 b_{m+p-1} + b_{m+p}.$$

Durch das Verfahren des Art. 404 finden wir dann:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{|\, b'_m \,|} \leqq \frac{1}{\varrho''},$$

woraus folgt, daß der Konvergenzradius des Produktes:

$$\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h \cdot (1 + C''_1 x + C''_2 x^2 + \cdots + C''_{Q-P} x^{Q-P})$$

oder des Produktes:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \cdot (1 + C'_1 x + C'_2 x^2 + \cdots + C'_Q x^Q)$$

nicht kleiner ist als ϱ''.

Wir haben so $Q - P$ weitere Pole abgesondert, die auf der Kreislinie ϱ' liegen.

Auf dieselbe Weise kann man fortfahren.

406. Beachtet man, daß:

$$\begin{aligned} \frac{l_{p-1}}{l_p} &= \varrho \quad \text{für} \quad p \leqq P - 1, \\ &= \varrho' \quad \text{für} \quad P \leqq p \leqq Q - 1, \\ &= \varrho'' \quad \text{für} \quad Q \leqq p \leqq \cdots, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so kann man den Schluß ziehen:

Das Verhältnis $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ nimmt niemals ab, solange p wächst; und hat man für einen bestimmten Wert von p:

$$\frac{l_{p-1}}{l_p} > \frac{l_{p-2}}{l_{p-1}},$$

so besitzt die Funktion innerhalb des Kreises vom Radius $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ um den Anfangspunkt keine weiteren Singularitäten als p Pole.

Was die Art betrifft, in der sich das Verhältnis $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ändern kann, so liegen vier Möglichkeiten vor:

1. Ist l_p für einen bestimmten Wert von p gleich Null, so hat die Funktion in endlicher Entfernung keine weiteren Singularitäten als p Pole und ist mithin der Quotient aus einer ganzen Funktion und einem Polynome.

2. Ist $\lim\limits_{p=\infty} \frac{l_p}{l_{p-1}} = 0$, so hat die Funktion in endlicher Entfernung keine andern Singularitäten als Pole (in unendlich großer Anzahl), ist also meromorph.

3. Ist $\lim\limits_{p=\infty} \frac{l_p}{l_{p-1}} = \frac{1}{R} > 0$, so hat die Funktion innerhalb des Kreises vom Radius R um den Anfangspunkt keine andern Singularitäten als unendlich viele Pole.

4. Bleibt $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ von einem bestimmten Werte von p an konstant, so sind die dem Anfangspunkt nächstliegenden Singularitäten der Funktion p Pole, während der darauffolgende singuläre Punkt kein Pol ist.

407. Einen besonderen Fall der dargelegten Theorie bildet der folgende Satz, der sich als zweiter Teil des berichtigten Satzes von Lecornu (Art. 375) ansehen läßt:

Ist $\lim\limits_{h=\infty} \frac{a_h}{a_{h+1}} = u$ und:

$$\overline{\lim_{h=\infty}} \sqrt[h]{\left|\frac{a_h}{a_{h+1}} - u\right|} = \gamma < 1,$$

so besitzt die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ auf dem Konvergenzkreise den einzigen singulären Punkt u, und dieser ist ein einfacher Pol.

Setzen wir allgemein $\frac{a_h}{a_{h+1}} - u = \varepsilon_h$, so folgt aus:

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} - u = \varepsilon_m, \quad \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} - u = \varepsilon_{m+1}$$

unmittelbar:

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} - \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} = \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}$$

und somit:

$$D_{m,1} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} \end{vmatrix} = (\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}) a_{m+1} a_{m+2},$$

daraus aber:

$$\sqrt[m]{|D_{m,1}|} = \sqrt[m]{|\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}|} \sqrt[m]{|a_{m+1}|} \sqrt[m]{|a_{m+2}|}.$$

Da nun $\overline{\lim\limits_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\varepsilon_m|} = \gamma$, $\overline{\lim\limits_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\varepsilon_{m+1}|} = \overline{\lim\limits_{m=\infty}} \sqrt[m+1]{|\varepsilon_{m+1}|} = \gamma$ ist, so folgt daraus (Art. 118):

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}|} \leqq \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\varepsilon_m| + |\varepsilon_{m-1}|} = \gamma;$$

da ferner:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_{m+1}|} = \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_{m+2}|} = \frac{1}{\varrho}$$

ist, so hat man:

$$l_1 = \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_{m,1}|} \leqq \frac{\gamma}{\varrho^2} < \frac{1}{\varrho^2};$$

es ist daher auf dem Konvergenzkreise keine andre Singularität vorhanden als ein einfacher Pol, der zufolge dem ersten Teile des Satzes von Lecornu notwendigerweise u ist.

6. Frage.

408. Es liege ein arithmetischer Ausdruck $F(x)$ vor, der in einem bestimmten zusammenhängenden Bereiche C eine analytische Funktion $f(x)$ darstellen möge. Ist c ein Punkt innerhalb C, so hat man:

$$f(c) = F(c), \quad f^{(r)}(c) = F^{(r)}(c) \qquad (r = 1, 2, \cdots),$$

mithin für jeden Punkt x einer bestimmten Umgebung von c:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(c)(x-c)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r.$$

Ist c dagegen ein singulärer Punkt von $f(x)$, so können folgende Fälle eintreten:

a) $F(x)$ und seine Ableitungen sind in dem Punkte c nicht endlich oder nicht bestimmt;

b) $F(x)$ und seine Ableitungen sind zwar endlich und bestimmt, aber die Reihe:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r \tag{1}$$

hat den Konvergenzradius Null.

c) Die Reihe (1) hat einen von Null verschiedenen Konvergenzradius. In diesem Falle ist aber für die zugleich im Konvergenzkreise von (1) und im Existenzbereiche von $f(x)$ liegenden Punkte x die Gleichung:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r$$

unmöglich.

Der erste Fall tritt z. B. ein, wenn c Pol eines der Glieder von $F(x)$ ist[1]).

Der zweite Fall verwirklicht sich unter gewissen Umständen (vgl. z. B. Art. 392), wenn c, ohne Pol eines Gliedes von $F(x)$ zu sein, Grenzstelle der Menge dieser Pole ist. Es mag hier ein einfaches Beispiel geboten werden.

Ist:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \frac{1}{1 + a^h x}, \tag{2}$$

worin $a > 1$ ist, so sind die Pole von $F(x)$ die Punkte $x = -\frac{1}{a^h}$; sie liegen auf dem negativen Teile der reellen Achse und haben den Anfangspunkt zur Grenzstelle.

1) Wäre es Pol mehrerer Glieder, so könnte es eintreten, daß sich die bezüglichen Singularitäten gegenseitig aufhöben.

Die Ableitungen von $F(x)$ sind:

$$F^{(r)}(x) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \frac{a^{hr}}{(1+a^h x)^{r+1}} \qquad (r = 1, 2, \cdots),$$

folglich hat man:

$$F(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = e, \quad F^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{hr}}{h!} = (-1)^r r! e^{a^r},$$

so daß die Funktion und ihre sämtlichen Ableitungen im Anfangspunkte endlich sind; ferner ist:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(0) x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{a^r} x^r. \tag{3}$$

Nun hat man von einem bestimmten Werte von r an:

$$a^r > r^2, \tag{4}$$

mithin:

$$\sqrt[r]{|(-1)^r e^{a^r}|} = \sqrt[r]{e^{a^r}} = e^{\frac{1}{r} a^r} > e^r,$$

und hieraus:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt[r]{|(-1)^r e^{a^r}|} = \infty;$$

folglich ist (Art. 113) der Konvergenzradius von (3) Null.

Aus dem gegebenen Beispiele läßt sich unmittelbar ein zweites herleiten, indem man in (2) a^2, x^2 anstatt a, x setzt. Man gewinnt so den arithmetischen Ausdruck:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \frac{1}{1+a^{2h} x^2} \tag{5}$$

oder auch:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\frac{1}{1 - i a^h x} + \frac{1}{1 + i a^h x} \right);$$

seine Pole sind die Punkte $x = \pm \frac{i}{a^h}$, die auf der imaginären Achse liegen, in bezug auf den Anfangspunkt symmetrisch sind und diesen als Grenzstelle besitzen. Man hat:

$$F^{(r)}(x) = \frac{i^r}{2} r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{hr}}{h!} \left(\frac{1}{(1 - i a^h x)^{r+1}} + \frac{(-1)^r}{(1 + i a^h x)^{r+1}} \right),$$

mithin:

$$F(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = e, \quad F^{(r)}(0) = \frac{i^r}{2}\, r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{hr}}{h!}\,(1 + (-1)^r),$$

also:

$$F^{(2s)}(0) = (-1)^s (2s)! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2hs}}{h!} = (-1)^s (2s)!\, e^{a^{2s}}, \quad F^{(2s+1)}(0) = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(0)\, x^r = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{a^{2s}} x^{2s};$$

mittels derselben Erwägungen wie früher weist man nach, daß diese Reihe für jeden Wert von x divergent ist.

Dieses Beispiel ist noch aus einem andern Gesichtspunkte bemerkenswert. Betrachten wir $F(x)$ als eine durch (5) gegebene reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, so ist sie zugleich mit allen ihren Ableitungen für jeden endlichen Wert von x endlich und stetig und dennoch für $x = 0$ nicht in eine Taylorsche Reihe entwickelbar. Die Möglichkeit eines solchen Zusammentreffens, die noch Lagrange nicht zugab, wurde bereits von Cauchy und später von Du Boys-Reymond ins rechte Licht gerückt; weshalb es stattfinden kann, zeigt uns deutlich das soeben behandelte Beispiel. Richten wir unser Augenmerk lediglich auf die reellen Werte von x, so werden wir verleitet, einen großen Teil seines Variabilitätsbereiches zu vernachlässigen, und es entgehen uns so sämtliche außerhalb der reellen Achse liegenden Pole des arithmetischen Ausdrucks. Gibt es daher einen Punkt der reellen Achse, der, ohne Pol zu sein, Grenzstelle unendlich vieler komplexer Pole ist, so können in diesem Punkte der arithmetische Ausdruck und seine Ableitungen endlich sein, während die Entwicklung in eine Taylorsche Reihe in keiner (auch nur linearen) Umgebung desselben möglich ist; und der Grund dieser Tatsache wird sich uns nur dann offenbaren, wenn wir unser Augenmerk auf den ganzen komplexen Bereich richten und so gewahr werden, daß jede beliebige (zweidimensionale) Umgebung dieses Punktes Pole enthält.

409. Durch eine kleine Änderung des Ausdruckes (2) im vorigen Artikel können wir ein Beispiel für den dritten der in diesem Artikel angeführten Fälle gewinnen.

Es sei:

(1) $$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!}\,\frac{1}{1 + a^h x},$$

worin wie früher $a > 1$ ist. Die Pole von $F(x)$ sind wiederum die Punkte $x = -\frac{1}{a^h}$; sie liegen auf dem negativen Teile der reellen Achse und haben den Anfangspunkt zur Grenzstelle. Es ist dann:

$$F^{(r)}(x) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{a^{hr}}{(1+a^h x)^{r+1}}$$

und somit:

$$F(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} = e^{-1}, \quad F^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} a^{hr} = (-1)^r r! e^{-a^r},$$

$$(2) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(0)\, x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-a^r} x^r;$$

es ist aber:

$$(3) \qquad \sqrt[r]{\left|(-1)^r e^{-a^r}\right|} = e^{-\frac{1}{r}a^r} < e^{-r},$$

also:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt[r]{\left|(-1)^r e^{-a^r}\right|} = 0,$$

und die Reihe (2) hat einen unendlich großen Konvergenzradius.

Es gibt aber keine Umgebung des Anfangspunktes, in deren sämtlichen Punkten die Ausdrücke (1), (2) denselben Wert besitzen. Man nehme nämlich irgend eine Umgebung des Anfangspunktes, und es sei $-a^{-k}$ einer der in ihr enthaltenen Punkte $-a^{-1}$, $-a^{-2}$, $-a^{-3}, \cdots$. In dem Punkte $-a^{-k}$ wird (1) unendlich, während (2) den endlichen Wert:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-a^r} (-a^{-k})^r = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-a^r} a^{-kr} = K$$

annimmt; wählt man daher beliebig eine positive Größe λ größer als $|K|$, so läßt sich eine Umgebung von $-a^{-k}$ angeben, in deren sämtlichen Punkten der absolute Betrag von (2) kleiner als λ, der absolute Betrag von (1) aber größer als λ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Um uns von dieser Tatsache Rechenschaft zu geben, setzen wir:

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

wo:

$$F_1(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2h)!} \frac{1}{1 + a^{2h} x}, \quad F_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} \frac{1}{1 + a^{2h+1} x}$$

ist. Es ist dann:

$$F_1(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h)!} = \cos i = \frac{1}{2}(e + e^{-1}),$$

$$F_1^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2hr}}{(2h)!} = (-1)^r r! \cos i a^r = \frac{1}{2}(-1)^r r! (e^{a^r} + e^{-a^r}),$$

$$F_2(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} = \frac{\sin i}{i} = \frac{1}{2}(e - e^{-1}),$$

$$F_2^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{(2h+1)r}}{(2h+1)!} =$$

$$= (-1)^r r! \frac{\sin i a^r}{i} = \frac{1}{2}(-1)^r r! (e^{a^r} - e^{-a^r})$$

Die Reihen:

$$(4) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F_1^{(r)}(0) x^r, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F_2^{(r)}(0) x^r$$

haben, wie leicht einzusehen, den Konvergenzradius Null; es fallen aber in der Reihe:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} [F_1^{(r)}(0) - F_2^{(r)}(0)] x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(0) x^r$$

diejenigen Teile der Koeffizienten der Reihen (4) weg, die dem Unendlichen zustreben, so daß die Reihe selbst einen von Null verschiedenen, ja, unendlich großen Konvergenzradius besitzt. Andrerseits haben ebenso die Pole von $F_1(x)$ wie diejenigen von $F_2(x)$ den Anfangspunkt zur Grenzstelle; sie können sich aber nicht gegenseitig aufheben, da sie verschieden sind. Die Existenz dieser Pole zeigt uns, daß $F(x)$ in keiner Umgebung des Anfangspunktes in eine Taylorsche Reihe entwickelbar ist, während uns das gelegentliche Fortfallen gewisser Glieder in den Koeffizienten erklärt, wie es vorkommen kann, daß die dem Anfangspunkte entsprechende Taylorsche Entwicklung einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt.

Auch hier können wir ein weiteres interessantes Beispiel gewinnen, wenn wir in (1) a^2, x^2 anstatt a, x setzen. Wir erhalten so den Ausdruck:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{1}{1 + a^{2h} x^2} = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \left(\frac{1}{1 - i a^h x} + \frac{1}{1 + i a^h x} \right),$$

dessen Pole die Punkte $x = \pm \frac{i}{a^h}$ sind; sie liegen auf der imaginären Achse und haben den Anfangspunkt zur Grenzstelle. Man erhält in diesem Falle:

$$F(0) = e^{-1}, \quad F^{(2s)}(0) = (-1)^s (2s)!\, e^{-a^{2s}}, \quad F^{(2s+1)}(0) = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(0)\, x^r = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{-a^{2s}} x^{2s} = \varphi(x);$$

diese Reihe ist für jeden endlichen Wert von x konvergent, aber es gibt keine Umgebung des Anfangspunktes, in deren sämtlichen Punkten $F(x) - \varphi(x) = 0$ wäre.

Beachtet man, daß:

$$\varphi(0) = F(0), \qquad \varphi^{(r)}(0) = F^{(r)}(0)$$

ist, so kann man weiter schließen, daß der arithmetische Ausdruck:

$$\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$$

im Anfangspunkte zugleich mit allen seinen Ableitungen Null ist, ohne jedoch identisch zu verschwinden.

Literaturverzeichnis.

[Die Zeitschriften sind, mit einigen kleinen Abanderungen, mit den von Felix Muller angegebenen Abkurzungen der Titel bezeichnet, vgl Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **12**, 427—438 Die in Klammern stehende Zahl gibt die Serie oder Reihe an, die Bandzahl ist fettgedruckt, die Seitenzahlen sind einfach neben die Jahreszahl bezw. Bandzahl gesetzt worden. Der der Bandzahl beigesetzte Index bezeichnet die Abteilung, das Halbjahr oder die Nummer. Die durch * gekennzeichneten Namen kommen sowohl im ersten Verzeichnis (1—523) als auch im Nachtrage (523 a — 672) vor]

1.* Agnola (dell'), C A, Estensione di un teorema di Hadamard. *Atti Ist. Ven.* **58**$_2$ (1898—99) 525—539, 669—677.

2. — Sulle serie di polinomi. *Atti Ist. Ven.* **60**$_2$ (1900—01) 171—180.

3. — Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione monogena. *Ann. mat. p. appl.* (3) **6** (1901) 227—248.

4. Amigues, E., La théorie des ensembles et les nombres incommensurables. *Ann. Fac. sc. Marseille* **2** (1892) 33—43.

5. Appell, P., Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). *Acta math.* **1** (1882) 109—131, 132—144.

6. Arcais (d'), F., Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse. *Riv. mat.* **5** (1895) 186—189.

7. — Sulle funzioni di una variabile complessa. *Atti Ist. Ven.* (7) **9** (1897—98) 1048—1050

8. Arone (d'), G., Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Bull. Soc. math. France* **23** (1895) 193—194.

9. Arzelà, C., Funzioni di linee. *Rend. Acc. Lincei* (4) **5**$_1$ (1889) 342—348.

10. — Sulla teoria delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Bologna* 1887—88, 25—37.

11. — Sulle serie di funzioni analitiche. *Rend. Acc. Bologna* 1902—03.

12. Ascoli, G., Le curve limite di una varietà data di curve. *Mem. Acc. Lincei* (3) **18** (1884) 521—586.

13. Ascoli, G., Riassunto della mia memoria: «Le curve limite di una varietà data di curve», ed osservazioni critiche alla medesima. *Rend. Ist. Lomb.* (2) **21** (1888) 226—239, 257—265, 294—300, 365—371.

14.* Baire, R., Sur la théorie des ensembles. *C. R. Ac. sc. Paris* **129** (1899) 946—949.

14a. — Sur la théorie des fonctions discontinues. *C. R. Ac. sc. Paris* **129** (1899) 1010—1013.

15. — Sur les fonctions de variables réelles. *Ann. mat. p. appl.* (3) **3** (1899) 1—123.

16.* Barnes, E. W., A memoir on integral functions. *Phil. Trans. R. Soc. London* **199** A (1902) 411—500. Auszug in *Proc. R. Soc. London* **69** (1902) 121—125.

17. Bassi, A., Studio sulle funzioni di genere qualunque e in particolare sulle funzioni di genere zero e di genere uno. *G. mat.* **36** (1898) 100—144, **37** (1899) 326—366.

18. — Sulle radici della derivata di una funzione olomorfa di genere qualunque. *Rend. Ist. Lomb.* (2) **23** (1895) 1119—1123.

19. — Sulle radici della derivata di una funzione olomorfa di genere zero ed uno. *Rend. Ist. Lomb.* (2) **23** (1895) 979—985.

20. Beckman, K., Om dimensionsbegreppet och dess betydelse för matematiken. Dissertation. Upsala, 1888. 79 S. 8°.

21. Bendixson, I., Några studier öfver oändliga punktmängder. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 40_2 (1883) 31—35.

22. — Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points *Acta math.* 2 (1883) 415—429.

23. — Sur la puissance des ensembles parfaits de points *Bihang Ak. Handl. Stockh.* 9_6 (1884).

24. — Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles. *Bihang Ak. Handl. Stockh.* 9_7 (1884).

25. Bernstein, F., Untersuchungen aus der Mengenlehre. Dissertation. Halle, 1901. 54 S. 8°.

26.* Bettazzi, R., Fondamenti per una teoria generale dei gruppi. *Period. mat. insegn. sec.* 11 (1896) 81—96, 112—142, 173—182, 12 (1897) 40—42.

27. — Gruppi finiti ed infiniti di enti. *Atti Acc. Torino* 31 (1896) 506—512

28. — Sulla catena di un ente in un gruppo. *Atti Acc. Torino* 31 (1896) 446—456.

29. — Sulla definizione del gruppo finito. *Atti Acc. Torino* 32 (1897) 352—355.

30. — Sulla definizione d'infinito. *Period. mat. insegn. sec.* 12 (1897) 91—92.

31 — Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari. *Ann. mat. p appl.* (2) 16 (1888) 49—60.

32 Betti, E., La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni. *Ann. mat. p. appl.* 3 (1860) 65—159, 298—310, 4 (1861) 26—45, 57—70, 297—336.

33. Bianchi, L., Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. 2 Bde. Pisa, 1898—99. 326 u. 480 S. 8° (lith.). — Desgl., 1 Bd. Pisa, 1901. 608 S. 8°.

34. Biasi, G., Sulla definizione di infinito. *Period. mat. insegn. sec.* 12 (1897) 34—35.

35. Biehler, C., Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable. *Nouv. Ann. math.* (3) 7 (1888) 200—203.

36. Biermann, O., Elemente der höheren Mathematik. Leipzig, 1895. XII u. 381 S. 8°.

37. — Theorie der analytischen Funktionen. Leipzig, 1887. X u. 452 S. 8°.

38. Bindoni, A., Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali. *Rend. Acc. Lincei* (5) 11_2 (1902) 205—209.

39. Bois-Reymond (du), P., Die allgemeine Functionentheorie. 1. Tübingen, 1882. XIV u. 292 S. 8°. Franz. Übers. von G. Milhaud und A. Girot. Paris, 1887. 223 S. 8°.

40.* Borel, É., Applications de la théorie des séries divergentes sommables. *C. R. Ac. sc. Paris* 122 (1896) 805—807.

41. — A propos de l' infini nouveau. *Rev. philos.* 48 (1899) 383—390.

42. — Contribution à l' étude des fonctions méromorphes. *Ann. Éc. Norm.* (3) 8 (1901) 211—239.

43. — Démonstration élémentaire d' un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 122 (1896) 1045—1048.

44. — Fondements de la théorie des séries divergentes sommables. *J. math. p. appl.* (5) 2 (1896) 105—122.

45 — L' antinomie du transfini. *Rev. philos.* 49 (1900) 378—383.

46. — Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898. IX u. 136 S. 8°.

47. — Leçons sur les fonctions entières. Paris, 1900. VI u. 124 S. 8°.

48. — Leçons sur les fonctions méromorphes. Paris, 1903. VII u. 122 S. 8°.

49. — Leçons sur les séries à termes positifs. Paris, 1902. VII u. 93 S. 8°.

50 — Leçons sur les séries divergentes. Paris, 1901. VII u. 182 S. 8°.

51. — Le prolongement analytique et les séries sommables. *Math. Ann.* 55 (1901) 74—80.

52. — Les séries absolument sommables, les séries (*M*) et le prolongement analytique. *C. R. Ac. sc. Paris* 131 (1900) 830—832.

53. — Mémoire sur les séries divergentes. *Ann. Éc. Norm.* (3) 16 (1899) 9—131, 132—136.

54. — Remarque relative à la communication de M. Hadamard (Nr. 185). *Verh. Math. Kongr. Zürich* 1898, 204—205.

55. — Remarques relatives à la communication de M. Mittag-Leffler (Nr. 327). *Congrès math. Paris* 1901, 277—278.

56. — Sur la décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples. *C. R. Ac. sc. Paris* 132 (1901) 906—908.

57. — Sur la généralisation de la notion de limite et sur l' extension aux

séries divergentes sommables du théorème d' Abel sur les séries entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 122 (1896) 73—74.
58.*Borel, É., Sur la généralisation du prolongement analytique. *C. R. Ac. sc. Paris* 130 (1900) 1115—1118, 135 (1902) 150—152.
59. — Sur la recherche des singularités d' une fonction définie par un développement de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 127 (1898) 1001—1003.
60. — Sur la région de sommabilité d' un développement de Taylor *C. R. Ac. sc. Paris* 123 (1896) 548—549.
61. — Sur la sommation des séries divergentes. *C. R. Ac. sc. Paris* 121 (1895) 1125—1127.
62. — Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 1281—1283.
63. — Sur le prolongement analytique de la série de Taylor. *Bull. Soc. math. France* 28 (1900) 200.
64. — Sur le prolongement des fonctions analytiques. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 283—284.
65. — Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 127 (1898) 751.
66 — Sur les fonctions de genre ∞. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 1343—1344.
67 — Sur les ordres d' infinitude. *Bull. Soc. math. France* 29 (1901) 154—156.
68. — Sur les séries de fractions rationnelles *C. R Ac. sc. Paris* 130 (1900) 1061—1064.
69 — Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles. *Acta math.* 24 (1901) 309—382, 383—387.
70 — Sur les séries de Taylor. *Acta math.* 21 (1897) 243—247.
71. — Sur les séries de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 123 (1896) 1051—1052.
72. — Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. *J. math. p. appl.* (5) 2 (1896) 441—451.
73 — Sur les singularités des séries de Taylor. *Bull. Soc. math. France* 26 (1898) 238—249.
74 — Sur les types de croissance et sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 126 (1898) 321—324.
75. — Sur les zéros des fonctions entières. *Acta math.* 20 (1897) 357—396.
76 *Borel, É., Sur l' extension aux fonctions entières d' une propriété importante des polynômes. *C. R. Ac. sc. Paris* 123 (1896) 556—557.
77. — Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Éc. Norm.* (3) 12 (1895) 9—55.
78 — Sur quelques points de la théorie des fonctions *C. R. Ac. sc. Paris* 118 (1894) 340—342.
79. — Sur une application d'un théorème de M. Hadamard. *Bull. sc. math.* (2) 18 (1894) 22—25.
80.*Bortolotti, E., Contributo alla teoria degli insiemi. *Rend. Acc. Lincei* (5) 11_2 (1902) 45—52.
81 — Sulla determinazione dell' ordine di ∞. *Atti Soc. Naturalisti Modena* (4) 3 (1901) 13—77.
82. — Sul raggio di convergenza delle serie di potenze. *Mem. Acc. Modena* (3) 4 (1901) 16—20.
83.*Boutroux, P., Sur la croissance des fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 153—155.
84. — Sur la densité des zéros et le module maximum d' une fonction entière *C. R Ac. sc. Paris* 132 (1901) 251—254.
85. — Sur la théorie des fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 82—85.
86. — Sur les fonctions entières de genre ∞ et les transcendantes méromorphes découvertes par M. Painlevé. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 519—522.
87. Bucca, F., Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie. *Rend. Circ. mat. Palermo* 12 (1898) 260—277
88. — Sullo sviluppo d' una funzione uniforme di variabile complessa, dotata di singolarità isolate, in serie colle caratteristiche separate. *Rend. Circ. mat. Palermo* 11 (1897) 90—103
89.*Bukrejef, B.J., [Die Verteilung der Wurzeln einer Klasse von ganzen transzendenten Funktionen] (russisch). *Mitt. math. Ges. Moskau* 17 (1893) 217—222.
90. Burali-Forti, C., Le classi finite. *Atti Acc. Torino* 32 (1897) 34—52.
91. — Sopra un teorema del Sig. G. Cantor. *Atti Acc. Torino* 32 (1897) 229—237.

92. Burali-Forti, C., Sulle classi ben ordinate. *Rend. Circ. mat. Palermo* 11 (1897) 260.
93. — Sulle classi derivate a destra e a sinistra. *Atti Acc. Torino* 29 (1894) 382—394.
94. — Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti. *Rend. Circ. mat. Palermo* 8 (1894) 169—179.
95. — Sul limite delle classi variabili. *Atti Acc. Torino* 30 (1895) 227—243.
96. — Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'un ensemble variable. *Math Ann.* 47 (1896) 20—32.
97. — Una questione sui numeri transfiniti. *Rend. Circ. mat. Palermo* 11 (1897) 154—164.
98. Burkhardt, H., Einführung in die Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. 1. Aufl. Leipzig, 1897. XII u. 213 S. 8°. 2. Aufl. Leipzig, 1903. XII u. 224 S. 8°.
99. Cantor, G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. 1, 2. *Math. Ann.* 46 (1895) 481—512, 49 (1897) 207—246. Franz. Übers. von F. Marotte. Paris, 1899. 100 S. 8°. Ital. Übers. des 1. Art. von F. Gerbaldi. *Riv. mat.* 5 (1895) 129—162.
100. — De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Math.* 4 (1884) 381—392.
101. — Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *J. r. ang. Math.* 84 (1877) 242—258. Franz. Übers. in *Acta math.* 2 (1883) 311—328.
102. — Lettera a G. Peano. *Riv. mat.* 5 (1895) 108—109.
103. — Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. *Z. Philos.* 91, 92 (1887).
104. — Sui numeri transfiniti. Estratto di una lettera a G. Vivanti. *Riv. mat.* 5 (1895) 104—108.
105. — Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première communication. *Acta math.* 2 (1883) 409—414.
106. — Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.* 5 (1872) 123—132. Franz. Übers. in *Acta math.* 2 (1883) 336—348.
107. Cantor, G., Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen. *Bihang Ak. Handl. Stockh* 11_{19} (1886). Der Anfang dieses Aufsatzes ist in *Z. Philos.* 88 (1886) 224—233 und in *Natur u. Offenbarung Münster* 32 (1886) 46—49, das Ende unter dem Titel: Zur Frage des actualen Unendlichen (Stockholm, 1886. 3 S. 8°) bes. gedruckt worden.
108. — Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *J. r. ang. Math.* 77 (1874) 258—272. Franz. Übers. in *Acta math.* 2 (1883) 305—310.
109. — Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* 1 (1892) 75—78. Ital. Übers. von G. Vivanti in *Riv. mat.* 2 (1892) 165—167.
110. — Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Nachr. Ges. Gött.* 1879, 127—135.
111. — Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Math Ann.* 15 (1879) 1—7, 17 (1880) 355—358, 20 (1882) 113—121, 21 (1883) 51—58, 545—596, 23 (1884) 453—488. Franz. Übers. von 1, 2, 3, 4 u. eines Auszugs von 5 in *Acta math.* 2 (1883) 349—356, 357—360, 361—371, 372—380, 381—408. — 5 ist auch bes. u. d. T.: Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre (Leipzig, 1883) erschienen.
112. — Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. *Acta math.* 7 (1885) 105—124.
113. Casorati, F., Aggiunte a recenti lavori dei signori Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. *Ann. mat. p. appl.* (2) 10 (1882) 261—278.
114. Cayley, A., Note on lacunary functions. *The Quart. J. p. appl. math.* 26 (1893) 279—281.
115. Cazzaniga, T, Funzioni olomorfe nel campo ellittico. *Atti Acc. Torino* 33 (1898) 808—823

116. Cazzaniga, T., Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico. *Atti Acc. Torino* 33 (1898) 983—1002.
117. — Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico. *Rend Ist. Lomb.* (2) 31 (1898) 1065—1071.
118. Cesàro, E., Remarques sur les fonctions holomorphes. *G. mat.* 22 (1884) 192—201.
119. — Sur la multiplication des séries. *Bull. sc. math.* (2) 14 (1890) 114—120.
120. — Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque. *C. R Ac. sc. Paris* 99 (1884) 26—27.
121. — Sur un théorème de M Laguerre *Nouv. Ann. math.* (3) 4 (1885) 321—327.
122. Chessin, A. S., On the singularities of single-valued and generally analytic functions. *Annals of math.* 11 (1896) 52—56
123. Cousin, P., Sur les fonctions d'une variable complexe admettant des singularités de nature quelconque. *Ann. Fac. sc. Grenoble* 7 (1895) 225—238.
124.*Couturat, L., De l'infini mathématique. Paris, 1896. XXIV u. 668 S. 8°.
125. Cranz, C., Über den Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik und Naturwissenschaft *Phil. Studien* 11 (1895) 1—40.
126. Dalwigk (von), F., Bemerkungen zum Weierstraß'schen Doppelreihensatz und zur Theorie der gleichmäßig convergenten Reihen. *Math. Ann.* 55 (1902) 516—520.
127.*Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1. Aufl. 1888, 2. Aufl. 1893. XIX u. 58 S. 8°.
128. Desaint, L., Sur le problème de la transformation dans les séries de Taylor. *C. R. Ac sc. Paris* 136 (1903) 1423—1425.
129. — Sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 120 (1895) 548—550.
130. — Sur les propriétés des fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 124 (1897) 746—747.
131. — Sur les séries de Taylor et les étoiles correspondantes. *C. R. Ac. sc. Paris* 132 (1901) 1102—1105.
132 Desaint, L., Sur les zéros de certaines fonctions analytiques. *C. R. Ac. sc. Paris* 124 (1897) 276—279.
133. — Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Éc Norm.* (3) 14 (1897) 311—378.
134. — Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor. *J. math p. appl.* (5) 8 (1902) 433—451.
135. Desaints, Sur la représentation générale des fonctions analytiques quelconques. *C. R. Ac. sc. Paris* 130 (1900) 999—1002.
136. Dickstein, S., [Die Begriffe und die Methoden der Mathematik] (polnisch). 1. Warschau, 1891. VI u. 258 S. 8°.
137. Dillner, G., Sur le développement d'une fonction analytique pour un contour de convergence qui renferme des infinis uniformes comme seuls points critiques. *Nova Acta Soc. Upsal.* (3) 12 (1885).
138. Dini, U., Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa. *Collectanea math. in memoriam Dominici Chelini,* Mailand, 1881, 258—276.
139. — Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa, 1878. VIII u. 409 S. 8°. Deutsche Übers. von J Lüroth u. A. Schepp. Leipzig, 1892. XVIII u. 554 S. 8°.
140. Dunan, C., La première antinomie mathématique de Kant. *Rev. philos.* 49 (1900) 353—377.
141. Eneström, G., Om G. Cantor's uppsats: Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 42_{10} (1885) 69—70.
142. Evellin, Philosophie et mathématiques: l'infini nouveau. *Rev. philos.* 45 (1898) 113—119.
143. Evellin et Z., L'infini nouveau. *Rev. philos.* 49 (1900) 135—143.
144. — Philosophie et mathématiques: l'infini nouveau *Rev. philos.* 46 (1898) 473—486.
145.*Faber, G., Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen. *Math. Ann.* 57 (1903) 369—388.

146.* Faber, G., Über polynomische Entwickelungen. *Math. Ann.* 57 (1903) 389—408.

147. — Über Reihenentwickelungen analytischer Functionen. Dissertation Leipzig, 1903 68 S. 8⁰

148. Fabry, E., Généralisation du prolongement analytique d'une fonction. *C. R. Ac. sc Paris* 128 (1899) 78—80.

149. — Sur le genre des fonctions entières *Bull. Soc math. France* 30 (1902) 165—176.

150. — Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. *Ann. Éc. Norm.* (3) 13 (1896) 367—399.

151. — Sur les points singuliers d'une série de Taylor. *J. math. p. appl.* (5) 4 (1898) 317—358.

152. — Sur les séries de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 124 (1897) 142—143, 125 (1897) 1086—1089.

153. — Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. *Acta math.* 22 (1898) 65—88.

154 Farkas, J., Sur les fonctions uniformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 96 (1883) 1646—1647.

155. Forsyth, A. R., Theory of the functions of a complex variable. 1. Aufl. Cambridge, 1893. XXII u. 682 S. 8⁰. 2. Aufl. Cambridge, 1900. XXIV u. 782 S. 8⁰.

156. Fouët, E A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. I. Paris, 1902. XV u. 330 S 8⁰. 2. Paris, 1904. XI u. 299 S. 8⁰.

157. Franel, J., Sur la théorie des séries. *Math. Ann.* 52 (1899) 529—549.

158. Fredholm, J., Om en speciell klass af singulära linier. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 47 (1890) 131—134.

159. — Sur la méthode de prolongement analytique de M Mittag-Leffler. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 58 (1901) 203—205.

160. Frenzel, C., Die Darstellung der eindeutigen analytischen Funktionen durch unendliche Produkte und Partialbruchreihen. *Z. Math. Phys.* 24 (1879) 316—343.

161. Galdeano (de), Z. G., La moderna organización de la matemática. Conferencia segunda *El progreso mat* (2) 1 (1899) 45—51, 77—87, 110—115, 154—156

162. Garibaldi, C, Sull' estensione degli aggregati numerabili. *Rend. Circ. mat. Palermo* 8 (1894) 157—160.

163. — Un piccolo contributo alla teoria degli aggregati. *Rend. Circ. mat. Palermo* 9 (1895) 198—201.

164.¹ Gavrilovitch, B., [Über die Ordnungen der eindeutigen Funktionen] (kroatisch). *Abh. Ak. Agram* 143 (1900) 155—160.

165. Gazzaniga, P., Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti. *Ann. mat. p. appl.* (2) 10 (1882) 279—290.

166. Genocchi, A., Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von G. Peano. Deutsche Übers. von G. Bohlmann und A. Schepp Leipzig, 1899. VII u. 399 S. 8⁰.

167 Gerbaldi, F., Sulle serie di funzioni analitiche. *Riv. math.* 6 (1896) 24—30.

168. Gillet, J, Sur les fonctions à espaces lacunaires. *El progreso mat.* 3 (1893) 139—141.

169. Giudice, F., Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di G. Cantor. *Rend. Circ. mat. Palermo* 6 (1892) 161—164

170. — Sui numeri dati mediante insiemi di numeri razionali. *Period. mat. insegn. sec.* 8 (1893) 144—150, 172—180.

171.³ Goursat, É., Sur la théorie des fonctions uniformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 96 (1883) 565—568.

172. — Sur le prolongement analytique. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 591—593.

173. — Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Bull. sc. math.* (2) 11 (1887) 109—114.

174 — Sur les fonctions présentant des lacunes. *C. R. Ac. sc. Paris* 94 (1882) 715—718.

175. — Sur une fonction à espace lacunaire. *Bull. sc. math.* (2) 17 (1893) 247—248.

176. — Sur un théorème de M. Jensen. *Bull. sc. math.* (2) 26 (1902) 298—302.

177. Guichard, C., Sur les fonctions entières. *Ann. Éc. Norm.* (3) **1** (1884) 427—432.
178. — Théorie des points singuliers essentiels. *Ann. Éc. Norm.* (2) **12** (1883) 301—394
179. Gundersen, C., On the content or measure of assemblages of points. Dissertation New York, 1901. 24 S. 8⁰.
180. Gutberlet, C., Das Problem des Unendlichen. *Z. Philos* 88 (1885) 179—223.
181. Gutzmer, A., Ein Satz über Potenzreihen. *Math Ann.* 32 (1888) 596—600.
182.*Hadamard, J., Essai sur l' étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J. math. p. appl* (4) 8 (1892) 101—186.
183. — Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d' une fonction considérée par Riemann. *J. math. p. appl.* (4) 9 (1893) 171—215.
184. — La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris, 1901. 102 S. 8⁰.
185. — Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles. *Verh. Math. Kongr. Zürich* 1898, 200—202.
186. — Sur la recherche des discontinuités polaires. *C. R. Ac. sc. Paris* **108** (1889) 722—724.
187 — Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d' une variable *C. R. Ac. sc. Paris* **106** (1888) 259—262.
188. — Sur les fonctions entières. *Bull. Soc. math. France* 26 (1896) 186—187.
189. — Sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* **135** (1902) 1309—1311.
190. — Sur les fonctions entières (Extrait d' une lettre adressée à M. Picard). *C. R. Ac. sc. Paris* **122** (1896) 1257—1258.
191 — Sur les séries entières. *Séances Soc. sc. ph nat. Bordeaux* 1896—97, 110—112.
192. — Théorème sur les séries entières. *Acta math.* 22 (1898) 55—63.
193. — Théorème sur les séries entières. *C R. Ac sc. Paris* **124** (1897) 492.
194. Hadamard, J., Lorey, W., Question 765, Réponse. *L' Interméd. math.* 3 (1896) 53, 209.
195. Hannequin, A., Essai critique sur l' hypothèse des atomes dans la science contemporaine. Paris, 1899. 457 S. 8⁰.
196.*Hanni, L., Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes. *Monatsh. Math. Phys.* **12** (1901) 265—289.
197. Harkness, J., Morley, F., Introduction to a theory of analytic functions. London, 1898. XV u. 336 S. 8⁰.
198. Harnack, A., Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige. *Math. Ann.* 23 (1884) 285—288.
199. — Über den Inhalt von Punktmengen. *Math. Ann.* 25 (1885) 241—250.
200.*Hausdorff, F., Über eine gewisse Art geordneter Mengen. *Ber. Ges. Lpz.* 1901, 460—475.
201. Hermite, C., Leçons sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d' une variable imaginaire et les fonctions elliptiques. 4. Aufl. Paris, 1891. IV u. 293 S. 4⁰ (lith.).
202. — Remarque. *C. R. Ac. sc. Paris* **99** (1884) 27.
203. — Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d' une lettre à M. Mittag-Leffler. *Acta Soc. Fennicae* 12 (1883) 67—94; *J. r. ang. Math.* 91 (1881) 54—78.
204. — Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions. *Acta Soc. Fennicae* 12 (1883) 425—436; *J. r. ang. Math.* 92 (1882) 145—155.
205. Hilbert, D., Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche, nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe. *Nachr. Ges. Gött.* 1897, 63—70.
206. — Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Verh. Ges. Deutsch. Naturf. und Ärzte Bremen* 1890, 11—12; *Math. Ann.* 38 (1891) 459—460.
207. Hölder, O., Beweis des Satzes, daß jede eindeutige analytische

Function in unendlicher Nähe einer wesentlichen singulären Stelle jedem Werth beliebig nahekommt *Math. Ann.* **20** (1882) 138—143.

208. Homén, T., Analytisk framställning af några lakunära funktioner. *Acta Soc. Fennicae* **12** (1883) 445—464.

209. Hurwitz, A., Sur un théorème de M. Hadamard. *C. R. Ac. sc. Paris* **128** (1899) 350—353.

210. — Über beständig convergente Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen. *Acta math.* **14** (1891) 211—215.

211. — Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit. *Verh. Math. Kongr. Zürich* 1898, 91—112.

212. Illigens, E., Die unendliche Anzahl und die Mathematik. Münster, 1893. 60 S. 8⁰.

213.* Jaggi, E., Relations entre les zéros et les coefficients d'une fonction entière. *Nouv. Ann. math.* (4) **1** (1901) 16—19.

214. Jensen, J. L. W. V., Bemärkninger til Opgave 459 og dens Løsning. *Tids. Math. Fys.* (5) **1** (1884) 31—32.

215. — Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. *Acta math.* **22** (1899) 359—364.

216. Joachimescu, A. J., [Über die asymptotischen Werte einer Klasse divergenter Reihen] (rumänisch). *Gazeta mat. Bucarest* **6** (1900—1901) 7—10, 29—31.

217. Jordan, C., Cours d'analyse de l'École Polytéchnique. 2. Aufl. 1. Paris, 1893. XVIII u. 612 S. 8⁰.

218. Jürgens, E., Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Funktionen von zwei reellen Veränderlichen. Leipzig, 1879.

219. — Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltigkeit. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* **7**, (1899) 50—55.

220. Kerry, B., Über G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen. *Vrtlj. wiss. Philos.* **9** (1885) 191—232.

221. Keyser, C. J., Theorems concerning positive definitions of finite assemblage and infinite assemblage. *Bull. Amer. math. Soc.* (2) **7** (1901) 218—226.

222. Killing, W., Bemerkungen über Veronese's transfinite Zahlen. *Index lectionum in Academia Monasteriensi* 1895—1896.

223. — Einführung in die Grundlagen der Geometrie. 2. Paderborn, 1898. VI u. 361 S. 8⁰.

224. — Über transfinite Zahlen. *Math. Ann.* **48** (1896) 425—432.

225.* Kluyver, J. C., De formules van Borel over divergente reeksen. *Versl. Ak. Amsterdam* 8 (1899—1900) 331—337.

226. — Over de ontwikkeling van eene functie in eene reeks van veeltermen. *Versl. Ak. Amsterdam* **9** (1900—1901) 608—614.

227. — Over veeltermreeksen. *Versl. Ak. Amsterdam* **10** (1901—1902) 530—544, 647—664.

228.* Koch (von), H., Quelques théorèmes sur les fonctions entières. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 58 (1901) 405—413.

229. König, J., Über eine Eigenschaft der Potenzreihen. *Math. Ann.* **23** (1884) 447—450.

230. Koteloff, K. J., [Über eine besondere Art der Zerlegung einer holomorphen Funktion in ein unendliches Produkt] (russisch). *Mitt. phys.-math Ges. Kasan* 7 (1890) 407—415.

231. Kraft, A., Über ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung. Dissertation. Göttingen, 1903. 76 S. 8⁰.

232. Krause, M., Partialbruchzerlegung bei transcendenten Funktionen. *Stzsb. Ges. Isis Dresden* 1898, 10—11.

233. Krygowski, Z., [Beitrag zur Theorie der lakunären Funktionen] (polnisch). *Prace mat. fiz.* **9** (1898) 213—221.

234. — Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Bull. Soc. math. France* **25** (1897) 240—243.

235. — [Zur Theorie der analytischen Funktionen] (polnisch). *Wiadomości mat.* **3** (1899) 147—154.

236. Laguerre, E., Sur la détermination du genre d'une fonction transcen-

dante entière. *C. R. Ac. sc Paris* 94 (1882) 635—638; *Oeuvres* 1, Paris 1898, 171—173.
237. Laguerre, E., Sur la théorie des équations numériques *J. math. p. appl.* (3) 9 (1883) 99—146; *Oeuvres* 1, 3—47.
238. — Sur le genre de quelques fonctions entières. *C. R Ac. sc. Paris* 98 (1884) 79—81; *Oeuvres* 1, 178—180.
239. — Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. *C. R. Ac. sc. Paris* 95 (1882) 828—831; *Oeuvres* 1, 174—177.
240. — Sur quelques équations transcendantes. *C. R. Ac. sc Paris* 94 (1882) 160—163; *Oeuvres* 1, 167—170.
241. Lasker, E., Über Reihen auf der Konvergenzgrenze *Proc R. Soc. London* 66 (1900) 337—339; *Phil. Trans. R. Soc. London* 196 A (1901) 431—477
242. Laurent, H, Sur les séries de polynômes. *J. math p. appl* (5) 8 (1902) 309—328.
243.* Leau, L., Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor *Bull. Soc math. France* 26 (1898) 267—271
244. — Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. *J math. p. appl.* (5) 5 (1899) 365—425.
245. — Représentation des fonctions par des séries de polynômes. *Bull. Soc. math. France* 27 (1899) 194—200
246. — Sur le cercle de convergence des séries. *C. R. Ac. sc. Paris* 127 (1898) 711—712.
247. — Sur les fonctions définies par un développement de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 804—805
248. — Sur les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes. *C. R. Ac. sc. Paris* 127 (1898) 607—609.
249. Lecornu, L., Sur les séries entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 104 (1887) 349—352.
250. Le genre des fonctions entières. *Rev. gén. sc. p. appl.* 12 (1901) 278.
251. Lerch, M., [Beitrag zur Lehre der Punktmengen] (böhmisch) *Stzgsb. Böhm. Ges. Prag* 1884, 176—178.
252. — [Bemerkung zur Funktionenlehre] (böhmisch). *Rozpravy Ak. Prag* 9_8 (1900).
253. — Contributions à la théorie des fonctions. *Stzgsb. Böhm. Ges. Prag* 1886, 571—582.
254. — Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, répresentent des fonctions distinctes. *Bull. sc. math.* (2) 10 (1886) 45—49.
255. — Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions. *Stzgsb. Böhm. Ges. Prag* 1885, 404—414.
256. — Sur une classe de fonctions à espace lacunaire. *J. sc. math. astr. Coimbra* 10 (1890) 27—28.
257. — Über die analytische Natur einer von P. du Bois-Reymond betrachteten Funktion. *Monatsh. Math. Phys.* 8 (1897) 377—382. Franz. Übers. in *Acta math.* 22 (1899) 371—377.
258 — Über Functionen mit beschränktem Existenzbereiche *Abh. Böhm. Ges. Prag* (7) 2 (1888).
259. — [Über Punktmengen und ihre Bedeutung für die Analysis] (böhmisch). *Časopis Pest. math. fys* 15 (1886) 211.
260 — Un théorème de la théorie des séries. *Acta math.* 10 (1887) 87—88.
261 Levi, B., Intorno alla teoria degli aggregati. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 35 (1902) 863—868.
262. — Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi. *Rend. Acc. Lincei* (5) 9_2 (1900) 72—79.
263. Levi-Civita, T., Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. *Atti Ist. Ven.* (7) 4 (1893) 1765—1815.
264. — Sui numeri transfiniti. *Rend. Acc. Lincei* (5) 7_1 (1898) 91—96, 113—121.
265. — Sur les fonctions de genre infini. *Bull. sc. math.* (2) 26 (1902) 333—335.
266. Lewicky, W., [Die neuesten Resultate der Theorie der analytischen Funktionen] (polnisch). *Abh. Ges. Wiss. Lemberg* 7 (1901), 2. Heft, Nr. 4.

267. Lewicky, W., [Zur Theorie der Potenzreihen] (polnisch) *Abh. Ges. Wiss. Lemberg* 7 (1901), 1. Heft, Nr 1.

268. — Zur Theorie der Potenzreihen. *Monatsh. Math. Phys.* 12 (1901) 329—336.

269.* Lindelöf, E., Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. *Acta Soc. Fennicae* 31_1 (1902) 1—79.

270. — Quelques applications d'une formule sommatoire générale. *Acta Soc. Fennicae* 31_3 (1902) 1—46.

271. — Quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 133 (1901) 1279—1282.

272. — Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques. *Acta Soc. Fennicae* 24_7 (1898) 1—37.

273. — Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor. *C. R. Ac. sc Paris* 126 (1898) 632—634.

274. — Sur le prolongement analytique. *Bull. Soc. math. France* 29 (1901) 157—160.

275. — Sur les fonctions entières de genre fini. *C. R. Ac. sc. Paris* 135 (1902) 316—319.

276. — Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 135 (1902) 1315—1318.

Lorey, W. s. Hadamard 194.

277. Loria, G., La definizione dello spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor. *G. mat.* 25 (1887) 97—108.

278. Lüroth, J., Über gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander. *Stzgsb. phys.-med. Soc. Erlangen* 10 (1878) 190—195, 31 (1899) 86—91.

279. Maccaferri, E., Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi. *Riv. mat.* 4 (1894) 97—103.

280.* Maillet, E., Quelques remarques sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 275—277.

281.* Maillet, E., Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. *Bull. Soc. math. France* 30 (1902) 195—201.

282. — Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. *C. R. Ac. sc. Paris* 135 (1902) 434—435.

283 — Sur les fonctions entières d'ordre infini et les équations différentielles. *C. R. Ac. sc Paris* 136 (1903) 348—351.

284. — Sur les fonctions entières et quasi-entières. *J. math. p. appl* (5) 8 (1902) 329—386.

285. — Sur les fonctions entières et quasi-entières à croissance regulière et les équations différentielles. *Ann. Fac. sc. Toulouse* (2) 4 (1903) 447—469.

286. — Sur les fonctions entières et quasi-entières et les équations différentielles *C. R. Ac. sc. Paris* 135 (1902) 391—392.

287 — Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé. *Bull. Soc. math. France* 31 (1903) 27—47.

288. — Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé. *C R. Ac sc. Paris* 135 (1902) 889—891.

289. — Sur les fonctions quasi-entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 405—407.

290. — Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. *C. R Ac. sc. Paris* 134 (1902) 517—518.

290a. — Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. *J. Éc. Polyt.* (2) 8 (1902).

291. — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières. *Bull. Soc. math. France* 30 (1902) 134—155

292. — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 1131—1133.

293. — Sur les racines des équations transcendantes. *C. R. Ac. sc. Paris* 132 (1901) 908—910.

294. — Sur les racines des équations transcendantes à coefficients ration-

nels. *J. math. p. appl.* (5) 7 (1901) 419—440.

295.*Maillet, E., Sur les séries divergentes et les équations différentielles. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 975—977.

296. — Sur les zéros des fonctions monodromes ou à ν branches *C. R Ac. sc. Paris* 136 (1903) 1128—1129.

297. — Sur une catégorie de fonctions transcendantes et les équations différentielles rationnelles. *J. math. p. appl.* (5) 8 (1902) 19—57.

298. — Sur une certaine catégorie de fonctions transcendantes *C. R. Ac. sc. Paris* 132 (1901) 460—462, 622—624.

299. Marx, J. C., Over te Ontbinding in Primfuncties van geheele transcendentale Functies. Proefschrift. Utrecht, 1896. 128 S. 8⁰.

300.*Mellin, H., Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Functionen von endlichem Geschlecht. *Acta math.* 25 (1901) 165—183; *Acta Soc. Fennicae* 31 (1902).

301. Méray, C., Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières. *Bull. sc. math.* (2) 12 (1888) 248—252.

302 Meyer, A., Från fysisk-matematiska föreningen i Upsala. I. *Tids. Math. Fys.* (5) 1 (1884) 73—78.

303 Meyer, F., Elemente der Arithmetik und Algebra. Halle, 1885. 224 S. 8⁰.

304. Milesi, L., Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni *Riv. mat.* 2 (1892) 103—106.

305. Milhaud, G., L'infini mathématique. *Rev. philos.* 43 (1897) 296—310.

306.*Mittag-Leffler, G., A criterion for the recognition of the irregular points of analytic functions. *Reports Brit. Assoc. 71st meeting, Glasgow* 1901, 549—550.

307. — Analytische Darstellung monogener Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* 9_1 (1900) 74—77.

308. — Démonstration du théorème de Laurent. *Acta math.* 4 (1884) 80—88.

309.*Mittag-Leffler, G., Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. *Mém. Soc. Liège* (2) 11 (1885).

310. — En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlighetspunkter, hvilkas konstanter äro på förhand angifna. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 33_6 (1876) 3—16.

311. — Ett nytt bevis för Laurents theorem. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 40_9 (1883) 5—13.

312. — Extrait d'une lettre à M. Hermite. *Bull. sc. math.* (2) 3 (1879) 269—278.

313. — Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 39_2 (1882) 11—45.

314 — Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion. *Öfv. Förh. Ak Stockh.* 55 (1898) 247—262, 263—282, 375—385.

315. — Om den analytiska framställningen af en entydig monogen funktion, hvilken uti omgifningen af hvarje punkt som är belägen innanföre en viss cirkelperiferi, endast har ett ändligt antal singulära ställen. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 39_4 (1882) 21—25.

316. — Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 34_1 (1877) 33—43.

317. — Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett ändligt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 34_2 (1877) 31—41.

318. — Om en generalisering af potensserien. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 55 (1898) 135—138.

319. — On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series. *Proc London math. Soc.* 32 (1900) 72—78.

320.* Mittag-Leffler, G., On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function. *Trans. Cambr. phil. Soc.* 18 (1900) 1—11.
321 — Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione monogena. *Atti Acc. Torino* 34 (1899) 481—491.
322. — Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. *Acta math.* 4 (1884) 1—79.
323. — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. *Acta math.* 23 (1900) 43—62, 24 (1901) 183—204, 205—244, 26 (1903) 353—391, 29 (1905) 101—181.
324. — Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction analytique. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 1212—1215
325. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. *C. R. Ac sc. Paris* 94 (1882) 414—416, 511—514, 713—715, 781—783, 938—941, 1040—1042, 1105—1108, 1163—1166, 95 (1882) 335—336.
326. — Sur le terme complémentaire de mon développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède une étoile de convergence. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 58 (1901) 785—790.
327. — Sur une extension de la série de Taylor. *Congrès math. Paris* 1901, 273—276.
328. — Sur une formule de M. Fredholm. *C. R. Ac. sc. Paris* 132 (1901) 751—753.
329. — Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm. *C. R. Ac. sc. Paris* 110 (1890) 627—629.
330. — Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une lettre à M. Poincaré. *Acta math.* 15 (1891) 279—280.
331. — Über eine Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe. *Nachr. Ges. Gött.* 1900, 194—205.
332. — Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène. *C. R. Ac. sc. Paris* 133 (1901) 357—361
333.* Mittag-Leffler, G., Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. *C. R. Ac. sc. Paris* 136 (1903) 537—539.
334. — Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 34_1 (1877) 17—32.
Molk, J. s. Tannery 468.
Morley, F. s. Harkness 197.
335. Netto, E., Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *J. r. ang. Math.* 86 (1879) 263—268.
336. Niccoletti, O., Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Lincei* (5) 11_2 (1902) 351—357, 12_1 (1903) 3—9. Franz. Übers. in *Prace mat. fiz.* 15 (1904) 1—13.
337 Oldenburg, H, En anmärkning angående s. k divergenta summerbara serier. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 55 (1898) 157—162.
338.* Osgood, W. F., Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen. *Encyklop. math. Wiss.* 2_2 (1901) 1—114.
339 — Example of a single-valued function with a natural boundary, whose inverse is also single-valued. *Bull. Amer. math. Soc.* (2) 4 (1898) 417—424.
340. — Note on the functions defined by infinite series, whose terms are analytic functions of a complex variable; with corresponding theorems for definite integrals. *Annals of math.* (2) 3 (1901—1902) 25—34.
341. — Note on the generalisation of Poincaré's and Goursat's proofs of a theorem of Weierstrass. *Bull. Amer. math. Soc.* (2) 5 (1898) 14—17.
342. — Selected topics in the general theory of functions. *Bull. Amer. math. Soc.* (2) 5 (1898) 59—87.
343. — Supplementary note on a single-valued function with a natural boundary, whose inverse is also single-valued. *Bull. Amer. math. Soc.* (2) 5 (1898) 17—18.
344. Padé, H., Sur la possibilité de définir une fonction par une série entière divergente. *C. R. Ac. sc. Paris* 116 (1893) 686—687.

345. Padé, H., Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles. *Acta math* 18 (1894) 97—112.
346. Painlevé, P., Observations sur la communication précédente (Nr 58). *C. R. Ac. sc. Paris* 135 (1902) 152—153.
347. — Remarques sur la communication précédente (Nr. 83). *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 155—157.
348. — Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 126 (1898) 200—202.
349. — Sur le développement des fonctions analytiques en séries de polynômes *C R Ac. sc. Paris* 135 (1902) 11—15.
350. — Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque. *C. R. Ac. sc. Paris* 126 (1898) 318—321.
351. — Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes. *C. R. Ac. sc. Paris* 129 (1899) 27—31.
352. — Sur le développement d'une branche uniforme d'une fonction analytique. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 1277—1280.
353. — Sur le développement en série de polynômes d'une fonction holomorphe dans une aire quelconque. *C. R. Ac. sc. Paris* 102 (1886) 672—675.
354. — Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. *Ann Fac. sc. Toulouse* 2 (1888).
355. — Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles. *C. R. Ac. sc. Paris* 131 (1900) 489—492.
356. — Sur les transcendantes méromorphes définies par les équations différentielles du second ordre. *C. R. Ac. sc. Paris* 134 (1902) 449—453.
357 Paolis (de), R., Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi. *Mem. mat. fis. Soc. It. (detta dei XL)* (3) 3 (1890) 164 S.
358. Pascal, E., Funzioni olomorfe nel campo ellittico (estensione di un celebre teorema di Weierstrass). *Rend. Acc. Lincei* (5) 5_1 (1896) 319—323
359.* Peano, G., Arithmetices principia, nova methodo exposita. Turin, 1889. XVI u. 20 S. 8⁰.
360. — Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Math. Ann.* 37 (1890) 182—228.
361. — Lezioni di analisi infinitesimale. Torino, 1893. 1. IV u. 319 S., 2. IV u. 324 S. 8⁰.
362 — Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Math. Ann.* 36 (1890) 157—160.
363. — Teoria dei gruppi di punti. Torino, 1894. Auszug aus dem *Formulaire de mathématiques* (Turin, 1895) 58—64 und aus der *Riv. mat.* 4 (1894) 33—35
364 Petersen, J., Quelques remarques sur les fonctions entières. *Acta math.* 23 (1900) 85—90.
365. — Vorlesungen über Functionstheorie. Kopenhagen, 1898. IV u. 328 S. 8⁰
366.* Petrovitch, M., Remarque sur les zéros des séries de Taylor. *Bull. Soc. math. France* 29 (1901) 303—312.
367.* Phragmén, E., Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. *Acta Math.* 5 (1884) 47—48
368. — En ny sats inom teorien för punktmängder. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 41_1 (1884) 121—124
369. — Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 1434—1437.
370. — Über die Begrenzungen von Continua. *Acta math.* 7 (1885) 105—124.
371. Picard, É., L'idée de fonction depuis un siècle. *Rev. gén. sc. p. appl.* 11 (1900) 61—69.
372. — Mémoire sur les fonctions entières. *Ann. Éc. Norm.* (2) 9 (1880) 145—166.
373. — Quelques remarques sur le prolongement des fonctions. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 193 - 195.
374. — Remarques sur la communication de M. Borel (Nr. 43). *C. R. Ac sc. Paris* 122 (1896) 1048.
375. — Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uni-

formes ayant une ligne de points singuliers essentiels. *C. R. Ac. sc. Paris* **92** (1881) 690—692.
376. Picard, É., Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales. *Rev. gén. sc. p. appl.* **11** (1900) 589—597.
377. — Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel. *C. R. Ac. sc. Paris* **89** (1879) 745—747.
378. — Sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* **89** (1879) 662—665.
379. — Sur une propriété des fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* **88** (1879) 1024—1027.
380.*Pincherle, S., A proposito di un recente teorema del Sig. Hadamard. *Rend. Acc. Bologna,* Nuova Serie, **3** (1898—1899) 67—74.
381. — Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari. *Rend. Acc. Lincei* (4) 3_1 (1887) 370—375.
382. — Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica. *Ann. mat. p. appl.* (3) **4** (1900) 219—280
383. — Lezioni sulla teoria delle funzioni. Bologna, 1893. IV u 301 S. 8⁰ (lith.).
384. — Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche. Bologna, 1899—1900. XVIII u. 566 S. 4⁰ (lith.).
385. — Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente. *Rend. Ist. Lomb.* (2) **11** (1878) 391—398.
386. — Remarque relative à la communication de M. Hadamard (Nr. 185). *Verh. Math. Kongr. Zürich* 1898, 203.
387. — Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass. *G. mat.* **18** (1880) 178—254, 317—357.
388. — Sopra un' applicazione delle funzioni sferiche al teorema di Mittag-Leffler e alla determinazione delle funzioni a spazi lacunari. *Rend. Acc. Bologna* 1882—1883, 100—105.
389. — Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Bologna,* Nuova Serie, **2** (1897—1898) 77—88.
390.*Pincherle, S., Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche. *Rend. Acc. Lincei* (4) 3_2 (1887) 310—315.
391. — Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al Dr. Vivanti). *Ann. mat. p. appl.* (2) **21** (1893) 138—140.
392. — Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date. *Rend. Acc. Lincei* (5) 8_1 (1899) 228—232.
393. — Sur les séries de puissances toujours divergentes. *C. R. Ac. sc. Paris* **128** (1899) 407—410.
394. Pizzarello, D., Sulle funzioni trascendenti intere. Messina, 1900. 70 S. 8⁰.
395. Poincaré, H., Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Acta Soc. Fennicae* **12** (1883) 341—350.
396. — Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Amer. J. math.* **14** (1892) 201—221.
397. — Sur les fonctions entières. *Bull. Soc. math. France* **11** (1883) 136—144.
398. — Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta math.* **8** (1886) 295—344.
399. — Sur les transcendantes entières. *C. R. Ac sc. Paris* **95** (1882) 23—26.
400. Pomey, J. B., Sur une fonction qui a une ligne d'infinis. *Nouv. Ann. math.* (3) **5** (1886) 530—533.
401.*Pompeiu, D., Sur les fonctions de variables complexes. *C. R. Ac. sc Paris* **134** (1902) 1195—1197
402.*Pringsheim, A., Erwiderung gegen Hrn. Lerch *Monatsh Math. Phys.* **9** (1898) 46.
403. — Grundlagen der allgemeinen Functionenlehre. *Encyklop. math. Wiss.* **2** (1899) 1—53.
404. — Über das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. *Math. Ann.* **25** (1885) 419—426.
405. — Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* **30** (1900) 37—100.
406. — Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-

grenze. *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* 31 (1901) 505—524.
407.* Pringsheim, A., Über die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen. *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* 25 (1895) 75—92.
408. — Über eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Functionen. *Math. Ann.* 50 (1898) 442—461.
409. — Über Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen. *Math. Ann.* 44 (1894) 41—56.
410. — Über gewisse Reihen, welche in getrennten Convergenzgebieten verschiedene, willkürlich vorgeschriebene Functionen darstellen. *Math. Ann.* 22 (1883) 109—116.
411. — Über Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen. *Stzgsb. math.-phys Ak. München* 25 (1895) 337—364.
412. — Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen. *Math. Ann.* 47 (1896) 121—154.
413. — Zur Geschichte des Taylor'schen Lehrsatzes. *Bibl. math.* (3) 1 (1900) 433—479.
414. — Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen. *Stzgsb math.-phys. Ak. München* 32 (1902) 163—192, 295—304.
415 — Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen von endlichem Range. *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* 33 (1903) 101—130.
416. — Zur Theorie der synektischen Functionen. *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* 26 (1896) 167—182.
417. — Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich. *Math. Ann.* 42 (1893) 153—184.
418. — Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich. *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* 22 (1892) 211—245.
419. Pszeborsky, A. P., [Über lakunäre Funktionen] (russisch). *Nachr. Univ. Kiew* 1897, Nr. 7, 49—60.
420.* Puzyna (von), J., [Theorie der analytischen Funktionen] (polnisch). 1. Lemberg, 1898. 549 S. 8°. 2. Lemberg, 1900. 673 S. 8°.
421. — Über den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function mit unendlich vielen Nullstellen. *Monatsh. Math. Phys.* 3 (1892) 1—15.
422. Raay (Jansson van), W. H. L., De jongsten onderzoekingen betreffende het oneindig groote. *Handel. 6^de Nederl. Nat. Geneesk. Congres* 1897, 211—218.
423. — Sur une classe de grandeurs transfinies. *G. mat.* 32 (1894) 1-22, 33 (1895) 329—360.
424.* Remoundos, G., Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 136 (1903) 953—955.
425. Renaux, Sur les fonctions fondamentales et sur le développement d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour en série de fonctions fondamentales. *C. R. Ac. sc. Paris* 129 (1899) 545—548.
426. — Sur un développement d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour en une série de polynômes. *C. R. Ac. sc. Paris* 129 (1899) 473—475.
427. Riquier, C., Sur la forme que prend, par la suppression de certains termes, un développement en série entière. *C. R. Ac. sc. Paris* 126 (1898) 1558—1560.
428. Roy (le), E., Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 127 (1898) 948—950.
429. — Sur les séries divergentes. *C. R Ac. sc. Paris* 130 (1900) 1293-1296, 1535—1536.
430. — Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. *Ann. Fac. sc. Toulouse* (2) 2 (1900) 317—430.
431. — Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 127 (1898) 654—657, 128 (1899) 492—495.

432. Roy (le), E., Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle. *Bull. sc. math.* (2) 24 (1900) 245—268.
433. Roy (le), E., Vincent, G., Sur l'idée de nombre. *Rev. Métaphys.* 4 (1896) 738—755.
434 Runge, C., Zur Theorie der analytischen Functionen. *Acta math.* 6 (1885) 245—248.
435. — Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. *Acta math.* 6 (1885) 229—244.
436.* Russell, B., Théorie des séries bien ordonnées. *Rev. math.* 8 (1902) 12—16.
437. Schaper (von), H., Über die Theorie der Hadamard'schen Functionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. Disse tation Göttingen, 1898. IX u. 68 S. 8°.
438. Scheeffer, L., Allgemeine Untersuchungen über Rektifikation der Kurven. *Acta math.* 5 (1884) 49—82.
439. — Beweis des Laurent'schen Satzes. *Acta math.* 4 (1884) 375—380.
440. — Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen. *Acta math.* 5 (1884) 183—194, 279—296.
441. Schering, E., Das Anschließen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen. *Abh. Ges. Gött.* 27 (1880).
442.* Schoenflies, A., Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* 8_2 (1900) 1—251.
443. — Mengenlehre. *Encyklop. math. Wiss.* 1 (1899) 184—207.
444. — Sur les nombres transfinis de M. Veronese. *Rend. Acc. Lincei* (5) 6_2 (1897) 362—368.
445. — Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projektivische Geometrie. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* 5 (1897) 75—81.
446. — Über den Beweis eines Haupttheorems aus der Theorie der Punktmengen. *Nachr. Ges. Gött.* 1903, 1—11.
447. — Über die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander. *Nachr. Ges. Gött.* 1896, 255—266.
448. Schou, E., Bevis for en Sätning af Hadamard. *Nyt Tids. Math.* 8 B (1897) 5—6.
449. — Sur la théorie des fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 125 (1897) 763—764.
450. Schröder, E., Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explicite Gleichzahligkeitsbedingung. *Abh. Leop. Ak.* 71_7 (1898).
451. — Über G. Cantor'sche Sätze. *Jhrsb. Dtsch Math.-Ver* 5 (1897) 81—82.
452. — Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze. *Abh. Leop Ak.* 71_6 (1898).
453. Schwarz, H., Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Dissertation. Halle, 1888. 43 S. 8°.
454. Servant, M., Essai sur les séries divergentes. *Ann. Fac. sc. Toulouse* (2) 1 (1899) 117—175.
455. — Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 128 (1899) 80—83.
456.* Severini, C., Sulle serie di funzioni analitiche. Foggia, 1903. 56 S. 8°.
457. — Sulle serie di funzioni analitiche. *Rend. Acc. Lincei* (5) 12_2 (1903) 97—105, 257—267.
458. Sleschensky, S., [Zur Theorie der analytischen Funktionen] (russisch). *Mitt. math. Ges. Moskau* 17 (1893) 223—228
459. Sparre (de), M. L. M., Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers. *C. R. Ac. sc. Paris* 102 (1886) 740—743.
460. Stäckel, P., Arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen. *Acta math.* 25 (1902) 371—384.
461. — Arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver* 11 (1902) 183—184.
462. — Über arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen. *Math. Ann.* 46 (1895) 513—520. Franz. Übers. in *Nouv. Ann. math.* (3) 18 (1899) 53—64.
463. — Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. *J. r. ang. Math.* 112 (1893) 262—264.
464. — Zur Theorie der eindeutigen

Functionen. *J. r. ang. Math.* 106 (1890) 189—192.
465. Stieltjes, T. J., Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle. *Bull. sc. math.* (2) 11 (1887) 46—51.
466.*Stolz, O., Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. *Math. Ann.* 23 (1884) 152—156.
467. Tannery, J., De l'infini mathématique. *Rev. gén. sc. p. appl.* 8 (1897) 129—140.
468. Tannery, J., Molk, J., Éléments de la théorie des fonctions elliptiques 1. Paris, 1893. VIII u. 246 S. 8⁰
469. Tannery, P., Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor. *Rev. philos.*, octobre 1885.
470. — Note sur la théorie des ensembles. *Bull. Soc. math. France* 12 (1884) 90—96.
471. — Sur le concept du transfini. *Rev. Métaphys* 2 (1894) 465—472.
472. Teixeira, F. G., Exemples de fonctions à espaces lacunaires *Nouv Ann. math.* (3) 6 (1887) 43—45.
473. — Extrait d'une lettre adressée à M Hermite. *Bull. sc. math.* (2) 17 (1893) 29—32.
474. — Sobre o desenvolvimiento das Funcções em série. *Mem. Ac. Madrid* 18 (1897); *Obras sobre mathematica* 1, Coimbra 1904, 1—102.
475. — Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée. *J. r. ang. Math.* 122 (1900) 97—123.
476. Thomae, J., Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre *Z. Math. Phys.* 41 (1896) 231—232.
477 — Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. 1. Ausg. Halle, 1880. VIII u. 132 S. 4⁰. 2. Ausg. Halle, 1898. VIII u 150 S. 4⁰.
478. — Sätze aus der Functionentheorie. *Nachr. Ges. Gött.* 1878, 466—468.
479. Thomé, L. W., Über asymptotische Darstellung von Functionen. *J r. ang. Math.* 124 (1901) 152—156.
480. — Über Convergenz und Divergenz der Potenzreihe auf dem Convergenzkreise. *J. r. ang. Math.* 100 (1887) 167—178.
481. Timtschenko, J., [Elemente der Theorie der analytischen Functionen] (russisch). 1. Odessa, 1899. XV, IV, III, III u. 655 S. 8⁰.
482. Toffoletti, C., Sulla funzione del modulo massimo nelle trascendenti intere di genere finito. *Rend. Circ. mat. Palermo* 17 (1903) 198—221.
483. Veltmann, W., Die Fourier'sche Reihe. *Z. Math. Phys.* 27 (1882) 193—235.
484. — Über die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. *Z. Math. Phys.* 27 (1882) 176—179.
485. — Zur Theorie der Punktmengen. *Z. Math. Phys.* 27 (1882) 313—314.
486. Veronese, G., Fondamenti di geometria. Padova, 1891. XLVIII u. 630 S. 8⁰. Deutsche Übersetzung von A Schepp. Leipzig, 1894. XLVI u. 710 S. 8⁰.
487. — Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali. *Math. Ann* 47 (1896) 423—432.
488. — Segmenti e numeri transfiniti. *Rend. Acc. Lincei* (5) 7_1 (1898) 79—87.
489. — Sul postulato della continuità. *Rend. Acc. Lincei* (5) 6_2 (1897) 161—168.
Vincent, G. s. Roy (le) 433.
490.*Vitali, G., Sui limiti per $n = \infty$ delle derivate n^{mo} delle funzioni analitiche. *Rend. Circ. mat. Palermo* 14 (1900) 209—216.
491. — Sulle funzioni analitiche sopra le superficie di Riemann. *Rend. Circ. mat. Palermo* 14 (1900) 202—208.
492. Viterbi, A., Sulla continuazione analitica delle funzioni monogene uniformi rappresentate col metodo del Mittag-Leffler. *Rend. Circ. mat. Palermo* 12 (1898) 95—110.
493. Vivanti, G., Alcuni teoremi sulle funzioni intere. *G. mat* 22 (1884) 243—261, 378—380.
494. — Dimostrazione diretta d'un teorema sulle serie asintotiche. *Rend. Circ. mat. Palermo* 17 (1903) 368—370.
495. — Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. *Ann. mat. p. appl.* (2) 17 (1889) 1—35.
496. — Lezioni sulla teoria delle fun-

zioni analitiche. Reggio Calabria, 1899. 435 S. 8° (lith.).
497. Vivanti, G., Lista bibliografica della teoria degli aggregati. *Bibl. math.* (3) 1 (1900) 160—165.
498. — Notice historique sur la théorie des ensembles. *Bibl. math.* (2) 6 (1892) 9—25.
499. — Nuove ricerche sulle funzioni intere. *G. mat.* 26 (1888) 303—314
500. — Osservazioni sui punti singolari essenziali. *Rend. Circ. mat Palermo* 3 (1889) 223—229.
501. — Sugli aggregati perfetti. *Rend. Circ mat. Palermo* 13 (1899) 86—88.
502. — Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche. *Rend. Circ. mat. Palermo* 13 (1899) 263—273. Poln. Übers. in *Wiadomości mat.* 3 (1899) 138—147.
503. — Sulle funzioni intere di rango finito. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 36 (1903) 998—1002.
504. — Sulle funzioni intere trascendenti. *G. mat.* 33 (1885) 96—122.
505. — Sulle funzioni trascendenti intere. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 32 (1899) 569—571.
506. — Sulle serie di potenze. *Riv. mat.* 3 (1893) 111—114.
507. — Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al Prof. S. Pincherle). *Ann. mat. p. appl.* (2) 21 (1893) 193—194.
508. — Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile. *Ann. mat. p. appl.* (2) 21 (1893) 25—32.
509. — Sul *valor medio* di Pringsheim e sulla sua applicazione alla teoria delle funzioni analitiche. *Math. Ann.* 58 (1904) 457—468.
510. — Teoria degli aggregati. Torino, 1894. Auszug aus dem *Formulaire de mathématiques* 1, Turin 1895, 65—74 und aus der *Riv. mat.* 3 (1893) 189—192, 4 (1894) 135—140.
511. — Teoria delle funzioni analitiche. Milano, 1901. VIII u. 432 S. 16°.
512. Vleck (van), E. B., On linear criteria for the determination of the radius of convergence of a power series. *Trans. Amer. math. Soc.* 1 (1900) 293—309.
513. Volpi, R., Zoccoli, E. G., Di un' applicazione della teoria dei gruppi del Cantor al problema gnoseologico. Modena, 1896. 15 S. 8°.
514. Volterra, V., Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del Prof. Mittag-Leffler. *Atti Acc. Torino* 34 (1899) 492—494.
515. Walter, A., Über den Cauchy-Hadamard'schen Satz vom Convergenzradius; nebst einer Darstellung der Dedekind'schen Irrationaltheorie. *Monatsh. Math. Phys.* 12 (1901) 49—81.
516.* Weierstraß, K., Über einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler. *Monatsber. Ak. Berlin* 1880, 707—717; *Abhandlungen aus der Functionenlehre,* Berlin 1886, 53—66; *Mathem. Werke* 2, Berlin 1895, 189—199. Franz. Übers. in *Bull. sc. math.* (2) 5 (1881) 113—124.
517. — Zur Functionenlehre. *Monatsber. Ak. Berlin* 1880, 719—743, 1881, 228—230; *Abhandlungen aus der Functionenlehre* 67—104; *Mathem. Werke* 2, 224—233. Franz. Übers. in *Bull. sc. math.* (2) 5 (1881) 157—183.
518. — Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. *Abh. Ak. Berlin* 1876, 11—60; *Abhandlungen aus der Functionenlehre* 1—52; *Mathem. Werke* 2, 77—124. Franz. Übers. in *Ann. Éc. Norm.* (2) 8 (1879) 111—150.
519.* Whitehead, A. N., On cardinal numbers. *Amer. J. math.* 24 (1902) 367—394.
520.* Wigert, S., Sur les fonctions entières. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 57 (1900) 1001—1011.
521 Witting, A., Über die Lage der Verschwindungspunkte einer ganzen Function. *Z. Math. Phys.* 30 (1885) 274—278.
522. Woronoi, G. T., [Verallgemeinerung des Begriffs der Summe einer unendlichen Reihe] (russisch). *Tageblatt XI. Vers. russ. Naturforscher* 1901, 60—61.
523.* Zermelo, E., Über die Addition transfiniter Cardinalzahlen. *Nachr. Ges. Gött.* 1901, 34—38.
Zoccoli, E. G. s. Volpi.

Nachtrag.

523a.* Agnola (dell'), C. A., Analogia fra alcune serie di polinomi e le serie di potenze *Atti Ist. Ven.* 64_2 (1904—5) 423—429, 1143—1154.

524. — Sulla distribuzione delle radici della derivata di una funzione razionale intera. *Rend. Acc. Lincei* (5) 13_2 (1904) 337—339.

525. Bagnera, G., Sopra il limite superiore del modulo di una funzione intera di ordine finito. *Rend. Circ. mat Palermo* 18 (1904) 218—220.

526.* Baire, R., Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, 1905. VIII u. 128 S. 8°.

527.* Barnes, E. W., On the asymptotic expansion of integral functions of multiple linear sequence. *Trans. Cambr. phil. Soc.* 19 (1904) 426—439.

528. — On the classification of integral functions. *Trans. Cambr. phil. Soc.* 19 (1904) 322—355.

529.* Bettazzi, R., Teoria delle grandezze. Pisa, 1890. VII u. 181 S. 4°.

529a. Boggio, T., Sullo sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti. *Atti Acc. Torino* 38 (1903) 171—178.

530.* Borel, É., Contribution à l'analyse arithmétique du continu. *J. math. p. appl.* (5) 9 (1903) 329—375.

531. — Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes. Paris, 1905. IX u. 160 S. 8°.

532. — Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans. *Bull. Soc. math. France* 31 (1903) 272—275.

533. — Sur la détermination des classes singulières de séries de Taylor. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 695—697.

534. — Sur l'étude asymptotique des fonctions méromorphes. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 68—69.

534a. — Sur une propriété des ensembles fermés. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 298—300.

535. — Un théorème sur les ensembles mesurables. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 966—967.

536.* Bortolotti, E., Lezioni sul calcolo degli infinitesimi. Modena, 1905. VII u. 63 S. 8°.

537. — Sulla determinazione dell'ordine di infinito. *Atti Acc. Modena* (3) 4 (1904).

537a.* Boutroux, P., Sur les fonctions entières d'ordre entier. *Verh. Math.-Kongr. Heidelberg* 1904, 253—258.

538. — Sur les zéros des fonctions entières d'ordre entier. *C. R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 351—353.

539. — Sur quelques propriétés des fonctions entières. *Acta math.* 28 (1904) 97—224.

540.* Bukrejef, B. J., [Analytische Ausdrücke der eindeutigen Funktionen] (russisch). *Nachr. Univ. Kiew* 1883—84.

541.* Couturat, L., Les principes des mathématiques. *Rev. Métaph.* 12 (1904).

542. Davidoglou, A., [Über einen klassischen Satz] (rumänisch). *Gazeta mat.* 9 (1903) 53—55.

543.* Dedekind, R., Über Gleichungen mit rationalen Coefficienten. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* 1 (1890) 33—35.

543a. Dienes, L., La série de Taylor sur le cercle de convergence. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 489—491.

544. Emch, A., Some applications of the theory of assemblages. *The math. Gazette* 2 (1902) 173—175.

544a.* Faber, G., Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten. *Math. Ann.* 60 (1905) 379—397.

545. — Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen. *Math. Ann.* 58 (1904) 545—557.

545a. — Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen. *Math. Ann.* 60 (1905) 196—203.

546. — Über die Nicht-Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen. *Stzgsb. math.-phys. Ak. München* 34 (1904) 63—74.

547. Fatou, P., La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence. *C. R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 850—852.

548. Fatou, P., Sur les séries entières à coefficients entiers. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 342—344.
548a. — Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 359—360.
548b. — Sur quelques théorèmes de Riemann. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 569—570.
549. Fejér, L., Sur les équations fonctionnelles et la théorie des séries divergentes. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 839—841.
550. Fréchet, M., Généralisation d' un théorème de Weierstrass. *C R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 848—850.
550a. — Sur les fonctions d' une infinité de variables. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 567—568.
551. Galvani, L., La risoluzione di alcune equazioni funzionali mediante serie divergenti sommabili. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 37 (1904) 671—676.
552.*Gavrilovitch, B., [Über die analytische Darstellung der eindeutigen Funktionen in dem Bereiche des Punktes im Unendlichen] (serbisch). *Mitt. Ak. Belgrad* 65 (1902) 59—77.
Gmeiner, J. A. s. Stolz 638.
553.*Goursat, É., Cours d' analyse mathématique. 2_1 Paris, 1904. 304 S. 8°.
554. — Sur quelques développements de $\frac{1}{1-x}$ en séries de polynômes. *Bull. sc. math.* (2) 27 (1903) 226—232.
555.*Hadamard, J., Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$. *C. R. Ac. sc. Paris* 114 (1892) 1053—1055.
556.*Hanni, L., Über die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf. *Acta math.* 29 (1905) 25—58.
557. — Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Leffler's n-fach unendliche Reihe. *Monatsh. Math. Phys.* 14 (1903) 105—124.
558. Hardy, G. H., A theorem concerning the infinite cardinal numbers. *The Quart. J. p. appl. math.* 35 (1903) 87—94.
559. Hardy, G. H., Note on an integral function. *The Messenger Math* 34 (1904) 1—2.
560. — On differentiation and integration of divergent series. *Trans. Cambr. phil Soc.* 19 (1903) 297—321.
561. — On the roots of the equation $\frac{1}{\Gamma(n+1)} = c$. *Proc. London math. Soc.* (2) 2 (1904) 1—7.
562. — On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. 1. On the integral function $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\varphi(n)}}{(\varphi(n))!}$ 2. On the integral function $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^s n!}$ and other similar functions. *Proc. London math. Soc.* (2) 2 (1904) 332—339, 401—431.
563. — On the zeroes of certain integral functions. *The Messenger Math.* (2) 32 (1902) 36—45.
564. — On the zeroes of the integral function
$$x - \sin x = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{\overline{2n+1}!}.$$
The Messenger Math. (2) 31 (1902) 161—165.
565. — Researches in the theory of divergent series and divergent integrals. *The Quart. J. p. appl. math.* 35 (1903) 22—66.
566. — The asymptotic solution of certain transcendental equations. *The Quart. J. p. appl. math.* 35 (1903) 261—282.
567. — The cardinal number of a closed set of points. *The Messenger Math* 33 (1903) 67—69.
568.*Hausdorff, F., Der Potenzbegriff in der Mengenlehre. *Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver.* 13 (1904) 569—571.
569. Hayashi, T., Class-numbers of the transcendental integral functions whose zeroes are given by polynomials of many integers. *Z. phys.-math. Ges. Tokyo* 2 (1903) 138—143
570. Hill, M. J. M., On a geometrical proposition connected with the

continuation of power-series. *Proc. London math. Soc.* 35 (1903) 41—50.

571. Hill, M. J. M., On Weierstrass's primary factor. *The Messenger Math.* 33 (1903) 117—124.

571a. — The continuation of certain fundamental power series. *Proc. London math. Soc.* 35 (1903) 388—416.

572. Humbert, G., Cours d' analyse professé à l' école polytechnique. 2. Paris, 1904. XVIII u 493 S. 8⁰.

573.*Jaggi, E., Sur les zéros des fonctions entières. *Nouv. Ann. Math.* (4) 2 (1902) 218—226

574. Jahraus, K., Das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise historisch-kritisch dargestellt. Programm. Ludwigshafen, 1902. 56 S 8⁰.

575. Jourdain, E. B., On functions, all of whose singularities are non-essential. *The Messenger Math.* 33 (1903) 166—171.

576. Jourdain, J., The cardinal number of the aggregate of integral functions. *The Messenger Math.* 33 (1903) 78—79.

577. Jourdain, Ph. E. B., A general theorem on the transfinite cardinal numbers of aggregates of functions. *The London Edinb. Dublin phil Mag.* (6) 6 (1903) 323—326.

578. — On the transfinite cardinal numbers of number-classes in general. *The London Edinb. Dublin phil. Mag.* (6) 6 (1903) 294—303.

579. — On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates. *The London Edinb. Dublin phil. Mag.* (6) 6 (1903) 61—75.

580.*Kluyver, J. C., Over de wijziging, welke men tracht brengen in de van oudsher gebruikelijke analytische voorstelling eener functie. *Handel. 8ste Nat. Geneesk. Congres Rotterdam* 1901, 113—116.

581.*Koch (von), H., Applications nouvelles de la fonction exponentielle. *Bihang Ak. Handl. Stockh.* 28 (1902).

582. — Sur le prolongement analytique d' une série de Taylor. *Acta math.* 27 (1903) 79—104.

583. — Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys. Stockholm* 1 (1903) 205—208.

584. Landau, E., Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes. *Stzgsb. Ak. Berlin* 1904, 1118—1133.

585.*Leau, L., Sur les fonctions entières de genre fini. *C. R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 625—627.

586. Lebesgue, H., Leçons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, 1904. VIII u. 138 S. 8⁰.

587 — Sur les fonctions représentables analytiquement. *C R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 29—31.

587a.*Lindelöf, E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, 1905. VII u. 143 S. 8⁰.

588. — Remarque sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles (Extrait de deux lettres adressées a M. Mittag-Leffler). *Acta math.* 29 (1905) 183—190.

589. — Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor. *Bull. sc. math.* (2) 27 (1903) 213—226.

590. — Sur l' application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. *J. math. p. appl.* (5) 9 (1903) 213—221

591. — Sur quelques points de la théorie des ensembles. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 697—700.

591a. — Sur un cas particulier du théorème de M. Picard relatif aux fonctions entières. *Ark. Mat. Astr. Fys. Stockholm* 1 (1903) 101—104.

592. Lindgren, B., Sur la fonction entière $e^{K(z)} P_1(z) + P(z)$. *Bihang Ak. Handl. Stockh.* 28 (1902).

592a. — Sur le „cas d' exception de M. Picard“ dans la théorie des fonctions entières. Dissertation. Upsala, 1903. 38 S. 8⁰.

593. Lugaro, E., Intorno alle singolarità di una funzione dipendenti da quelle di più funzioni date. *Period. mat. insegn. sec.* (3) 1 (1904) 105—123.

594.*Maillet, E., Les fonctions entières d' ordre zéro. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 405—408.

595. — Question 2864. *L' Interméd. math.* 12 (1905) 8.

596. Maillet, E., Question 2717 *L'Intermėd. math.* 11 (1904) 8.

596a. — Sur certaines fonctions entières. *L' Intermėd. math.* 12 (1905) 14—15.

597. — Sur les fonctions entières et les nombres transcendants. *J. math p. appl.* (5) 10 (1904) 275—362.

597a. — Sur les fonctions monodromes et les équations différentielles. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 478—480.

597b. — Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 262—265.

598. — Sur les nombres e et π et les équations transcendantes. *Acta math.* 29 (1905) 295—331

598a. — Sur les séries divergentes et les équations différentielles. *Ann. Éc. Norm.* (3) 20 (1903) 487—578

598b. — Sur les zéros des fonctions entières d' ordre infini non transfini. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 300—302.

599. Maillet, E., Pellet, A., Remoundos, G., Question 2716, Réponses. *L' Intermėd. math.* 11 (1904) 8, 130—131, 202—203.

600. Malmquist, J., Étude d' une fonction entière. *Acta math.* 29 (1905) 203—215.

600a. Mattson, R., Sur le module des fonctions entières à croissance régulière. *Ark. Mat. Astr. Fys. Stockholm* 1 (1903) 261—265.

601.* Mellin, H., Die Dirichletschen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht. *Acta math.* 28 (1904) 37—64.

602.* Mittag-Leffler, G., Funktionstheoretiske Studier. 1. *Acta Soc. Fennicae* 11 (1879) 275—293.

602a. — Sopra la funzione $E_\alpha(x)$. *Rend. Acc. Lincei* (5) 13_1 (1904) 3—5.

603. — Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Ac. sc. Paris* 137 (1903) 554—558.

604. — Sur le théorème de M. Jensen. *Bull. Soc. math. France* 32 (1904) 1—4.

604a. — Sur une classe de fonctions entières. *Verh. Math.-Kongr. Heidelberg* 1904, 258—265.

605. Montessus de Ballore (de), R., Sur la représentation des fonctions par des suites de fractions rationnelles. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 471—474.

606. Mortel, P., Sur les suites de fonctions analytiques *C. R. Ac sc. Paris* 138 (1904) 469—471.

607. Orlando, L., Sullo sviluppo della funzione $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}$; *G. mat.* 41 (1903) 377—378.

608.* Osgood, W. F., On a gap in the ordinary presentation of Weierstrass's theory of functions. *Bull. Amer. math. Soc* (2) 10 (1904) 294—301.

609.* Peano, G., Formulaire mathématique. Turin 1 (1895) 134 S. 8°, 2 (1899) 199 S. 8°, 3 (1901) VIII u. 231 S. 8°, 4 (1903) XVI u 407 S. 8°.

610 Pellet, A., Sur les fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 261—262.

— s. Maillet.

611.* Petrovitch, M., [Beitrag zur Theorie der Reihen] (serbisch). *Mitt. Ak Belgrad* 63 (1902) 73—114.

612. — Remarque sur les zéros des fonctions entières. *Bull. Soc. math. France* 32 (1904) 65—67.

613.* Phragmén, E., Sur une extension d' un théorème classique de la théorie des fonctions. *Acta math.* 28 (1904) 351—368.

614.* Pincherle, S., La trasformazione di Laplace e le serie divergenti. *Rend. Acc. Bologna*, Nuova Serie, 5 (1900—01) 63—78.

615. — Sugli sviluppi assintotici e le serie sommabili. *Rend. Acc. Lincei* (5) 13_1 (1904) 513—519.

616. — Sulle funzioni meromorfe. *Rend. Acc. Lincei* (5) 12_2 (1903) 436—439.

617.* Pompeiu, D., Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 914—915.

618. Porter, M. B., On functions defined by an infinite series of analytic functions of a complex variable. *Annals of math.* (2) 6 (1904) 45—48.

619.* Pringsheim, A., Elementare Theorie der ganzen transcendenten Functionen von endlicher Ordnung. *Math. Ann.* 58 (1904) 257—342.

620. — Über den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen an der Con-

vergenzgrenze. *Acta math.* 28 (1904) 1—30.

621. Puzyna (von), J., Über eine methodische Bildung der analytischen Ausdrücke $\Sigma f_\nu(x)$, $\Sigma f_\nu(x, y)$ von constanten Werten. *Monatsh. Math. Phys.* 5 (1894) 67—84.

622. — Über Summen unendlich vieler Potenzreihen und über die functionen-theoretischen Sätze des Herrn Mittag-Leffler. *Bull. intern. Ac. Cracovie* 1903, 247—256.

623. Radelfinger, F. G., Analytical representation of complex functions. *Bull. phil. Soc. Washington* 14 (1902) 227—232.

624. Re (del), A., Sulla classificazione delle conoscenze matematiche. Parte prima. *Atti Acc. Pontaniana* 33 (1903).

625.*Remoundos, G., Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 1574—1575.

626. — Sur les zéros d'une classe de fonctions multiformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 344—346.

626a. — Sur quelques points de la théorie des nombres et la théorie des fonctions. *C. R. Ac. sc. Paris* 140 (1905) 1231—1233.

627. — Sur un théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions entières. *C. R. Ac. sc. Paris* 139 (1904) 399—400.

— s. Maillet.

627a. Riesz, J., Sur un théorème de M. Borel. *C. R. Ac sc. Paris* 140 (1905) 224—226.

628.*Russell, B., Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries. *Rev. math.* 7 (1901) 115—148

629. — The principles of mathematics. 1. Cambridge 1903. XXIX u. 534 S. 8°.

630.*Schoenflies, A., Beiträge zur Theorie der Punktmengen. *Math. Ann.* 58 (1904) 195—234, 59 (1904) 129—160.

631. — Über die geometrischen Invarianten der Analysis situs. *Nachr. Ges. Gött.* 1904.

632. — Über einen grundlegenden Satz der Analysis situs. *Nachr. Ges. Gött.* 1902, 185—192.

632a. Schoenflies, A., Über wohlgeordnete Mengen. *Math. Ann.* 60 (1905) 181—186.

632b Schottky, J., Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. *Stzgsb. Ak. Berlin* (1904) 1244—1262.

633. Séguier (de), J. A., Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris, 1904. II u 176 S. 8°.

634.*Severini, C., Sulle serie di funzioni analitiche. *Atti Ist. Ven.* 63 (1904) 1241—1255.

635. Sibirani, F., Un teorema della teoria delle serie di potenze. *J. sc. math. astr. Coimbra* 15 (1902) 79—84.

636. Sigma, Question 2854. *L'Intermed. math* 11 (1904) 285.

637.*Stolz, O., Über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe. *Stzgsb. Ak. Wien* 104 (1895) 485—501.

638. Stolz, O., Gmeiner, J. A., Einleitung in die Funktionentheorie. 1. Leipzig, 1904. VI u. 242 S. 2. Leipzig, 1905. VIII u. 256 S. 8°.

639. Störmer, C, Quelques propriétés arithmétiques des intégrales elliptiques et leurs applications à la théorie des fonctions entières transcendantes. *Acta math.* 27 (1903) 185—208.

640. Strauß, E., Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung. *Acta math.* 11 (1887) 13—18.

641. Thue, A., Mindre mathematiske meddelelser. 3. *Arch. for Math. og Nat.* 25_3 (1903).

642.*Vitali, G., Sopra le serie di funzioni analitiche. *Ann. mat. p. appl.* (3) 10 (1904) 65—82.

643. — Sopra le serie di funzioni analitiche. *Atti Acc. Torino* 39 (1904) 22—32.

644. — Sopra le serie di funzioni analitiche. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 36 (1903) 772—774.

645. — Sui gruppi di punti. *Rend. Circ. mat. Palermo* 18 (1904) 116—126.

646 — Sulla integrabilità delle funzioni. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 37 (1904) 69—73.

646a. — Una proprietà delle funzioni misurabili. *Rend. Ist. Lomb.* (2) 38 (1905) 599—603.

647.* Weierstraß, K., Zur Theorie der Potenzreihen (1841). *Mathematische Werke* 1 (1894) 67—74.

648.* Whitehead, A. N., The logic of relations, logical substitution groups and cardinal numbers. *Amer. J. math.* 25 (1903) 157—178.

649. — Theorems on cardinal numbers. *Amer. J. math.* 26 (1904) 31—32.

650. Whittaker, E. T., A course of modern analysis. Cambridge, 1902. XVI u. 378 S. 8⁰.

651.* Wigert, S., Quelques théorèmes sur les fonctions entières. *Öfv. Förh. Ak. Stockh.* 59 (1902) 207—214.

652. Wiman, A., Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières. *Ark. Mat. Astr. Fys. Stockholm* 1 (1903) 327.

653. — Sur le genre de la dérivée d'une fonction entière et sur le cas d'exception de M. Picard. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 137—139.

654. — Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$. *Acta math.* 29 (1905) 191—201.

654a. — Über die angenäherte Darstellung von ganzen Funktionen. *Ark. Mat. Astr. Fys. Stockholm* 1 (1903) 105—111.

655. — Über die Nullstellen der Functionen $E_\alpha(x)$ *Acta math.* 29 (1905) 217—234.

656. Young, W. H., A note on the conditions of integrability of a function of a real variable. *The Quart. J. p. appl. math.* 35 (1903) 189—192.

657. — A note on unclosed sets of points defined as the limit of a sequence of closed sets of points. *Proc. London math. Soc.* 35 (1903) 283—284.

658. — On an extension of the Heine-Borel theorem. *The Messenger Math.* 33 (1903) 129—132.

659 Young, W. H., On closed sets of points and Cantor's numbers. *Proc. London math. Soc.* (2) 1 (1904) 230—246.

660. — On closed sets of points defined as the limit of a sequence of closed sets of points. *Proc. London math. Soc.* 35 (1903) 269—282.

661. — On sequences of sets of intervals containing a given set of points. *Proc. London math. Soc.* (2) 1 (1904) 262—266.

662. — On the analysis of linear sets of points. *The Quart. J. p. appl math.* 35 (1903) 102—116.

663. — On the density of linear sets of points. *Proc London math. Soc.* 34 (1902) 285—290.

664. — Open sets and the theory of content. *Proc. London math. Soc* (2) 2 (1904) 16—51.

665. — Overlapping intervals. *Proc. London math. Soc* 35 (1903) 384—388.

666. — Sets of intervals on the straight line *Proc. London math. Soc.* 35 (1903) 245—268.

667. — The general theory of integration. *Proc. R. Soc. London* 73 (1904) 445—449.

668. — The tile theorem. *Proc. London math Soc.* (2) 2 (1904) 67—69.

669. — Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen. *Ber. Ges. Lpz.* 55 (1903) 287—293.

670.* Zermelo, E., Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe). *Math. Ann.* 59 (1904) 514—516.

671. Zoretti, L., Sur les ensembles parfaits et les fonctions uniformes. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 674—676.

672. — Sur les singularités des fonctions analytiques. *C. R. Ac. sc. Paris* 138 (1904) 1026—1027

Sachregister.

Die Zahlen geben die Seiten des Buches an.

Namenregister.

Die Zahlen geben die Seiten des Buches an.

Zu verbessern:

S. 293	Z. 3	v. u.	632b	statt	632ter.
S. 334	Z. 2	v. u.	571a	„	571bis.
S. 349	Z. 14	v. u.	544a	„	544bis.
	Z 12	v. u.	602a	„	602bis.

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik, der Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Abel, Niels Henrik, Œuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. 2 tomes. 4. 1881. geh n. ℳ 24.—
Tome premier [VIII u. 621 S.], contenant les mémoires publiés par Abel.
Tome second [IV u. 341 S.], contenant les mémoires posthumes d'Abel.

Biermann, Dr. Otto, Professor an der k. k. Technischen Hochschule zu Brünn, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.—

——— Theorie der analytischen Funktionen. [X u. 452 S.] gr. 8. 1887. geh. n. ℳ 12.80, in Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Bôcher, Maxime, Professor an der Harvard-Universität zu Cambridge, Mass., V. St. A., über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 8.—

Burkhardt, Dr. H., Professor an der Universität Zürich, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. II. Heft. 1. Lief. [176 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.60. 2. Lieferung. [S. 177—400.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 7.60. 3. Lieferung. [S. 401—768.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.40. 4. Lieferung. [S. 769—1072.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 10.— [Schluß-Lieferung unter der Presse.]

Dini, Ulisse, Professor an der Universität Pisa, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Geh. Hofrat Dr. Jacob Lüroth, Professor in Freiburg i. B., und Adolf Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 12.—, in Leinw. geb. n. ℳ 13.

Durège, Dr. H., weiland Professor an der Universität Prag, Theorie der elliptischen Funktionen. Versuch einer elementaren Darstellung. 4. Auflage. Mit 32 Holzschnitten im Text. [VIII u. 394 S.] gr. 8. 1887. geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—
[Neubearbeitung von L. Maurer unter der Presse.]

——— Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns. 4. Auflage. [X u. 300 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 6.80, in Leinwand geb. n. ℳ 7.80.
[Neubearbeitung von L Maurer unter der Presse.]

Fricke, Dr. Robert, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, und Geh. Regierungsrat Dr. **Felix Klein,** Professor an der Universität Göttingen, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen Mit 192 Figuren im Text. [XIV u. 634 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 22.—

Fricke, Dr. **Robert,** Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, und Geh. Regierungsrat Dr. **Felix Klein,** Professor an der Universität Göttingen, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. II. Band: Die funktionentheoretischen Ausfuhrungen und die Anwendungen. 1. Hälfte: Engere Theorie der automorphen Funktionen. Mit 34 Figuren im Text. [282 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M.* 10.—

Harkness, J., Professor am College zu Bryn Mawr, elliptische Funktionen. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung]

Harnack, Dr. **Axel,** weiland Professor der Mathematik am Polytechnikum zu Dresden, die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktionen in der Ebene. [IV u. 158 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 4.20.

Hensel, Dr. **Kurt,** Professor der Mathematik an der Universität Marburg a. L., und Dr. **Georg Landsberg,** Professor der Mathematik an der Universität Breslau, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit vielen Figuren im Text. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 28.—

Inhalt: I. Teil: Ausbreitung der algebraischen Funktionen auf der Riemannschen Fläche. II. Teil: Der Körper algebraischer Funktionen. III Teil: Die algebraischen Divisoren und der Riemann-Rochsche Satz. IV Teil: Die algebraischen Kurven oder Gebilde. V. Teil: Die Klassen algebraischer Gebilde VI. Teil: Algebraische Relationen zwischen Abelschen Integralen. Anhang. Sachregister.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **Felix,** Professor an der Universität Göttingen, Vorlesungen über die Theorie der elliptische Modulfunktionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. Robert Fricke, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. 2 Bände. Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. Jeder Band n. *M.* 24.—

Einzeln: I. Band. Grundlegung der Theorie. [XX u. 764 S.] 1890.
II. — Fortbildung und Anwendung der Theorie. [XV u. 712 S.] 1892.

——— über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellung. Mit Figuren im Text. [VIII u. 82 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 2.40.

——— autographierte Vorlesungshefte. 4. geh.

III. Über die hypergeometrische Funktion.
569 Seiten (W.-S. 1893/94) n. *M.* 9.—

V. Riemannsche Flächen.
Heft 1, 254 Seiten (W.-S. 1891/92) } zusammen n. *M.* 12.—
Heft 2, 262 Seiten (S.-S. 1892)

Koenigsberger, Geheimrat Dr. **Leo,** Professor an der Universität Heidelberg, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionenlehre. Mit 62 Holzschnitten im Text. 2 Teile. gr. 8. 1874. geh. n. *M.* 21.60.

Einzeln: I. Teil. [VIII u. 431 S.] n. *M.* 14.—
II. — [VII u. 219 S.] n. *M.* 7.60.

Krazer, Dr. **Adolf**, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 10 Figuren im Text. [XXIV u. 512 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

Neumann, Geh. Hofrat Dr. **Carl**, Professor an der Universität Leipzig, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. 2., vollständig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Holzschnitten im Text und 1 lithogr. Tafel. [XIV u. 472 S.] gr 8. 1884. geh. n. *M.* 12.—

——— über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes. [VIII u. 104 S.] gr. 4. 1881. geh. n. *M.* 7.20.

Neumann, Dr. **Franz**, weiland Professor der Physik und Mineralogie an der Universität Königsberg, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen. I. und II. Abteilung. (In 1 Band.) [156 S.] gr. 4. 1878. geh. n. *M.* 8.—

——— Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften. VI. Heft: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von Geh. Hofrat Dr. Carl Neumann, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 12.—

Nielsen, Dr. **Niels**, Privatdozent in Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 14.—

——— Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb.

Osgood, W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band [ca. 480 S.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint Ende 1905.]

Pringsheim, Dr. **Alfred**, Professor an der Universität München, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (Elementare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) I. Band: Zahlenlehre II. Band: Funktionenlehre. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Rausenberger, Dr. **Otto**, Professor an der Musterschule zu Frankfurt a. M., Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Diskontinuitätspunkte nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionentheorie. Mit Figuren im Text. [VIII u. 476 S.] gr. 8. 1884. geh. n. *M.* 10.80.

Riemann, Bernhard, gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind und Heinrich Weber. 2. Auflage, bearbeitet von Heinrich Weber. Mit dem Bildnis Riemanns. [X u. 558 S.] gr. 8. 1892. geh. n. *M.* 18.—

Carnegie Mellon University Libraries
3 8482 01114 6749

Riemann, Bernhard, g Werke und wissenschaftlicher Nac en von M. Noether, Professor an der Universität Erlangen, und W. Wirtinger, Professor an der Universität Wien Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 6.—

——— Vorlesungen über elliptische Funktionen. Mit Zusätzen herausgegeben von Dr. Hermann Stahl, Professor an der Universität Tübingen. Mit 20 Figuren im Text. [VIII u. 144 S.] gr. 8. 1899. geh. n. *M.* 5.60.

Rost, Dr. **Georg,** Professor an der Universität Würzburg, Theorie der Riemannschen Thetafunktion. [IV u. 66 S.] gr. 4. 1902. geh. n. *M.* 4.—

Schoenflies, Dr. **Arthur,** Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Mit Figuren im Text. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII, 2. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. geh. n. *M.* 8.—

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik an der Universität Tübingen, Theorie der Abelschen Funktionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

Stolz, Dr. **O.,** Professor an
Professor an der
Funktionentl
der von den
berücksichtigte
methik" von (
gr. 8. 1905.
Auch in 2 Al
I. Abteilu
geb.
II. Abteilu
In Lei

Thomae, Dr. J.,
Sammlung v
elliptischen
4. 1905. ka

Vivanti, G., Pro
eindeutigen
wirkung des V
an der Universi

Wirtinger, Dr. W
suchungen ü
Fakultät der
1895 gekrönt
Wissenschaften
1895. geh.

——— algebr
In Leinwand g

Carnegie Institute of Technology
Library
Pittsburgh, Pa.

UNIVERSAL LIBRARY
138 135
UNIVERSAL LIBRARY